Axlou Toth pour l'Innovation

Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique (POINT E-DAKAR)	Généralités sur les fonctions numériques	Niveau : **PREMIERE S2** Professeur : **M. Diallo** Année : **2021/2022**

Exercice 1 : Domaine de définition d'une fonction

Déterminer l'ensemble de définition de f

1) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+2}$
2) $f(x) = \frac{3}{2-|x|}$
3) $f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - x}{x^2}$
4) $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x+5}{x-3}$
5) $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$
6) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{(x-2)(x+3)}$
7) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$
8) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2-3x+2}$
9) $f(x) = \sqrt{\frac{|x|-3}{x+5}}$
10) $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x-1}{1-x^2}\right|}$
11) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+x}-2}$
12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$
13) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$
14) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-1}, & x < 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-x-2}, & x \geq 0 \end{cases}$
15) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)} & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{4-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Exercice 2 : Parité et Périodicité d'une fonction

1) Etudier la parité de f(x)

a) $f(x) = 3x^4 + x^2$
b) $f(x) = -2x^2 + 3|x| - 1$
c) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+|x|}$
d) $f(x) = \frac{x^2}{5x^2-3}$
e) $f(x) = 8x^3 - 2x$
f) $f(x) = \frac{x}{4x^2-3}$
g) $f(x) = x\sqrt{x^3} + 3x$
h) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$
i) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$
j) $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$
k) $f(x) = \frac{2x\sqrt{x}-x}{x^2}$
l) $f(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+5}$
m) $f(x) = E(x)$
n) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

2) On considère une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $3f(-x) + f(x) = 4x^3 + 2x$

Prouver que f est impaire. En déduire $f(x)$.

3) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

Calculer f(x +4),f(x +6),f(x + 8) en fonction de f(x).Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 3 :

On considère les fonctions f et g définies par :$f(x) = \sqrt{4-x}$ et $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

a) Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g.

b) Déterminer le domaine de définition de gof

c) Calculer $gof(x)$.

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{3\}$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

$x \mapsto \frac{3x+5}{x-2}$

1) Déterminer Dfog et Dgof
2) Déterminer fog(x) et gof(x)
3) Déterminer les ensembles de définition des fonctions fog et gof dans les cas suivants
   a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$
   b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = x^2 + x$
4) Dans les 3 cas suivants, Calculer $g \circ f(x)$ puis $f \circ g(x)$
   a) f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -5x + 4$
   b) $f(x) = \sqrt{x-6} + 3$ sur $[6; +\infty[$ et $g(x) = 3x - 6$ sur $\mathbb{R}$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x) = -x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Soit *f* l'application de *IR* vers *IR* définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Trouver toutes les applications affines g telles que : $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 6 : Prolongement et Restriction

Dans chacun des cas suivants, déterminer la restriction de la fonction f à l'intervalle I puis à l'intervalle J.

1. $f(x) = \frac{x^3}{|x|} + 1$; $I =]0; +\infty[$ et $J =]-\infty; 0[$
2. $f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$; $I =]0; 1[$ et $J =]-\infty; 0[$
3. $f(x) = |2x+1| - |x-3|$; $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et $J = [3; +\infty[$

Exercice 7 : Majoration et Minoration

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{3x-7}{x+2}$. Montrer que f est majorée sur $[2; +\infty[$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. Montrer que f est bornée sur $]5; +\infty[$

Exercice 8 : Maximum et Minimum

Soit f la fonction définie sur [-3 ; +∞ [par $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$

1) Démontrer que f(x) peut s'écrire $f(x) = 2 - \frac{7}{x+5}$.

2) Démontrer que f est croissante sur [-3 ; +∞[.

3)
   a) Démontrer que f admet un minimum le préciser
   b) Démontrer que f admet un majorant.
   c) En déduire que f est bornée et indiquer un encadrement de f(x).

4)

a) Résoudre dans [-3 ; +∞[l'équation f(x) = 0

b) En déduire le signe de f(x) dans [-3 ; +∞[.

Exercice 9 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-1}{2-|x|}$

1)

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Etudier la parité de f

2) Soit g la restriction de f sur $]-2\,;2[$

a) Montrer que g est majorée par 1 sur $[0\,;1]$

b) 1 est-il un maximum de g sur $[0\,;1]$

c) En déduire que g est majorée par 1 sur $[-1\,;1]$

Montrer que g est minorée par -1 sur $]-2\,;2[$

Exercice 10 : Axe de Symétrie-Centre de symétrie

(O, I, J) est un repère orthonormé et f, une fonction numérique à variable réelle.

1. Montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de C_f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$; $(\Delta): x = -1$

b. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$; $(\Delta): x = -2$

2. Montrer que le point I est un centre de symétrie de C_f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{1-x}$; $I\binom{1}{1}$

b. $f(x) = \frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}$; $I\binom{1}{1}$

Exercice 11 : Axe de Symétrie-Centre de symétrie

Soient f, g et h des fonctions numériques définies par

$f(x) = \frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x-15}$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ *et* $h(x) = \frac{4x+1}{x-4}$

1) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions

2) Montrer que $I\binom{4}{4}$ est un centre de symétrie de la courbe Ch.

3) Montrer que g est une fonction paire. Quelle interprétation pour la courbe Cg ?

4) Montrer que la droite (D) : x = 1 est un axe de symétrie de Cf.

5) Déterminer Dhof et donner hof(x), Déterminer Dhog et donner hog(x)

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par f(x) = |x +1| + |x - 1|.

1) Montrer que f(–x) = f(x) puis conclure sur la parité de f.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Ecrire f(x), suivant les valeurs de x, sans le symbole de la valeur absolue.

