SIMILI BACCALAUREAT
Session d'avril 2017

Durée : 3 heures
Coefficient : 4

MATHEMATIQUES

SERIE : B

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$.

1. a) Démontrer que si un complexe z est une solution de (E) alors -z est aussi une solution de (E).

   b) Démontrer que si un complexe z est une solution de (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est aussi une solution de (E).

2. On donne l'équation : (E') : $Z \in \mathbb{C}$, $Z^2 - 4Z + 16 = 0$.
   On note Z_1 et Z_2 les solutions de (E') telles que $\mathrm{Im}(Z_1) < 0 < \mathrm{Im}(Z_2)$.
   a) Calculer Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

   b) Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

3. Soit P le nombre complexe tel que : $|P| = 2$ et $\mathrm{Arg}(P) = \frac{\pi}{6}$.

   Vérifier que : $Z_2 = P^2$. En déduire que P est une solution de (E).

4. a) Exprimer les 4 solutions de l'équation (E) en fonction de P.

   b) Ecrire les 4 solutions de l'équation (E) sous forme algébrique.

EXERCICE 2

Un jeu consiste à lancer au hasard trois fois de suite un dé cubique équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note successivement le numéro de la face supérieure.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir 3 numéros 2 à 2 distincts est $\frac{5}{9}$.
2. Justifier que la probabilité d'obtenir exactement 2 numéros identiques est $\frac{5}{12}$.
3. Calculer la probabilité d'obtenir 3 numéros identiques.
4. Calculer la probabilité d'obtenir 3 numéros dont la somme est égale à 9.
5. Un joueur mise 325 CFA et participe au jeu.
   - Si le joueur obtient 3 numéros 2 à 2 distincts il paye 360 CFA ;
   - Si le joueur obtient exactement 2 numéros identiques, il reçoit 1080 CFA ;
   - Si le joueur obtient 3 numéros identiques, il reçoit 2700 CFA.

   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur à la fin du jeu.
   (*Gain algébrique d'un joueur = Somme reçue - la mise*).

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie.
d. Que signifie la valeur du gain moyen du joueur.

EXERCICE 3

Partie A

On donne la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1 - 2x)e^{1-x}$.

$g(1) = 0$ et $g(\frac{3}{2}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$

1. Justifier que : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$.
2. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (2x - 3)e^{1-x}$.
3. Justifier que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{3}{2} ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
4. a) Démontrer que l'équation : $x \in [2 ; 3]$, $g(x) = 0$, admet une unique solution α.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
5. Justifier que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[\cup]\alpha; +\infty[, & g(x) > 0 \\ \forall x \in]1 ; \alpha[, & g(x) < 0 \end{cases}$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O;I;J). OI = 2cm.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (2x + 1)e^{1-x}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O;I;J).

$f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{2\alpha - 1}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Justifier que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ).
3. a) Justifier que la droite (D) : $y = x - 1$, est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   b) Trouver les coordonnées du point d'intersection de (C) et (D).
4. a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
   b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
5. Tracer (D) et (C) dans le même repère (O;I;J)
   [On prendra : $\alpha = 2{,}25$ et $f(\alpha) = 2{,}82$].
6. On note $\mathcal{A}(t)$ l'aire en unité d'aire du domaine du plan limité par (C), la droite (D), la droite (OJ) et la droite d'équation : $x = t$ ($t \in]0 ; +\infty[$).
   a) Justifier à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathcal{A}(t) = 3e - (2t + 3)e^{1-t}$.
   b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathcal{A}(t)$.

