

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE N°1 (2 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée. Écris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de Vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de Faux lorsque l'affirmation est fausse.

Ex : 5- Faux

N°	AFFIRMATIONS
1	La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est la limite en $+\infty$ du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
2	(D) est une droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) et h est une fonction rationnelle. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite (D) est asymptote oblique à la courbe représentative de h en $-\infty$
3	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
4	Toute fonction polynôme est définie sur $] -\infty; +\infty [$
5	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

EXERCICE N°2 (2 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée. Pour chaque ligne du tableau ci-dessous trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est juste pour chaque énoncé. Écris sur ta copie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse juste. Ex : 5-B

N°	Énoncés	Réponses		
		A	B	C
1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ est égale à : >	$-\infty$	$+\infty$	0
2	Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$ Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times g)(x) = \text{-----}$	$-\infty$	2	$+\infty$
3	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$	$-\infty$	$+\infty$	-2
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 7x + 6)$ est égale à :	$+\infty$	$-\infty$	6

5	Si P est un polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ alors son discriminant est égal à :	$\Delta = b - 4ac$	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = b^2 + 4ac$
---	---	--------------------	----------------------	----------------------

EXERCICE N°3 (4 points)

1) Calcule les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 3) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x - 10) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 2} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = \infty$

2) Donne l'interprétation graphique des limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x+2} = -\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x+2} = \frac{3}{2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$

EXERCICE N°4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est égale à 1 cm.

On donne la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Interprété graphiquement le résultat obtenu.

2. On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

a) Démontre que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x-1)^2}$.

b) Justifie que pour tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

c) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

3. a) Justifie que tout élément x de l'intervalle $]1; +\infty[$, $f(x) = x - \frac{6}{x-1}$.

b) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

c) Justifie que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur $]1; +\infty[$.

4. a) Calcule $f(3)$.

b) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

c) Représente dans le repère (O, I, J) la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe (C).

EXERCICE N°5 (5 points)

Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 18 portables. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de francs de x portables est donné par :

$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400$. La recette de la vente de x téléphones portables est donnée par :

$R(x) = 480x - 20x^2$.

L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal. En tant que stagiaire dans cette entreprise, le Directeur te demande de déterminer le nombre de téléphones portables à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal. En utilisant tes connaissances sur l'étude des fonctions polynômes proposent une solution au Directeur.