CSM COCODY	Contrôle de Mathématiques	$1^{ère}$ C
C.E DE MATH		Durée : 01h00
	Vendredi 05 Février 2016	Coefficient : 1

EXERCICE N°1 (10 points)

1-

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ les inéquations suivantes : (I_1) : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; (I_2) : $\cos(x) > -\frac{1}{2}$

2- Soit p le polynôme défini par : $p(x)= 4x^3- 3x - 1$.

a) Montrer que 1 est une racine de p.
b) En déduire une factorisation de p.
c) Résoudre dans R l'équation $p(x) = 0$.

3- Résolution de l'équation (E) : $4\cos^3(2x) - 3\cos(2x) - 1 = 0$.

a) Montrer que $4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0$ a pour équation résolvante $p(x) = 0$.
b) Déduire de a) Les solutions de (E).

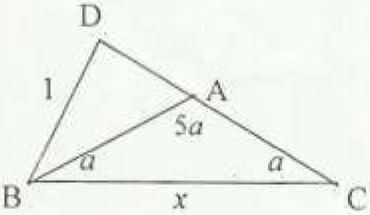
4- Résoudre sur $]-\pi;\pi[$ l'inéquation $4\cos^3(x) - 3\cos(x) - 1 \leq 0$.

EXERCICE N°2 (10 points)

Sur la figure ci-contre, les triangles ABC et CBD sont isocèles ;

BD = 1 ; BC = x;

ABC = BCA = a et BAC = $5a$.



1. Donnez une valeur de a en radians.
2. Déterminez une mesure de chacun des angles BAD, ADB et ABD en fonction de a.
3. Calculez AB et AC en fonction de x.
4. En utilisant la règle des sinus, établir que $\frac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et que $\frac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$
5. En utilisant $3a = 2a + a$, établir que $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$
6. En déduire que $x = 4\cos^2 a - 1$ et que $1 - x = \frac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$
7. Démontrer que finalement $\cos\frac{\pi}{7}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$

Corrigé

Les angles DAB et BAC sont supplémentaires donc BAD = π - BAC = $2\pi/7 = 2a$

DBC est isocèle en C donc ADB = CDB = (π - DCB) /2 = $3\pi/7 = 3a$

ABD = $3a - a = 2a$ ABD est donc isocèle en D.

- Calcule de AB et AC en fonction de x.

ABD est donc isocèle en D donc BD = AD = 1 et BC = CD = x

D'où AC = AB = x - 1

- Etablir que $\dfrac{\sin(3a)}{x} = \sin a$ et que $\dfrac{\sin(3a)}{x-1} = \sin(2a)$

Dans DBC isocèle en C, on a : $\dfrac{BD}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin D}$ donc $\sin(a) = \dfrac{\sin(3a)}{x}$

Dans ABD, on a : $\dfrac{BA}{\sin D} = \dfrac{BD}{\sin A}$ donc $\sin(2a) = \dfrac{\sin(3a)}{x-1}$

- Etablir que $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$

$\sin(3a) = \sin(2a + a) = \sin(a) \times \cos(2a) + \cos(a) \times \sin(2a)$

$= \sin(a)\,[2\cos^2(a) - 1] + 2\sin(a) \times \cos^2(a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$

- Montrons que $x = 4\cos^2 a - 1$ et que $x - 1 = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$

D'après les questions précédentes nous avons $\sin(a) = \dfrac{\sin(3a)}{x}$ donc $x = \dfrac{\sin(3a)}{\sin(a)}$

et $\sin(3a) = \sin(a) \times (4\cos^2 a - 1)$ donc $x = 4\cos^2 a - 1$

$$1 - x = \frac{\sin(3a)}{\sin(2a)} = \frac{\sin(3a)}{\sin(a)} \times \frac{\sin(a)}{\sin(2a)} = (4\cos^2 a - 1) \times \frac{1}{2\cos(a)} \text{ donc } 1 - x = \frac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$$

- Démontrons que $\cos\dfrac{\pi}{7}$ est solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$

$x = 4\cos^2 a - 1$ et $1 - x = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$ donc $1 - (4\cos^2 a - 1) = \dfrac{4\cos^2 a - 1}{2\cos a}$

soit $8\cos^3 a + 4\cos^2 a + 4\cos a - 1 = 0$

donc $\cos\dfrac{\pi}{7}$ est bien solution de l'équation $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1 = 0$