Exercice n°1:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$.
On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Corrigé

Exercice n°2:

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$, par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie en un point d'abscisse 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{x}{x - 1}$.
4. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.
5. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Corrigé

Exercice n°3:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x - 3}$, et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
   Dans la suite de l'exercice, la fonction f sera étudiée sur $[-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
3. Déterminer les limites en 1 et la limite en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Corrigé

Exercice n°4:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-2x+2}$, et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine, en déduire l'existence d'une asymptote horizontale (Δ) pour $(\mathcal{C}_f)$.
3. Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$et de (Δ).
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Corrigé

Exercice n°5:

On donne la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3+27}{2x^2}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) Justifier l'équivalence : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.
   (b) Calculer la fonction dérivée de f.
   (c) Étudier le signe de f'.
5. Dresser le tableau de variations de f.
6. Tracer la courbe représentative de f.

Corrigé

Exercice n°6:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est $2\pi-$périodique.
   (b) Montrer que f est paire.
2. (a) Montrer que la fonction dérivée de f s'écrit : $f'(x) = 2\sin x(1-2\cos x)$.
   (b) Étudier le signe de f' sur $[0;\pi]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
4. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur un intervalle de longueur 4π.

Corrigé

Exercice n°7:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est définie ssi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est $2\pi-$périodique.

   Pour la suite de l'exercice, on étudiera la fonction sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Déterminer les limites de f en :
   (a) $-\dfrac{3\pi}{2}$ par valeurs supérieures,
   (b) $\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures,
4. Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.
5. Dresser le tableau de variations de f
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right[$.

Corrigé

Exercice n°8:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x^2 - |x|$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que f est paire.
2. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Exercice n°9:

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x - \sqrt{|x-1|}$ et on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de f sans valeur absolue sur $[1; \infty[$ et sur $]-\infty; 1]$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1.
3. Étudier la fonction sur $]-\infty; 1]$.
4. Étudier la fonction sur $[1; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Corrigé

Définition : soit x un nombre réel, on appelle partie entière de x et on note $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemples :
$E(5,4) = 5 \quad E(\sqrt{2}) = 1 \quad E(4) = 4 \quad E(-2,5) = -3.$

Exercice n°10:

Tracer la courbe représentative de la fonction partie entière : $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-3, 3[$.

Corrigé

Exercice n°11:

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = x - E(x)$.

1. Montrer que E est périodique de période 1.
2. Donner l'expression de f sur $[0, 1[$ puis sur $[1, 2[$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3, 3[$.

