

Corrigé bac Série C 2010

➤ Exercice 1

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ en posant $t = e^{-x}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{1}{e^{n+1}} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ ou encore

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{e^{n+1}} U_n \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3) $U_1 = \ln(1 + e^{-1})$

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\ln(U_k) = f(1) + f(2) + \dots + f(k)$

On a : $\ln(U_{k+1}) = \ln(1 + e^{-k-1}) + \ln(U_k)$ donc $\ln(U_{k+1}) = f(1) + f(2) + \dots + f(k) + f(k+1)$

Par conséquent $\ln(U_n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

4) On utilise l'encadrement pour $n \geq 1$

$e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} < f(n) < e^{-n}$ la sommation membre à membre permet d'obtenir le

résultat : $a_n - \frac{b_n}{2} < \ln(U_n) < a_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$

c) $a_n < \frac{1}{e - 1}$ car $1 - e^{-n} < 1$ donc $U_n < e^{\frac{1}{e-1}}$, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée.

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc convergente.

d) $\lim(b_n) = \frac{1}{e^2 - 1}$

$\frac{2e + 1}{2(e^2 - 1)} \leq \ln(l) \leq \frac{1}{e - 1}$

$l \in [e^{0.5}, 1.6]$

➤ Exercice 2

1) Justification correcte du résultat $\text{card}(\Omega) = 6^3$ et $P_1 = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

2) On a : $6 = 1 + 1 + 4$ ou $6 = 1 + 2 + 3$ ou $6 = 2 + 2 + 2$

Le nombre de cas favorable est 10.

$C_3^2 + 3! + 1 = 10$ et $P_2 = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$

3) $P_3 = \frac{6 \times C_3^2 \times 5}{6^3} = \frac{6 \times 3 \times 5}{6^3} = \frac{5}{12}$

4-a) Les différentes valeurs de X : -3000 frs ; 0 frs ; 2000 frs

b)

$$P(X = -3000 \text{ frs}) = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 2000 \text{ frs}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 0 \text{ frs}) = \frac{A_6^3}{6^3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{20}{36}$$

$$\text{On encore : } P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{36} \right)$$

$$c) E(X) = \frac{-43000}{36} \approx -1.194,44. \text{ Le jeu n'est donc pas équitable}$$

➤ **Problème**

Partie A

$$1\text{-a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$b)(\Delta): y = \frac{-1}{3}x \text{ est asymptote en } +\infty$$

c) Position de (C) et (Δ)

$$x > 0, \zeta(x) = f(x) - \left(\frac{-1}{3}x \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{15}{\sqrt{x^2 + 15} + x} \right) \text{ et pour } x > 0, \zeta(x) > 0.$$

Position : (C) au dessus de (Δ).

2-a) dérivée

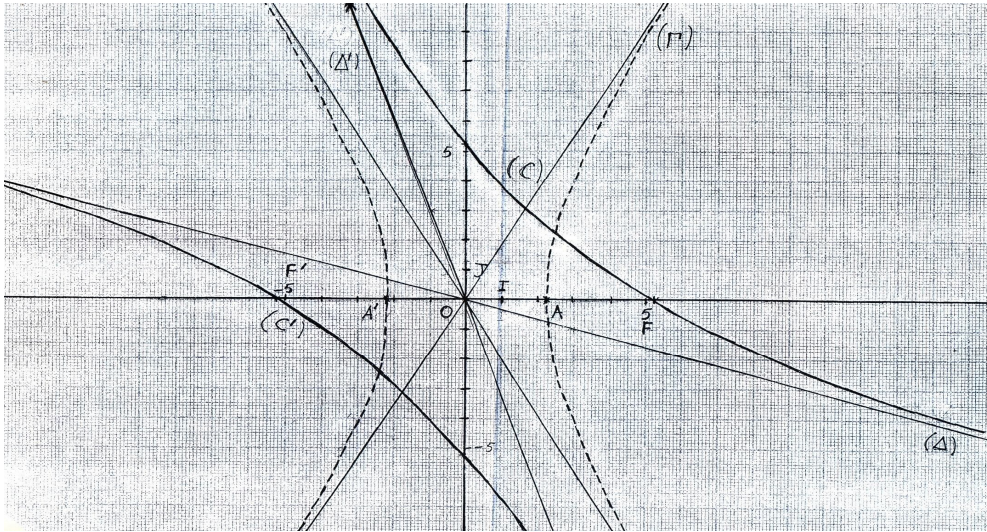
$$x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{3} \left(-5 + \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 15}} \right) \text{ ou } x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{4x - 5\sqrt{x^2 + 15}}{\sqrt{x^2 + 15}} \right)$$

b) Tableau et sens de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty \xrightarrow{\quad \searrow \quad} -\infty$	

$$3) \text{ Intersections } (C) \cap (OJ) \quad x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0 \text{ on obtient le point de coordonnées } \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}; 0 \right)$$

4-a) Construction (Voir repère)



b) Preuve

On montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -g(x)$ ou $f(-x) = -g(-x)$

c) Construction de $(C') : (C') = S_0(C)$

Partie B

$$(H) : 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$$

1) Démonstration

$$M(x; y) \in (C) \cap (C') \Leftrightarrow y = f(x) = \frac{1}{3}(-5x + 4\sqrt{x^2 + 15}) \text{ ou}$$

$$M(x; y) \in (C) \cap (C') \Leftrightarrow y = g(x) = \frac{1}{3}(-5x - 4\sqrt{x^2 + 15}) \Leftrightarrow (3y + 5x)^2 = 16(x^2 + 15) \text{ on obtient après développement } 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$$

2) Similitude : Centre O, rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et angle $\frac{-\pi}{4}$

a) Ecriture Complexe : $S : z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} z = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) z$

b) expression analytique : on obtient

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + y) \end{cases}$$

c) **Méthode 1**

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$$

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow 3(x' - y')^2 + 3(x' + y')^2 + 10(x' - y')(x' + y') - 80 = 0$$

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow 4x'^2 - y'^2 = 20$$

Méthode 2

$$M'(x'; y') \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4x'^2 - y'^2 = 20$$

$$M'(x'; y') \in (\Gamma) \Leftrightarrow 4 \left[\frac{1}{4}(x+y) \right]^2 - \left[\frac{1}{2}(-x+y) \right]^2$$

$$\text{On obtient } 3x^2 + 3y^2 + 10xy - 80 = 0$$

3-a) Justification – caractérisation

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1 \quad (\text{Équation réduite})$$

Foyers $F(5;0)$ et $F(-5;0)$

Sommets $A(\sqrt{5};0)$ et $A'(-\sqrt{5};0)$

b) Excentricité

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ avec } a^2 = 5 \text{ } b^2 = 20 \text{ d'où } c = 5 \text{ de plus } e = \frac{c}{a} \text{ donc } e = \sqrt{5}$$

c) Construction (Voir repère)

4) Dédution

(H) Image réciproque de (Γ) par S , donc (H) est une hyperbole

Foyers $F(5;5)$ $F'(-5;-5)$

Sommets $A_H(\sqrt{5};\sqrt{5})$ $A'_H(-\sqrt{5};-\sqrt{5})$