  Lycée Classique d'Abidjan

Mathématiques – Devoir de niveau n°4 – 2ème trimestre | Durée : 2H10 | Coefficient : 2

EXERCICE 1 (6 points)

M. ZANLI (Auteur Compositeur)

On considère l'inéquation (I) : $x\in\mathbb{R}$, $\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \geq \ln\left(\frac{x+2}{3x+2}\right)$.

Pour chaque question, une seule des réponses (des cases) Vrai et Faux est exacte. Reproduis le tableau puis coche une seule case par question. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1,5 point. Une réponse inexacte, une absence de réponse, une réponse avec une tache ou une rature ou du blanco ou une réponse ambiguë rapporte 0 point.

	(Ce n'est pas une loterie)	Vrai	Faux
1.	L'inéquation (I) a pour ensemble de validité $]-\infty\,;-2[\cup]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$		
2.	$\forall x\in]-\infty\,;-2[\cup]-\frac{1}{2}\,;+\infty[$, $\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{3x+2} = \frac{5x^2+3x}{(x+2)(3x+2)}$		
3.	L'inéquation $x\in\mathbb{R}$, $5x^2+3x-2\geq 0$, a pour ensemble de solutions $[-1\,;\frac{2}{5}]$		
4.	L'inéquation (I) a pour ensemble de solutions $[\frac{2}{5}\,;+\infty[$		

EXERCICE 2 (14 points)

Partie A

On considère la fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)\geq 0$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique : 2cm.
On considère la fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x - 2x - 2$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O,I,J).

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Démontrer que l'équation : $x\in]-\infty\,;\ln 2]$, $f(x) = 0$, admet une unique solution α comprise entre -0,77 et -0,76. Interpréter graphiquement ce résultat.
4. a) Démontrer que l'équation : $x\in[1\,;2]$, $f(x) = 0$, admet une unique solution β.
   b) Donner un encadrement de β d'amplitude 0,1.
5. a) Justifier que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = -x - 1$.
   b) Justifier que (C) est au-dessus de la droite (T).
6. a) Démontrer que la droite (D) : $y = -2x-2$, est une asymptote à (C) en $-\infty$.
   b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D).
7. Tracer (D), (T) et (C) sur $]-\infty\,;2{,}5]$.
8. a) Interpréter graphiquement l'intégrale $K_t = \int_t^{\alpha}(f(x)-(-2x-2))dx$, $(t<\alpha)$
   b) Calculer K_t et $\lim\limits_{t\to-\infty} K_t$.
9. On donne le domaine $\mathfrak{D}$ du plan défini par les points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} x\leq\alpha \\ -2x-2\leq y\leq f(x)\end{cases}$

   et on note $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de ce domaine.
   a) Hachurer le domaine $\mathfrak{D}$.
   b) Justifier que : $\mathcal{A} = 8\alpha + 8$.