Corrigé

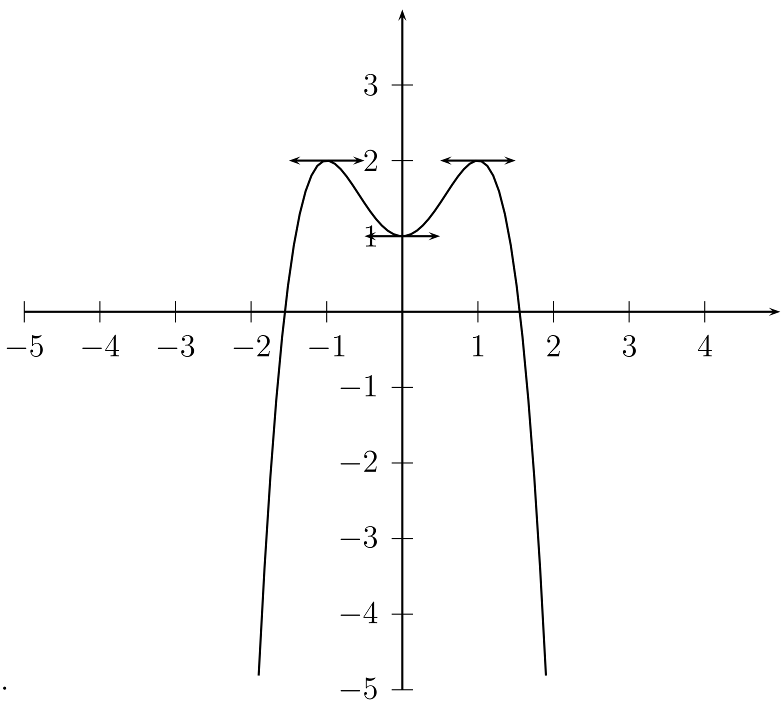
<u>Exercice n°1:</u>

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. (On peut aussi dire que le domaine de définition est centré en 0.)
   soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = f(x)$, donc f est paire
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$ et par symétrie : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2)$.
   D'une part $4x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, d'autre part $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$ (règle du signe du trinôme), ce qui donne :

x	0		1		$+\infty$
$4x$	0	$+$	|	$+$	
$1 - x^2$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	

4.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5.


Dans un graphique doivent apparaître toutes les droites dont il a été question dans le sujet, auquel s'ajoutent les tangentes horizontales. Retour

Exercice n°2:

1. Le domaine de définition est centré en 1, de plus pour tout $h \neq 0$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[f(1+h)+f(1-h)\right] &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+h)^2+(1+h)+1}{1+h-1}+\frac{(1-h)^2+(1-h)+1}{1-h-1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2}{h}+\frac{3-3h+h^2}{-h}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3+3h+h^2-3+2h-h^2}{h}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{6h}{h}=3\end{aligned}$$
Donc le point Ω de coordonnées $(1;3)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

2. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et par symétrie, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
• $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} x-1 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = +\infty$, et par symétrie : $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x) = -\infty$.

3. Pour tout $x \neq 1$, $ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$,
en identifiant le numérateur de cette fraction avec celui de $f(x)$, on obtient :
$\begin{cases} a=1\\ b-a=1\\ c-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=3\end{cases}$, donc $f(x) = x+2+\frac{3}{x-1}$.

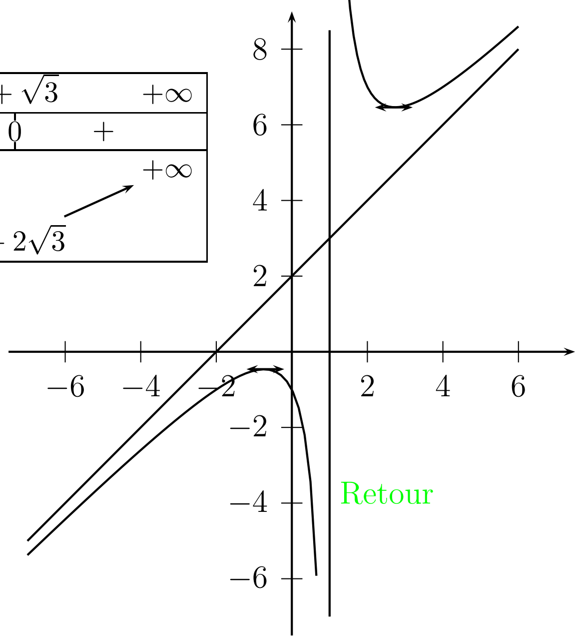
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+2)) = 0$ et la droite (d) d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
Puisque $\Omega \in (d)$, nous pouvons déduire que (d) est aussi asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.

5. Pour $x \neq 1$, f est dérivable comme quotient de deux polynômes, et :
$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$.
Pour tout $x \neq 1, (x-1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-2, polynôme ayant pour racines $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$ qui, d'après la règle du signe du trinôme est positif ssi $x \in]-\infty; 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3}; +\infty[$.

6.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$3+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

Remarque : il était possible de ne faire que la moitié du tableau de variations.

