



BAC BLANC
SESSION MAI 2017

Durée : 4h00
Coefficient : 5

SÉRIE C

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1/3 2/3 et 3/3

Exercice 1 :

1) soit $x = 3^{2n} - 2^n$, démontrer avec un raisonnement par récurrence que 7 divise x pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2) soit n un entier naturel

a) déterminer les restes possibles de la division euclidienne de n^4 par 5

b) démontrer que le nombre $y = n^5 - n$ est un multiple de 5

3) soit les nombres $a = 5265$ et $b = 3978$

a) déterminer le PGCD de a et b

b) résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations

$(E_1) : 5265x - 3978y = 350$ et $(E_2) : 5265x - 3978y = 351$

Exercice 2 :

Soit A et B deux points distincts du plan. On note O le milieu de $[AB]$.

On désigne par S la similitude de centre O , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On pose :

$C = S(B)$, $K = S(A)$ et $F = S(C)$.

1. Faire une figure à compléter par la suite.

2. Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A .

3. En déduire la nature du triangle KCF .

4. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CF]$.

On note S_I la similitude de centre I , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $P = S_I(C)$.

- a) Démontrer que : $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{IP}$ et que $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{PB}$.
- b) Démontrer en utilisant la question 2) que le triangle BCP est rectangle en B.
- c) Prouver que P est le milieu du segment [FB].
5. a) Dédire de la question 4) la nature du quadrilatère JPBI.
- b) Déterminer la nature du triangle JBC.
- c) Démontrer que les points F, K, B et C appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

Problème :

On considère la fonction numérique f dérivable et définie sur l'intervalle $] -1 ; 1[$

par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

(Unité graphique 2cm).

Partie A :

1. a) Calculer les limites de f en -1 et en 1 .
- b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a) Démontrer que : $\forall x \in] -1 ; 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
- b) En déduire le tableau de variation de f .
- c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x$.
- a) Déterminer le sens de variation de g .
- b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- c) Déterminer les positions relatives de (C) par rapport à (T).
4. Tracer dans le même repère (C) et (T).
5. a) Démontrer que f est une bijection de $] -1 ; 1[$ sur $\mathbb{R}$.
- b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative

de f^{-1} dans le repère (O, I, J) . Construis (C') .

c) Démontrer que : $\forall y \in \mathbb{R}, (f^{-1})(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$.

Partie B :

1. Soit F une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}$. (on ne cherchera pas à déterminer $F(x)$).

a) Démontrer que $F \circ f$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow xf'(x)$ sur $] -1 ; 1[$.

b) Démontrer que pour tous éléments a et b de $] -1 ; 1[$,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = F \circ f(b) - F \circ f(a)$$

c) En déduire que : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt$.

d) Démontrer que pour tout élément x de $] -1 ; 1[$

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t f'(t) dt. \text{ (On pourra utiliser B1-c)}$$

2.a) Démontrer que pour tout éléments x de $] -1 ; 1[$.

$$\int_0^x t f'(t) dt = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \text{ (On pourra utiliser A2 - a)}$$

b) En déduire que pour tout élément y de $\mathbb{R}$,

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right).$$

3. Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') et f^{-1} et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer A en unité d'aire.

4. a) Hachurer sur le graphique, l'ensemble D des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \text{ et } f^{-1}(x) \leq y \leq f(x).$$

b) Calculer l'aire de D en cm^2 .