



SEANCE D'EXERCICES 1^{ère} D

Exercice

Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on pourra suivre le plan suivant :

- Ensemble de définition
- Ensemble d'étude (dans le cas des fonctions paires ou impaires)
- Les limites et asymptotes éventuelles
- Dérivées et sens de variation
- Représentation graphique
- Eléments de symétrie

Exercice 1

Soit les fonctions : $f: x \mapsto x^3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$; $g: x \mapsto \frac{9x}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

- 1) a- Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$.
 b- Etudier la parité de f .
 c- Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 2) a- Mettre $g(x)$ sous la forme $a + \frac{b}{x-1}$; a et b étant des constantes que l'on calculera.
 b- Etudier la limite de g quand x tend vers $+\infty$; $-\infty$ et 1 .
 c- Etudier les variations de g .
- 3) a- Soit le polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - x^2 - x + 10$. Montrer que -2 est un zéro de P .
 b- Trouver un polynôme Q tel que pour tout réel x : $P(x) = (x + 2)Q(x)$
 c- En déduire les points d'intersections des courbes (C_f) et (C_g) représentant les fonctions f et g .
- 4) a- Construire dans un même repère, les courbes (C_f) et (C_g)
 b- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$$

On désigne par D_f l'ensemble de définition de f et par (C_f) sa représentation graphique.

- 1) a- Etudier le sens de variation de f .
b- Préciser l'asymptote verticale à (C_f) .
c- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C_f) .
d- Construire (C_f) .
- 2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes à (C_f) est un centre de symétrie pour (C_f) .

Exercice 3

PARTIE I

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. L'unité est le centimètre. On considère la fonction polynôme U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) = 0$.
- 2) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE II

Soit la fonction rationnelle h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ et de représentation graphique (C_h) .

- 1) a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h sous forme de réunion d'intervalle.
b- Calculer les limites aux bornes de D_h .
c- Justifier que la courbe (C_h) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.
- 2) a- Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x élément de D_h : $h(x) = ax + b + \frac{c}{2 - x}$.
b- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (C_h) .
- 3) a- Montrer que pour tout x élément de D_h , $h'(x) = \frac{U(x)}{(2 - x)^2}$.
b- Déduire de la partie I, le sens de variation de h .
c- Dresser le tableau de variation de h sur D_h .
- 4) Etudier la position relative de (C_h) et (D) .
- 5) Démontrer que le point $E(2; -5)$ est un centre de symétrie pour (C_h) .
- 6) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_h) au point d'abscisse 0.
- 7) Construire (C_h) .