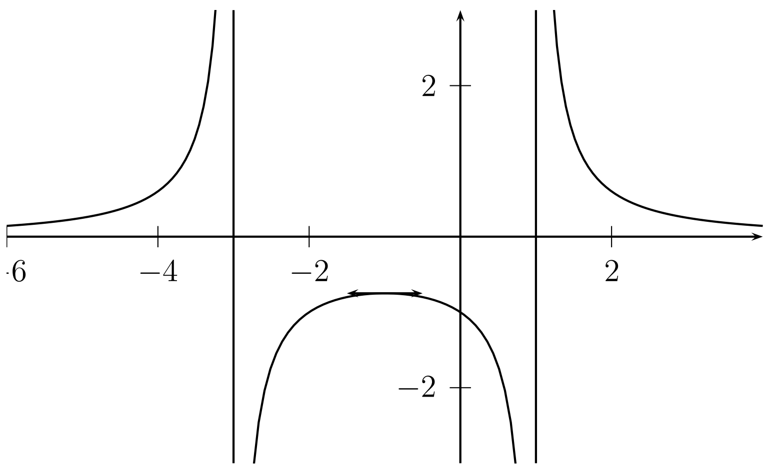


Retour

Exercice n°3:

1. f est définie ssi $x^2+2x-3 \neq 0$ ssi $x \neq 1$ et $x \neq -3$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-3;1\}$.
2. $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 1, et pour tout $h \neq \pm 2$, on a :
$f(-1+h) = \dfrac{3}{(-1+h)^2+2(-1+h)-3} = \dfrac{3}{h^2-4}$,
et $f(1+h) = \dfrac{3}{(1+h)^2+2(1+h)-3} = \dfrac{3}{h^2-4}$.
Donc $f(-1+h) = f(-1-h)$ et la droite d'équation $x=-1$ est axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. • $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2+2x-3 = 0^-$, donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$, d'autre part :$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x^2+2x-3 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$.
$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.
Remarque : Le signe (0^+ ou 0^-) est facile à déterminer ici, cela serait plus compliqué avec par exemple : x^2-2x.
   • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+2x-3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.
4. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $f'(x) = \dfrac{-3(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$.
Le dénominateur étant strictement positif, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -3(2x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$.
5.

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$ ↘	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	0

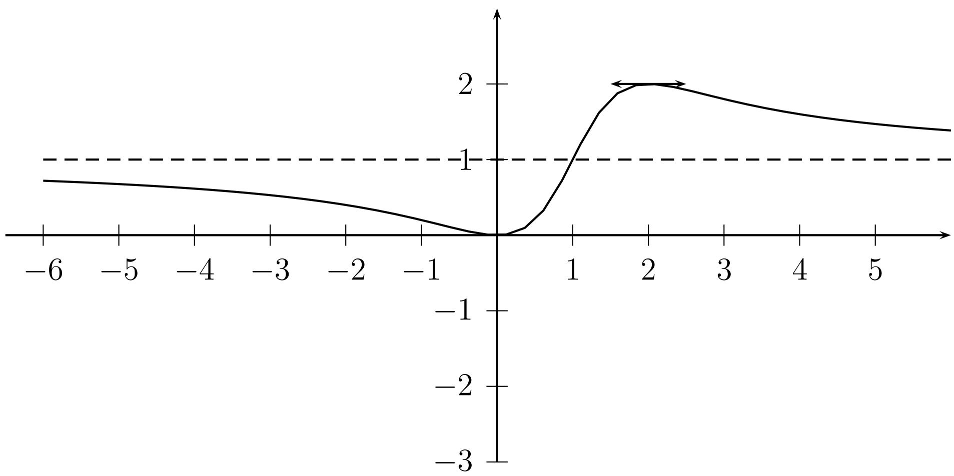


Retour

Exercice n°4:

1. Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = -4 < 0$, donc ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Pour étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$et de (Δ), j'étudie le signe de $f(x) - 1$.
   $f(x) - 1 = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$, donc $f(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de son asymptote sur $[1, +\infty[$ et elle est en dessous sur $]-\infty; 1]$.
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 2x + 2) - x^2(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \dfrac{2x(2 - x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$.
   $(x^2 - 2x + 2)^2$ étant strictement positif sur $\mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x(2 - x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2]$.
5.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	2	↘	1



Retour

Exercice n°5:

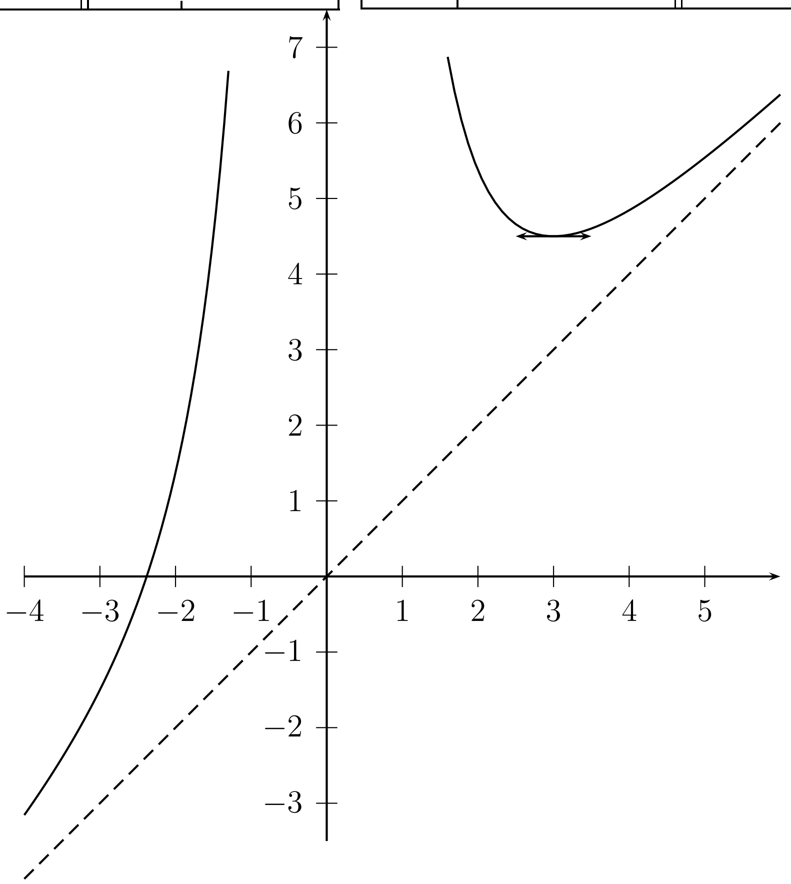
1. f est définie ssi $2x^2 \neq 0$ ssi $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.
   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0}(2x^3+27) = 27 \\ \lim\limits_{x\to0} 2x^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$. (à gauche et à droite)
3. Pour tout $x \neq 0, f(x) - x = \dfrac{2x^3+27}{2x^2} - x = \dfrac{27}{2x^2}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{27}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{27}{2x^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. (a) La fonction $x \mapsto x^3$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $x \geqslant 3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 3^3 \Leftrightarrow x^3 \geqslant 27$.

   (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et pour tout $x \neq 0$,
   $$f'(x) = \frac{6x^2 \times 2x^2 - (2x^3+27)\times 4x}{4x^4} = \frac{x(x^3-27)\times 4x}{x^4}$$

   (c)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^3-27		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^4		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	0

