



MATHÉMATIQUES



Lycée Sainte Marie de Cocody

SERIE A₁

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2. Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (4,5 points)

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 6x^3 - 37x^2 + 37x - 10$.

1°. a) Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$. Interpréter le résultat.

b) Déterminer le quotient Q de P par $2x - 1$.

c) Vérifiez que $Q(x) = (x - 5)(3x - 2)$.

d) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$.

2°. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geq 0$.

3°. Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{R}$ de :

a) L'équation : $6(\ln x)^3 - 37(\ln x)^2 + 37(\ln x) - 10 = 0$.

b) L'inéquation : $6e^{2x} - 37e^x + 37 \geq 10e^{-x}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans une classe d'un collège mixte doté d'un internat, on considère un groupe de 11 élèves. Parmi ces élèves, il y a 4 garçons dont 2 sont des externes. Ce groupe d'élèves compte 3 filles internes. **Tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés sous forme de fractions irréductibles.**

1°. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Internes	Externes	Total
Filles	3		
Garçons		2	4
Total			11

2°. Sur quatre cartons identiques, on écrit les mots de l'adage « SEUL LE TRAVAIL PAIE ». Chaque carton contient un unique mot. On désigne au hasard, l'un après l'autre, 4 élèves de ce groupe pour tenir dans l'ordre de désignation un carton et écrire ainsi l'adage.

On considère les événements suivants :

A : « les cartons sont tenus uniquement par des filles externes ».

B : « les cartons sont tenus par autant de filles que de garçons ».

C : « les cartons sont tenus par autant de fille(s) interne(s) que de garçon(s) interne(s) ».

D : « parmi les 4 désignés, il y a exactement une fille et un garçon internes ».

E : « parmi les 4 désignés, il y a exactement un garçon et une fille interne ».

a) Calculer la probabilité $P(A)$ de l'événement A.

b) Montrer que $P(B) = \frac{21}{55}$ et $P(C) = \frac{18}{55}$.

c) Calculer $P(B \cap C)$ et en déduire que $P(B \cup C) = \frac{7}{10}$.

d) Calculer la probabilité des événements D et E.

3°. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque distribution de cartons, associe le nombre de filles internes parmi les 4 désignés.

a) Déterminer les valeurs de X et Montrer que $P(X=1) = \frac{252}{495}$ et $P(X=2) = \frac{126}{495}$.

b) Etablir la loi de probabilités de X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et montrer que $E(X) = \frac{12}{11}$.

d) Calculer l'écart type de X.

PROBLEME (10,5 points)

Partie A

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1°.a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

2°.a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (C).

b) Étudier la position relative de la droite (D) par rapport à la courbe (C).

3°.a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$ où f' est la dérivée de la fonction f .

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $f'(x) = 0$.

c) Étudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d) Etablir le tableau de variations de la fonction f .

4°.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans $\mathbb{R}$. α étant la solution positive.

b) Vérifier que $1 < \alpha < 2$. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} . On prendra $\beta = -1,92$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

5°. Soit (L) la droite d'équation $-2x + 2y - 3 = 0$.

a) Déterminer le coefficient directeur de (L) puis l'abscisse du point de (C) où la tangente (T) est parallèle à (L).

b) Donner une équation de (T).

6°. Tracer les droites (D), (T) et (L) ainsi que la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

Partie B

1°.a) Déterminer les primitives F de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire la primitive G de f prenant la $(\ln 2)^2$ en $\ln 2$.

2°.a) Hachurer la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3\ln 2$.

b) Calculer en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.