SIMILI BACCALAUREAT
Session de février 2018

Durée : 3 heures
Coefficient : 3

MATHEMATIQUES

SERIE : A1

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

1. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$.
   Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (2x - 1)(x^2 - 3x - 4)$
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\ln x + \ln(2x - 7) = \ln(5x - 4)$
3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) \geq 0$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln x + \ln(2x^2 - 7x + 5) \geq \ln(5x - 2) + \ln 2$.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2(\ln x)^3 - 5\ln x \geq 7(\ln x)^2 - 4$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^x - 7 \geq 5e^{-x} - 4e^{-2x}$.

EXERCICE 2

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 vertes, 2 jaunes et une rouge.
Un joueur mise une somme S (en CFA) et tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne ($S \in]0 ; +\infty[$).
(*On calculera les probabilités sous forme de fractions irréductibles*)

Partie A

1. Justifier que la probabilité de l'événement A : "Obtenir 2 boules vertes et une boule jaune" est $\frac{5}{14}$.
2. Justifier que la probabilité de l'événement B : "Obtenir 3 boules de même couleur" est $\frac{5}{28}$.
3. Justifier que la probabilité de l'événement C : "Obtenir 3 boules de 3 couleurs différentes" est $\frac{5}{28}$.
4. Calculer la probabilité de l'événement D : "Obtenir 3 boules de 2 couleurs différentes".

Partie B

- Le joueur reçoit 1500 CFA par boule verte obtenue ;
- Le joueur paye 1400 CFA par boule jaune obtenue ;
- Le joueur paye 2300 CFA par boule rouge obtenue.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique en CFA du joueur à la fin du tirage.

1. Justifier que les valeurs prises par X sont : -5100-S, -2200-S, -1300-S, 700-S, 1600-S et 4500-S.
2. a) Justifier que : $P(X = 1600\text{-}S) = \frac{5}{14}$

   b) Justifier que : $P(X = 4500\text{-}S) = \frac{5}{28}$

   c) Justifier que : $P(X = -2200\text{-}S) = \frac{5}{28}$
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. a) Justifier que : $E(X) = -(S - 900)$

   b) Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs de S pour lesquels le jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 3

Partie A

On donne la fonction g définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} - \frac{e}{4}$.

1. Vérifier que : $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$.
2. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $]-1 ; +\infty[$.
3. Calculer g(1). En déduire que : $\begin{cases} \forall x \in]-1 ; 1[, & g(x)<0 \\ \forall x \in]1 ; +\infty[, & g(x)>0 \end{cases}$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). OI = 2cm.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

La fonction f est dérivable en tout point de son ensemble de définition.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, à gauche en -1, à droite en -1 et en $+\infty$.
2. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$.
3. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
4. Soit h la fonction définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - (\frac{e}{4}x + \frac{e}{4})$.

   a) Vérifier que : $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $h'(x) = g(x)$.
   b) Etudier le sens de variation de la fonction h.

   c) Déduire de ce qui précède que : $\forall x \in]-1 ; +\infty[$, $f(x) \geq \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$.
5. a) Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$.

   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (T) sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.
6. Tracer (T) et (C) sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 2]$.
7. a) Interpréter graphiquement l'intégrale $K = \int_0^1 f(x)dx$.

   b) En utilisant l'aire, en unité d'aire, du rectangle de base [OI] et de hauteur f(0) et l'aire, en unité d'aire, du rectangle de base [OI] et de hauteur f(1), Justifier que : $1 \leq K \leq \frac{e}{2}$.