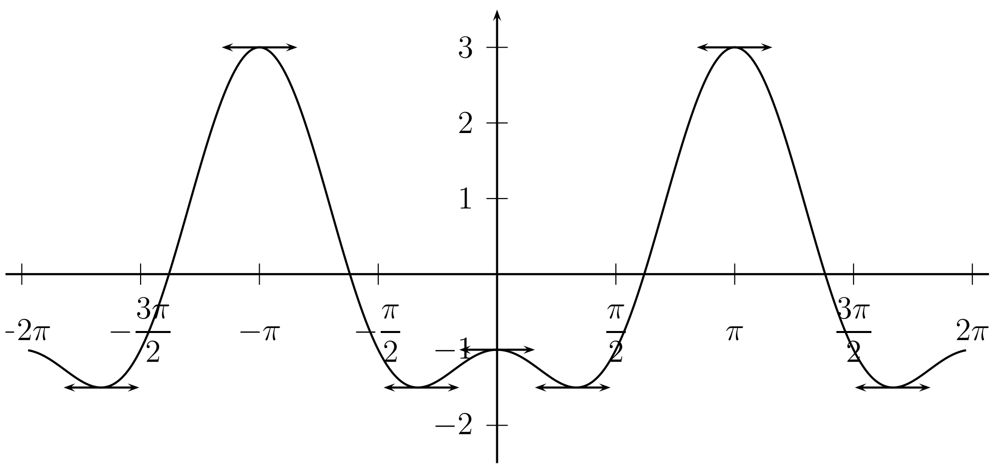


Retour

Exercice n°6:

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos 2x - 2\cos x = f(x)$, donc f est périodique, de période 2π.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos x = f(x)$, donc f est paire.
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x = -4\sin x\cos x + 2\sin x = 2\sin x(-2\cos x + 1)$.
   (b) Pour tout $x \in]0;\pi[, \sin x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - 2\cos x$.
   Remarque : on a $f'(0) = f'(\pi) = 0$.
   Or, pour $x \in [0,\pi], 1 - 2\cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3



3.

Retour

Exercice n°7:

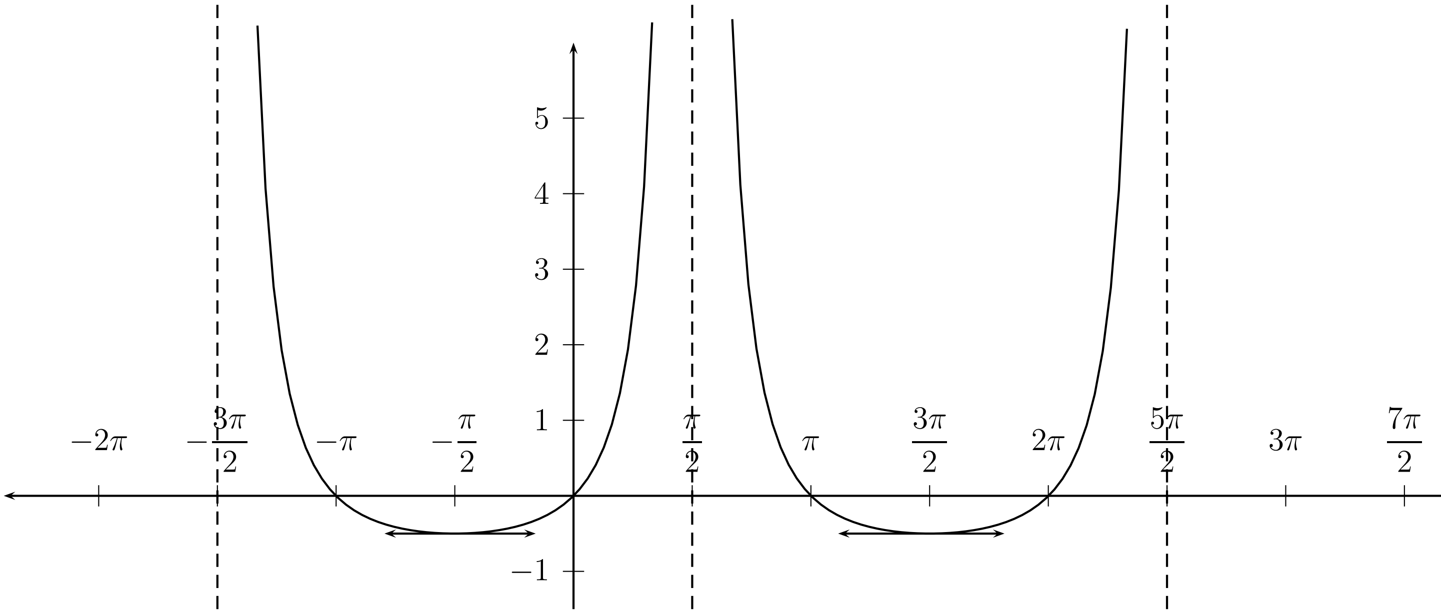
1. f est définie ssi $1-\sin x \neq 0$ ssi $\sin x \neq 1$ ssi $x \neq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{1-\sin(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{1-\sin x}=f(x)$, donc f est $2\pi-$périodique.
3. (a) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{3\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{3\pi}{2}} 1-\sin x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -\frac{3\pi}{2}} f(x)=+\infty$

