EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Démontrer que la droite (D) : x = 1, est un axe de symétrie de (C).
2. Trouver les coordonnées des points d'intersection de (C) et chacun des axes du repère.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Justifier que la droite (T_4) : $y = -\frac{3}{2}x + 6$, est tangente à (C) au point d'abscisse 4.

   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (T_4).
5. a) Trouver une équation de la droite (T_{-2}) tangente a (C) au point d'abscisse -2.

   b) Résoudre, dans ℝ, l'inéquation : $f(x) \leq \frac{3}{2}x + 3$. Quelle en est la conséquence sur (C)
6. Tracer les droites (T_{-2}) et (T_4) puis construire (C) dans le même repère que (T_{-2}) et (T_4)

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 2$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Démontrer que le point K(0 ; -2) est un centre de symétrie de (C).
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Démontrer que f est strictement décroissante (sur ℝ) puis dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation, f(x) = 0, admet une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 2].

   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
5. Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[, & f(x)<0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & f(x)>0 \end{cases}$. Interpréter graphiquement ce résultat.
6. a) Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation : y = x - 2.

   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (T).
7. Tracer (C) et (T) dans un même repère orthonormé (O;I;J).

EXERCICE 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Demontrer que le point K(-1 ; -1) est un centre de symétrie de (C).
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation : f(x) = 0, a dans l'intervalle [0 ; +∞[une unique solution α.

   b) Justifier que : $0,53 \leq \alpha \leq 0,54$
5. Démontrer que l'équation : f(x) = 0, admet dans l'intervalle [-2 ; 0] une unique solution β comprise entre -0.66 et -0.65.
6. a) Démontrer que l'équation : x∈[-3 ; -2], f(x) = 0, admet une unique solution γ.

   b) Donner une valeur approchée de α par défaut à 10^{-2} près.
7. a) Vérifier que pour tout x élément de ℝ, $f(x) - (3x + 2) = -(x + 1)^3$.

   b) Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 a pour équation : y = 3x + 2.

   c) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (T).
8. Tracer la droite (T) puis construire la partie de (C) relative à l'intervalle [-3,5 ; 1,5], [prend une page entière, placer la droite (OI) suivant la largeur et au milieu de la longueur].

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{-x^2+3x-3}{x-1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x-1}$.
2. Démontrer que le point A(1 ; 1) est un centre de symétrie de (C).
3. Etudier la position de (C) par rapport à la droite (OI).
4. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) = \frac{-x(x-2)}{(x-1)^2}$.
6. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
7. a) Justifier que la droite (D) : y = x - 1. est une asymptote à (C) en +∞ et en -∞.
   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D).
8. Tracer la droite (D) puis construire (C) avec soin.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = \frac{2x^2+7x-2}{4x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{2x-1}$.
2. Démontrer que le point $K(\frac{1}{2} ; \frac{9}{4})$ est un centre de symétrie de (C).
3. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$, $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-1)^2}$.
5. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
6. Justifier que la droite (D) : $y = \frac{x}{2} + 2$, est une asymptote à (C) en +∞ et en -∞.
7. Tracer la droite (D) puis construire (C) avec soin.

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

1. Démontrer que le point I est un centre de symétrie de (C).
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Justifier que la droite (D) : y = x - 1. est une asymptote à (C) en +∞ et en -∞.
   b) Résoudre dans ℝ l'équation : $f(x) \geq x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
5. Tracer la droite (D) puis construire (C) avec soin.

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 1cm.

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

1. Justifier que le point A(-1 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe représentative (C) de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. a) Justifier que la droite (D) : y = -x + 1, est une asymptote à (C) en +∞ et en -∞.
   b) Etudier la position relative de (C) et (D).
5. Tracer (C) et (D) dans un même repère orthonormé (O;I;J).