

CORRECTION MATHS BAC C 2012

Exercice 1 (4 points)

1. a) $9x + 7y = 1$

$$2x - 1 = -7(x + y) \longrightarrow 2x \equiv 1[7]$$

b) $S_{\mathbb{Z}} = \{7k + 4 ; k \in \mathbb{Z}\}$

c) Dédution

2. (E') : $9x + 7y = 200$

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(7k + 800 ; -9k - 1000) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

3. x = nbre d'hommes et y = nbre de femmes

$$900x + 700y = 20.000 \longrightarrow 9x + 7y = 200$$

$$x = 7k + 800 \text{ et } y = -9k - 1000, k \in \mathbb{Z}$$

$$x > 0, y > 0 \text{ et } x > y, \text{ donc } k \in \{-114 ; -113 ; -112\}$$

Donc on a : 16 hommes et 8 femmes

Exercice 2 (5 points)

1- $(\Gamma) : 3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

$$(\Gamma) : \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

(Γ) est donc une ellipse

2 - a)

Dans le repère $(K, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } F' \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

Dans le repère $(K, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A' \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

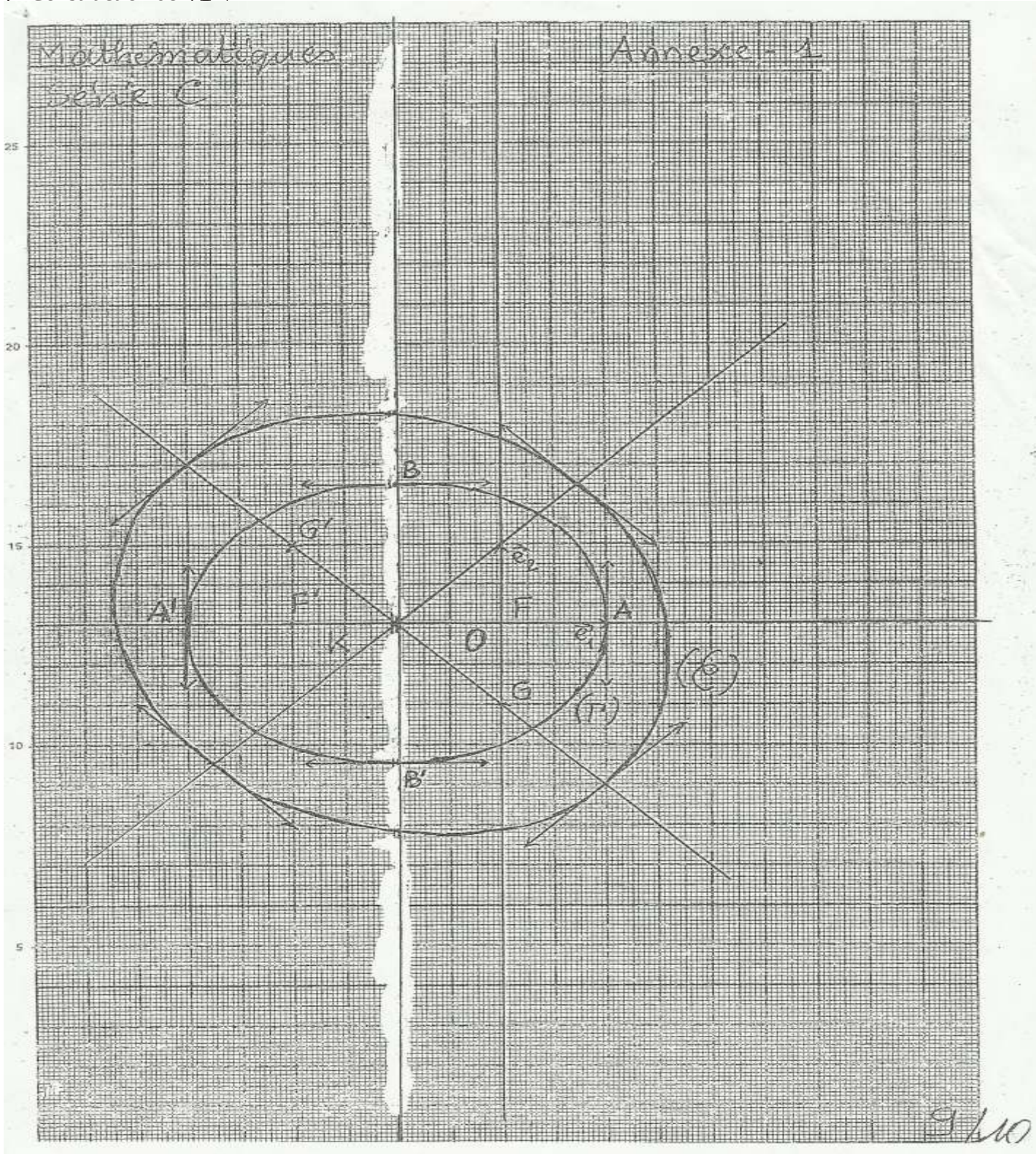
$$B \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B' \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A' \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } B' \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c) Construction de (Γ)



