BACCALAURÉAT **Coefficient : 5**
SESSION 2012 **Durée : 4 h**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré à rendre avec la copie.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 F CFA pour les hommes et 700F CFA pour les femmes.
Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association.
Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000F CFA.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

1. On considère l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $9x + 7y = 1$.

a) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).
Démontrer que $2x \equiv 1\ [7]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $2x \equiv 1\ [7]$.

c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{(4 + 7k\ ; -5 - 9k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Résoudre l'équation (E ') : $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $9x + 7y = 200$.

3. En déduire le nombre d'hommes et le nombre de femmes de cette association.

EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ tel que $||\vec{e_1}|| = ||\vec{e_2}|| = 2cm$.
K est le point de coordonnées $(-1, 0)$.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.

1. Justifier que (Γ) est une ellipse.

2. *On note :*
- F' et F les foyers de (Γ) ;
- A' et A les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal. L'abscisse de A' est négative. B' et B sont les deux autres sommets de l'ellipse.

a) Justifier que les coordonnées respectives de F et F' dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ sont $(0\ ; 0)$ et $(-2\ ; 0)$.

b) Déterminer les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

c) Construire (Γ) dans le plan muni du repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

 Tournez la page S.V.P.

3. Soit M un point quelconque de (Γ).

a) Construire le point N tel que KMN soit un triangle rectangle isocèle en N de sens indirect puis, construire le point P symétrique de K par rapport à N.

b) Justifier que P est l'image de M par une similitude directe s de centre K dont on précisera le rapport et l'angle.

c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature.

Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points P lorsque M décrit (Γ).

4. *a*) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude directe s est $z' = (1-i)z - i$.

z étant l'affixe d'un point M quelconque du plan et z' l'affixe du point M', image de M par s.

b) On note G' et G les images respectives par s des foyers F' et F de (Γ).

Déterminer les coordonnées des points G' et G dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

c) Démontrer qu'une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ est :

$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$.

PROBLÈME

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie A

Soit f la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3} - \ln x$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique : 2cm.

1. *a*) Démontrer que la droite (OJ) est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ces résultats.

2. *a*) Calculer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0\,;+\infty[$.

b) En déduire les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Construire $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln t \, dt$.

2. On pose : $A_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$.

a) Interpréter graphiquement A_n.

b) Vérifier que $A_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3n} - \dfrac{1}{12n^4} - \dfrac{ln(n)}{n}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

3. *a*) Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n-1$.

Démontrer que : $\forall t \in [\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}]$, on a : $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] \leq A_n \leq \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

4. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right]$

a) Démontrer que : $A_n \leq S_n \leq A_n + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$.

Partie C

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$.

2. *a*) Justifier que pour tout entier naturel non nul n,

$ln\left(\dfrac{1}{n}\right) + ln\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + ln\left(\dfrac{n}{n}\right) = ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$S_n = \dfrac{1}{12n^4}\,[n(n+1)]^2 - \dfrac{1}{n}\, ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) - \dfrac{1}{3}$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\, ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right) = -1$.

3. *a*) Justifier que pour tout entier naturel non nul n,

$ln(u_n) = \dfrac{1}{n}\, ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.