   (b) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} 1-\sin x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x)=+\infty$
4. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, f est dérivable et

   $f'(x)=\dfrac{\cos x(1-\sin x)-\sin x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$.

   $(1-\sin x)^2>0$, donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right]$.
5.

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$
$f(x)$	$\|$	$+\infty \searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow +\infty$	$\|$



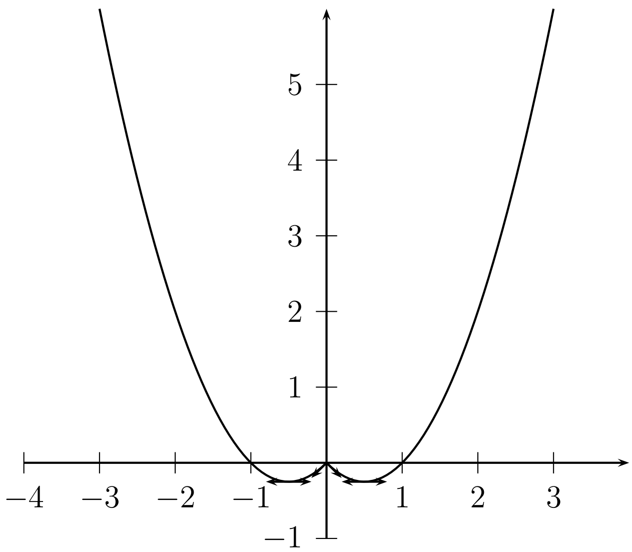
Retour

Exercice n°8:

1. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$.
2. Si $x \geqslant 0$: $f(x) = x^2 - x$ et si $x \leqslant 0$: $f(x) = x^2 - (-x) = x^2 + x$
3. $\displaystyle\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - 1 = -1.$
   $\displaystyle\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x + 1 = 1.$
   La limite à gauche et la limite à droite étant différente, la limite du taux d'accroissement n'existe pas et f n'est pas dérivable en 0. (On parle ici de demi-tangentes à droite et à gauche de cœfficients directeurs -1 et 1).
4. Sur $\mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 - x$, de dérivée $f'(x) = 2x - 1$, négative sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et positive sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
   Ce qui donne sur $[0; +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5.



Remarque : La fonction valeur absolue existe sur vos calculatrice sous le nom de Abs. (Menu math sur TI, Optn puis Num sur Casio)

Retour

Exercice n°9:

1. Sur $[1;\infty[$, $f(x)=x-\sqrt{x-1}$ et sur $]-\infty;1]$, $f(x)=x-\sqrt{1-x}$.
2. $\lim\limits_{x\overset{\geq}{\to}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{\geq}{\to}1}\dfrac{x-\sqrt{x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{\geq}{\to}1}1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=-\infty$.

   et $\lim\limits_{x\overset{\leq}{\to}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{\leq}{\to}1}\dfrac{x-\sqrt{1-x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{\leq}{\to}1}1-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim\limits_{x\overset{\leq}{\to}1}1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$.

   Donc f n'est pas dérivable en 1.

   En fait, une seule de ces limites était suffisante, mais j'ai mis les deux pour que vous puissiez apprécier le changement de signe à la dernière étape de la deuxième limite.
3. Sur $]-\infty;1]$, $f(x)=x-\sqrt{1-x}$.

   On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

   Et $f'(x)=1-\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ qui est positif sur $]-\infty;1[$, donc f est croissante sur cet intervalle.
4. Sur $[1;+\infty[$, $f(x)=x-\sqrt{x-1}$.