3. a) Construction de N
Construction de P

b) Rapport de S : $\sqrt{2}$; mesure de l'angle de S : $-\frac{\pi}{4}$

- c) (C) est une ellipse.
Construction de (C)
(Voir graphique ci-avant)

4.

- b) Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on a

$$G \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } G' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEME (11 points)

Partie A

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Interprétation

(C) Admet une branche parabolique de direction (OJ).

2) a) $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = x^2 - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 1}{x}$

b) Variations

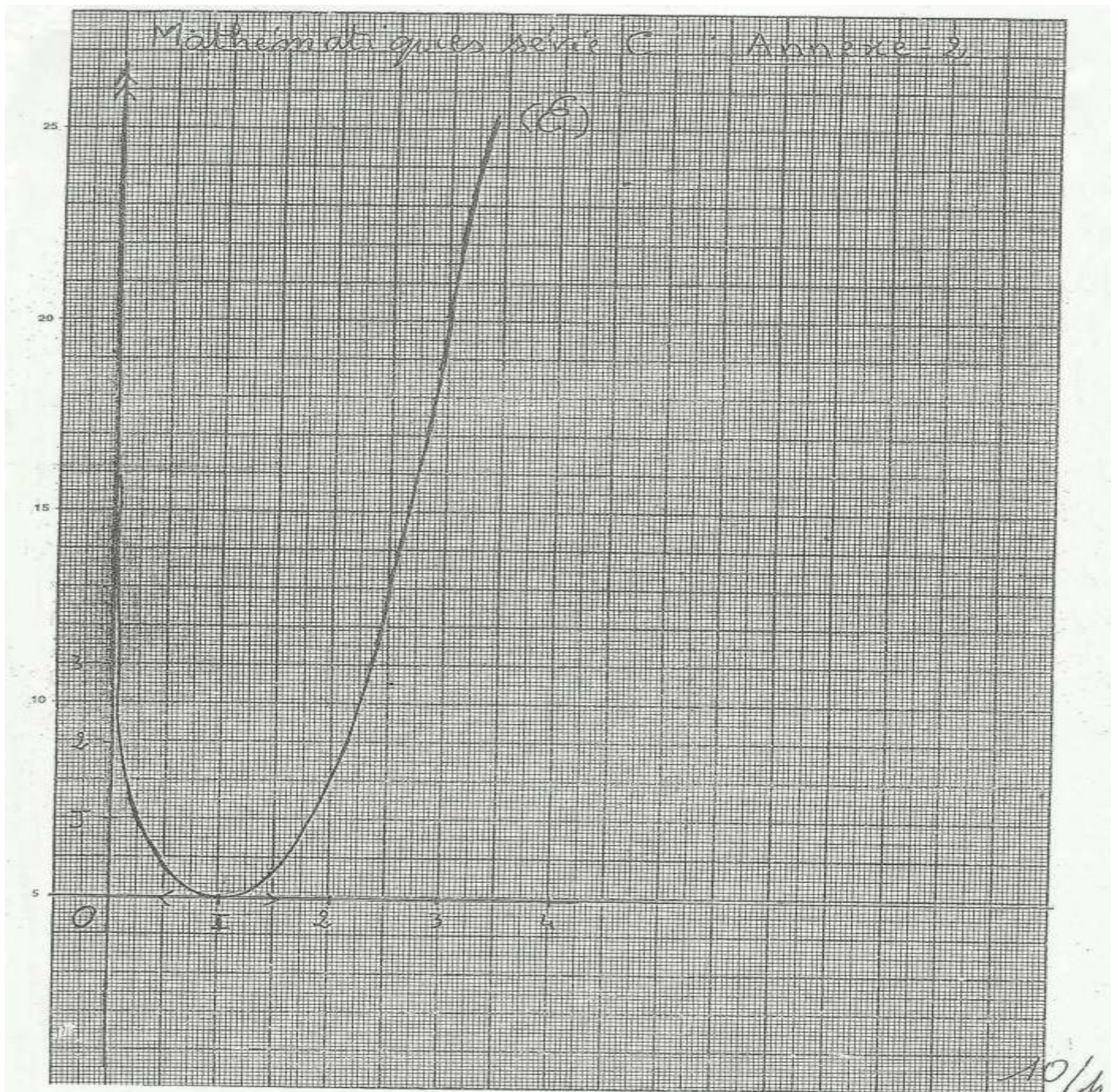
$$\forall x \in]0 ; 1] \quad f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est décroissante sur }]0 ; 1]$$

