BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2020 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :
$a = 2 - 2i$, $b = 2 + 2i$ et $c = -2 + 2i$.

1. *a*) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.
   b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   c) Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes a, b et c.

2. Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$ et (Γ) le cercle de centre Ω d'affixe 2 et de rayon 2.
   a) Détermine l'application complexe associée à la rotation r.
   b) Déduis de ce qui précède $r(B)$.
   c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image (Γ') de (Γ) par r.
   d) Construis (Γ) et (Γ') sur la même figure.

3. Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2\pi[$, tel que : $\alpha \neq \pi$. On note M le point d'affixe z telle que $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$ et M' l'image de M par r. On note z' l'affixe de M'.
   a) Démontre que M est un point de (Γ).
   b) Démontre que : $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$.
   c) On note u et v les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
   Exprime u et v en fonction de α.

4. *a*) Démontre que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^{2ix} + 1 = 2e^{ix}\cos x$ et $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix}\sin x$.
   b) Démontre que : $\dfrac{u}{v} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$.
   c) Déduis de ce qui précède que les points M, M' et B sont alignés.

5. On donne : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.
   a) Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
   b) Construis les points M et $r(M)$.

EXERCICE 2

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.
On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

16

$\frac{C_{20}^{8} \times C_{20}}{C_{20}^{5}}$

1. Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours.
   Exprime en fonction de k la note globale N de ce candidat.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
   a) Détermine les valeurs prises par X.
   b) Démontre que : $P(X = 3) = \frac{45}{512}$.
   c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est : $\frac{53}{512}$.

k	N = 4k
0	N = 0
1	N = 4
2	N = 8
3	N = 12

20 − 18
8

3. On suppose qu'à ce concours, n candidats ont répondu au hasard aux cinq questions.
   On admet que lorsqu'un des n candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.
   a) Justifie que la probabilité P_n qu'au moins un des n candidats ait une note globale supérieure à 10 est : $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$.
   b) Détermine la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0{,}99$.

$\Omega(X) = \{20, 16, \ldots$

PROBLÈME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1 - x)^n e^{\frac{x}{2}}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite (S_n) définie par :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

<u>Partie A</u> : Étude de la fonction f_1 et d'une fonction associée.

1. *a*) Calcule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
   b) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule la limite de f_1 en $-\infty$.
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que f_1 est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$ et strictement décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.
   b) Dresse le tableau de variations de f_1.
   c) Trace dans le repère (O, I, J), la courbe (C_1) et sa tangente à l'origine.

Partie B : Etude de la fonction f_n.

1. *a*) Détermine, suivant la parité de *n*, la limite de f_n en $+\infty$.
   b) Détermine, suivant la parité de *n*, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$.
   c) Interprète graphiquement les résultats précédents.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ *(On pourra poser : $X = 1-x$).*
   b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que pour tout entier naturel *n* non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontre que : $\forall x \in\mathbb{R},\ f_n'(x) = \dfrac{1}{2}(-x-2n+1)\,(1-x)^{n-1}\,e^{\frac{x}{2}}$.
   b) Étudie, suivant la parité de *n*, le signe de $f_n'(x)$.
   c) Dresse, suivant la parité de *n*, le tableau de variation de f_n.

4. *a*) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $f_n(x) = f_{n+1}(x)$.
   b) Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que l'on précisera.
   c) Étudie, suivant la parité de *n*, les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}).
   d) Trace la courbe (C_2) dans le repère (O, I, J).

Partie C : Calcul de la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Justifie que la fonction f_n est décroissante sur $[0\,;1]$.
2. Démontre que : $\forall\ x \in[0\,;1],\ f_n(x) \in[0\,;1]$.
3. Déduis de ce qui précède que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le S_n \le \dfrac{1}{n}$.
4. Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.