   On a : $f(x)=x-\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\right)$. ($\sqrt{x^2}=x$ car $x>0$)

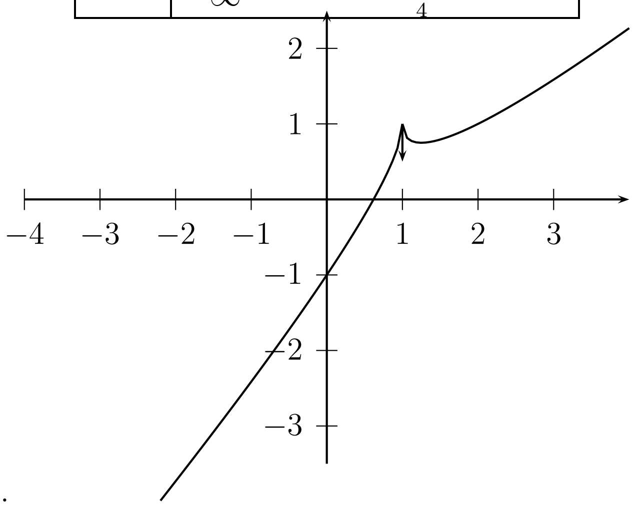
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

   Et $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{1-x}}$.

   Pout tout $x\in]1;+\infty[$,

   $\sqrt{x-1}>0$ et $2\sqrt{x-1}-1\geqslant 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\geqslant\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x-1\geqslant\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{5}{4}$.
5.

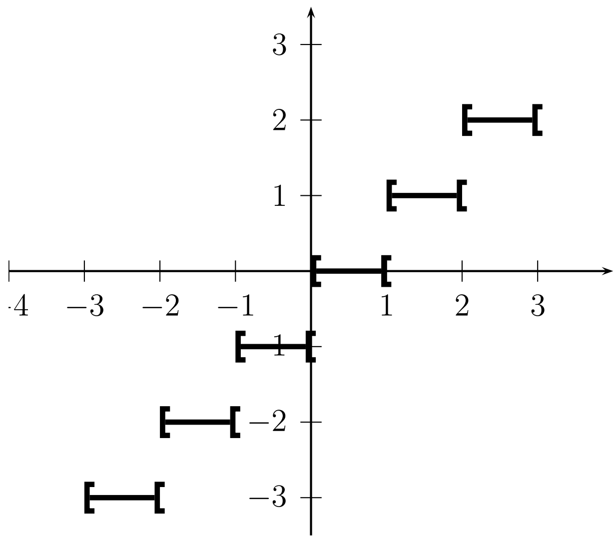
x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$



6.

Retour

Exercice n°10:

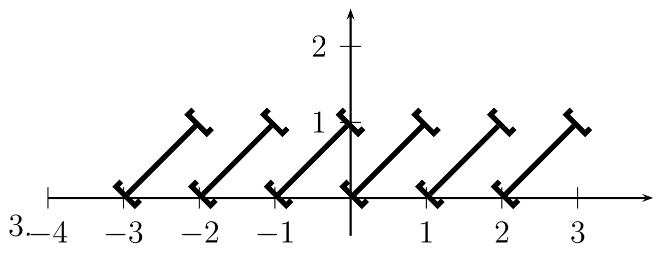


Ce type de fonction porte le nom de fonction en escalier.

Retour

Exercice n°11:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x) + 1$.
   (Attention $E(x+y)$ n'est pas forcément égal à $E(x) + E(y)$).
   Ce qui donne $f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = x + 1 - E(x) - 1 = x - E(x) = f(x)$.
   Donc f est $1-$périodique.
2. Pour $x \in [0, 1[$, $E(x) = 0$, donc $f(x) = x - E(x) = x$.
   Pour $x \in [1, 2[$, $E(x) = 1$, donc $f(x) = x - E(x) = x - 1$.



$f(x) = x - E(x)$ est la partie fractionnaire (ou décimale) de x

Retour