Baccalauréat Session 2010 Mathématiques Série C

- ***Exercice 1***

On se propose d'étudier la suite (U_n) de nombres réels, définie par : $U_1 = 1+\frac{1}{e}$ et pour tout entier naturel non nul $n, U_{n+1} = \left(1+\frac{1}{e^{n+1}}\right)U_n$

Dans cet exercice, on admettra que pour tout nombre réel t strictement positif, on a :

$t-\frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t$ (1).

Soit f la fonction numérique dérivable sur R et définie par : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$

1- En utilisant l'inégalité (1), justifier que : $\forall x \in R, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} < f(x) < e^{-x}$

2- Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissance.

3- Démontrer par récurrence que : $\forall n \in N^*, \ln(U_n) = f(1) + f(2) + ... + f(n)$

4- On pose : $a_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... \frac{1}{e^n}$ et $b_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + ... \frac{1}{e^{2n}}$

a) A l'aide des questions 1) et 3), démontrer que : $a_n - \frac{1}{2}b_n < \ln(U_n) < a_n$

b) Justifier que : $\forall n \in N^*, a_n = \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

c) Démontrer que la suite (U_n) est majorée.
En déduire que la suite (U_n) est convergente.

d) On note l la limite de la suite (U_n).
Démontrer que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$ puis en déduire une valeur approché de l à 0.1 près

- ***Exercice 2***

Un jeu consiste à lancer trois fois un dé cubique équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure :

1- Démontrer que la probabilité d'obtenir 3 identiques est $\frac{1}{36}$.

2- Calculer la probabilité d'obtenir 3 chiffres dont la somme est égale à 6.

3- Démontrer que la probabilité d'obtenir exactement deux chiffres identiques est $\frac{5}{12}$

4- Le droit de participation au jeu est de 3.000 francs.
   - si le joueur obtenir 3 chiffres identiques, il reçoit 5000 francs ;
   - s'il obtient 3 chiffres deux à deux distincts, il reçoit 3000 ;
   - s'il obtient exactement deux chiffres identiques, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur au cours d'une partie. On appelle gain algébrique d'un joueur la différence entre ce qu'il reçoit et sa mise :

a) Déterminer les valeurs prises par X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Déterminer le gain moyen d'un joueur au cours d'une partie. Le jeu est-il équitable?

- ***Problème***

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques dérivables sur R et définies pour tout réel x par :

$f(x)=\frac{1}{3}\left(-5x+4\sqrt{x^2+15}\right)$ et $g(x)=\frac{1}{3}\left(-5x-4\sqrt{x^2+15}\right)$

On note (C) et (C) les courbes représentatives des fonctions f et g.

1- a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{-1}{3}x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Justifier que la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ).

Dans la suite du problème, on admettra que la droite (Δ') d'équation $y=-3x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$ et que la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ').

2- a) calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Démontrer que f est strictement décroissant sur R, puis dresser son tableau de variation.

3- Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les droites (OI) et (OJ).

4- a) Construire (Δ), (Δ') et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O,I,J).

b) Démontrer que la courbe (C') est l'image de la courbe (C) par la symétrie de centre O.

c) Construire la courbe (C') dans le même repère que (C) .

Partie B

Dans cette partie, on admettra que l'image d'une hyperbole (H) de foyers F et F de sommes A et A' par une similitude directe s, est une hyperbole (H') de foyer s(F) et s(F'), de sommets s(A) et s(A').

On note (H) la courbe d'équation : $3x^2+3y^2+10xy-80=0$

1- Démontrer que $(H)=(C)\cup(C')$

2- Soit s la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

Soit x, x', y et y' des nombres réels. Pour tout point M d plan d'affixe $z=x+iy$ on note M' le point d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que $M'=s(M)$

a) Déterminer l'écriture complexe de s

b) Justifier que $x'=\frac{1}{2}(x+y)$ et $y'=\frac{1}{2}(-x+y)$

c) En déduire que M appartient à (H) si et seulement si M' appartient à la courbe (Γ) d'équation

3- a) Justifier que (Γ) est une hyperbole puis déterminer les coordonnées de ses foyers et de ses sommets.

b) Déterminer l'excentricité de

c) Construire et ses asymptotes dans le même repère que (H). *(On utilisera deux couleurs différents pour (H) et (Γ))*

4- Déduire des questions précédentes que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.