$$\forall x \in [1 ; +\infty[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est croissante sur } [1 ; +\infty[$$

c) Tableau de variations

x	0	—	1	+	$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗	
			0		$+\infty$

3) Construction



Partie B

$$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$1) \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \int_{\frac{1}{n}}^1 dt \iff \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t) dt = \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} - 1$$

$$2) \quad A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

a) **Interprétation**

A_n est l'aire de la portion du plan délimitée par (C), l'axe (OI) et les droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$

$$b) \quad A_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}\right) dt - \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t) dt$$

$$A_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{2n} - \frac{1}{12n^4} - \frac{\ln(n)}{n}$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4}$$

3)

$$a) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Pour } 1 \leq k \leq n-1 \\ t \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{on a } t \in [0 ; 1] \\ \text{et } f \text{ est décroissante sur }]0 ; 1] \end{array}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b)

On a :

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t) dt + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t) dt + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(t) dt$$

Donc par sommation membre à membre

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq A_n \leq \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

4) a) **Démonstration**

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{pour } t \in \left[\frac{1}{n} ; 1 \right] \quad f(t) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$A_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$

$$A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

b)

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \end{cases}$$

Théorème des “gendarmes”

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{3}{4}$$

Partie C

1. Démonstration par récurrence

$$\begin{aligned} n = 1 \quad \text{on a} \quad 1^3 &= \frac{1(1+1)^2}{2^2} \\ &= 1 \quad P(1) \text{ est vraie} \end{aligned}$$

Supposons que P(n) est vraie
Montrons que P (n+1) est aussi vraie.

P (n+1) :

$$\begin{aligned} &1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{[n(n+1)]^2}{2^2} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2 [n^2 + 4n + 4]}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \\ &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad P(n+1) \text{ est donc vraie pour tout } n \text{ non nul.} \end{aligned}$$

2)

a) Justification

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n}\right) &= \ln\left[\frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n}\right] \\ &= \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \end{aligned}$$

b)

$n \geq 2$ déduction

c) Déduction de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$$

3)

a) Justification

$$\ln(U_n) = \ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

b) Limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \frac{1}{e}$$