3) Etudier les variations de f sur]-∞ ; –1], [–1 ; 1] et [1 ; +∞[

4) Dresser son tableau de variation.

5) Représenter graphiquement f.

Exercice 13 :

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x^2$.

On notera (C_f) et(C_g) leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O.\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[-2\,;2]$

2) Remplir le tableau suivant puis construire la courbe (C_g) de la fonction g

sur l'intervalle $[-2\,;2]$

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

3) **a)** Trouver les réels a et b tels que : $f(x) = (x-a)^2 + b$

b) En déduire une expression de f en fonction de g

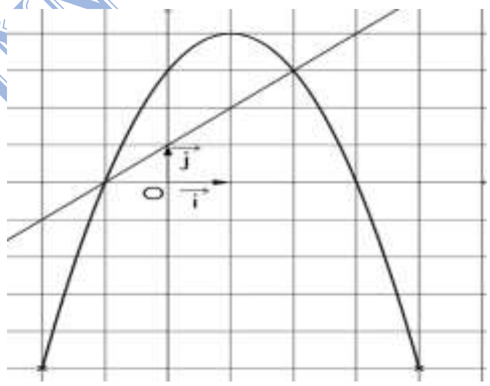
c) Expliquer comment obtenir (C_f) a partir de (C_g) puis la construire dans le même repère.

4) A partir de (C_f) , expliquer comment construire les courbes des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = f(-x)$ **b)** $f_2(x) = f(x) + 1$ **c)** $f_3(x) = f(|x|)$

5) Construire dans le repère précèdent les courbes des fonctions f_1 , f_2 et f_3
(On utilisera des couleurs différentes)

Exercice 14 : **Exploitation graphique**
Dans le repère ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$ et la droite (D) : y = x+1.



1. Déterminer graphiquement les images de -1 ; 0 ; et de 1 par f.
2. Résoudre graphiquement
a. $f(x) = 3$, **b.** $f(x) = 4$, **c.** $f(x) = -7$, **d.** $f(x) > 0$,
e. $f(x) \leq 0$.
3. Résoudre graphiquement
a. $f(x) - x - 1 \leq 0$ b. $f(x) - 1 \geq x$.

Exercice 15 :

Partie A :

On considère les trinômes $f : x \longmapsto 5x^2 + 4x$ et $g : x \longmapsto x^2 - 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Donner la forme canonique de f et g. En déduire comment on obtient les courbes représentatives de f et de g à partir de la courbe représentative de la fonction carrée
Préciser l'axe de symétrie de chacune des deux courbes C_f et C_g
2) Donner les tableaux de variations de f et g
3) Déterminer les positions relatives de f et g

Partie B :

On considère la fonction $h = g \; o \; f$ définie sur $\mathbb{R}$

1) Dans un repère orthonormé (unité 2cm). Tracer la courbe de la fonction h
2) Déterminer graphiquement son tableau de variations. Soyez précis pour les valeurs des extremums
3) En utilisant les variations de f et de g et en rédigeant très proprement, démontrer les variations de h sur $]-\infty\;;\;-1]$ et sur $\left[-\frac{2}{5}\;;\frac{1}{5}\right]$

Problème de Synthèses

Problème 1 :

Soient $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = \frac{-3}{x+3}$ deux fonctions et soient C_f et C_g leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$

1) Déterminer les domaines de définition de f et de g
2)
   a) Donner la forme canonique de f
   b) Déduire les variations de f sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -2]$ et $[-2\ ;\ +\infty[$
   c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de C_f, courbe représentative de f
   d) Tracer C_f dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$
3)
   a) Etudier la parité de g
   b) Montrer, par le calcul, que C_f et C_g ont trois points d'intersection A , B et C dont on déterminera les coordonnées
   c) Justifier que C_g est une hyperbole et en préciser le centre et les asymptotes
   d) Tracer C_g dans le même repère que C_f et placer les points A , B et C
4) Soit h la fonction définie sur ℝ par :
   $$h(x) = \frac{-3}{|x| + 3}$$
   a) Montrer que h est paire
   b) Montrer que h est majorée par 0 et minorée par -1 sur ℝ
   c) Etudier les variations de h sur $]-\infty\ ; 0]$ et puis sur $[0\ ;\ +\infty[$
   d) Montrer que la restriction de h à $[0\ ;\ +\infty[$ est égale à g
   e) Construire, dans un même repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ la courbe C_h à partir de g.
5) Résoudre graphiquement :
   a) $-\frac{3}{x+3} \geq 0$ b) $-\frac{3}{x+3} \geq \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ c) $h(x) > -\frac{1}{2}$

Problème 2 :

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \frac{2x-2}{x+1}$.

Partie I :

1) a) Dresser le tableau de variations de f et g.
   b) Qu'elle est la nature des courbes (C_f) et (C_g) et leurs éléments caractéristiques.
2) a) Prouver que $(\forall\ x\ ℝ\ \backslash\{-1\}), f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0$.
   b) Déduire les points d'intersections des courbes (C_f) et (C_g).
3) a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) et de l'axe des abscisses.
   b) Tracer dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les deux courbes (C_f) et (C_g).
4) Résoudre graphique de l'inéquation $x^2 - x - 1 \geq \frac{x-3}{x+1}$.

Partie II :

Soit F la fonction définie ℝ telle que : $\begin{cases} F\ est\ paire \\ F(x) = g(x)\ ; \quad\quad x \leq -2 \\ F(x) = f(x)\ ;\ -2 < x \leq 0 \end{cases}$

1) Calculer $F(5)$ et $F\left(\frac{3}{2}\right)$
2) Donner le tableau de variation de F sur ℝ.
3) Donner une expression de $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0; 2[$.
4) Tracer dans un autre repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe de la fonction F.