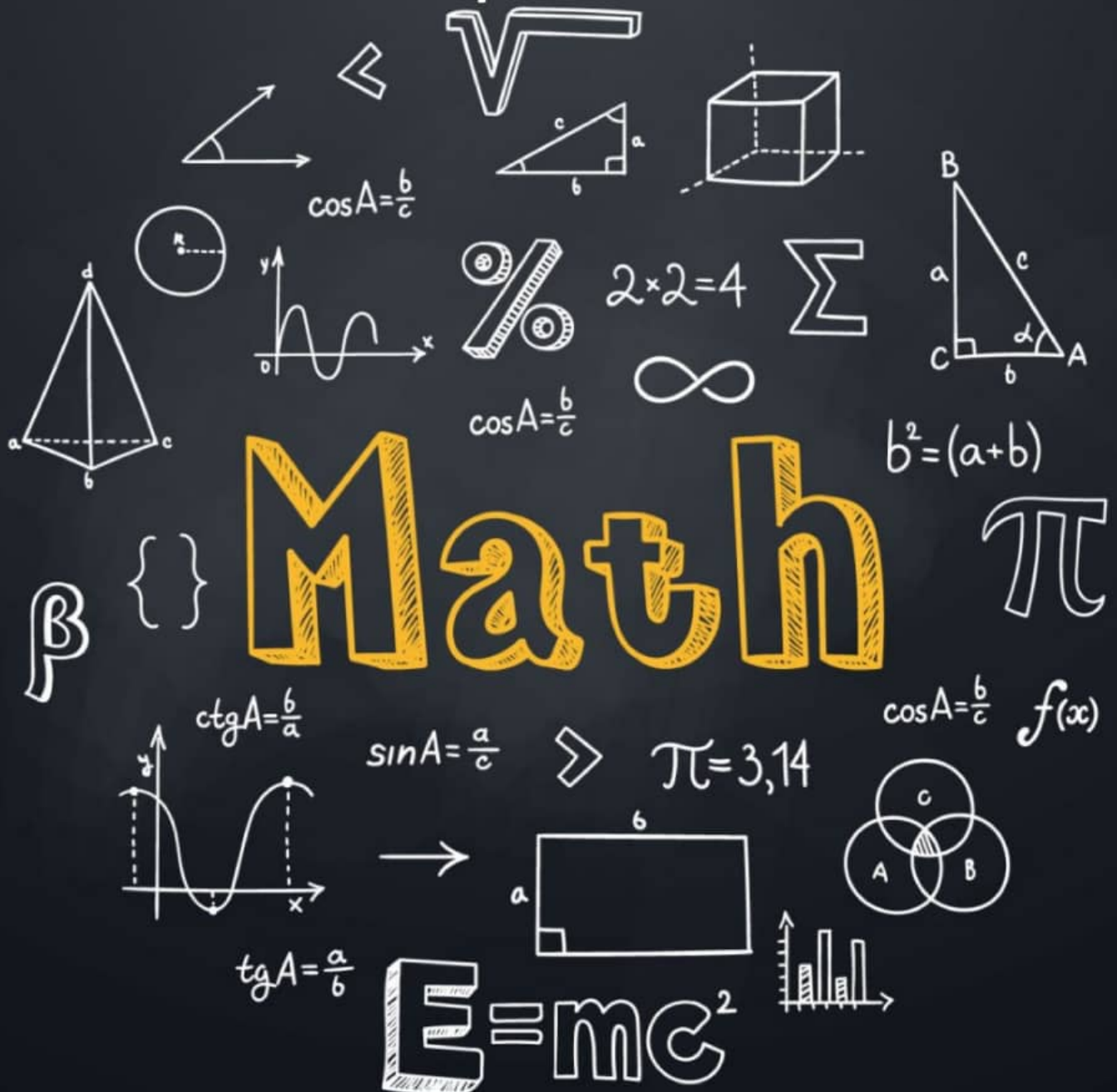


Mathématiques Bac-C_1982



edby0h

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nantes ∞

EXERCICE 1

4 points

Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros : a et b . On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire X associant à chaque paire de jetons tirés, a, b , le plus grand commun diviseur de a et de b .
 - a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Dédurre de la question précédente les probabilités des **événements** suivants :
A : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 1$ admet des solutions »,
B : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 2$ admet des solutions »,
C : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 12$ admet des solutions ».
2. On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note a et b , on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de quatre tirages successifs ?
 - b. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de n tirages successifs soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 2

4 points

Soit E_3 l'espace affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. f désigne l'application affine de E_3 définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' &= z. \end{cases}$$

Démontrer que f est une rotation affine; préciser son axe et une mesure de son angle.

2. On considère les quatre points :

$$A(2; 0; 0), \quad B(-1; \sqrt{3}; 0), \quad C(-1; -\sqrt{3}; 0), \quad D(0; 0; 4)$$

On pose $\mathcal{F} = \{A, B, C, D\}$.

- a. Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
 - b. Vérifier que l'application f laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
3. Soit g une isométrie affine de E_3 qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.

- a. Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D. Calculer

$$\|\overrightarrow{GA}\|, \|\overrightarrow{GB}\|, \|\overrightarrow{GC}\|, \|\overrightarrow{GD}\|.$$

- b. En déduire que g laisse invariant les points G et D.
 c. En déduire l'ensemble des déplacements de E_3 qui laissent $\mathcal{F}$ globalement invariant.
 4. Soit s un antidéplacement de E_3 qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
 a. Démontrer que s est associé à une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel; en déduire la nature géométrique de s .
 b. Quel est l'ensemble des isométries affines de E_3 qui laissent $\mathcal{F}$ globalement invariant?

PROBLÈME**12 points**

Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes

P est un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes; i est le nombre de complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Les affixes des points de P sont toujours données par rapport au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i \\ g(z) &= z^3 + 2 - 2i. \end{aligned}$$

Partie A

- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z) = 0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.
- Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel r , que l'on déterminera, qui vérifie $f(r) = 0$. Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

- Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$.
Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P.
- A, B, C sont les points de P dont les affixes respectives sont $-1+3i, 1+i, -4$. Déterminer l'abscisse du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4; 3; 5.
- On désigne par h l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Calculer $h(C)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\|MG\|^2$ et $h(G)$.

Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient $h(M) = 18$.

Partie B

À tout point M de P d'abscisse z on associe le point M' de P d'abscisse

$$f(z) - g(z).$$

1. Déterminer les coordonnées $(x' ; y')$ de M' dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M dans le même repère.
2. A, B, C sont les points définis en A 4. Donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de P tels que O, B et M' soient alignés. Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.
3. Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de P tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.
Démontrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra, par exemple, donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$.
4. Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, M' est confondu avec O. Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z).$$

En déduire les points communs à H_1 et H_2 .

Construire H_1 et H_2 dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie C

Un mobile du plan P a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t par

$$z(t) = f(t.i) + 10 - 6i,$$

quand t décrit l'intervalle $[0 ; 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t .

1. Déterminer les coordonnées $(x(t) ; y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t .
2. Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t .
3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$ du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$ de t .
4. Déduire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand t décrit $[0 ; 2]$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Pondichéry avril 1982 ∞

EXERCICE 1

On considère le nombre A qui s'écrit dans le système décimal : $A = \overline{xyxyxyxyx5}$, x et y étant des chiffres de ce système, x étant non nul.

1. À quelle condition ce nombre est-il divisible par 25 ?
2. Déterminer les différentes valeurs de A , telles que A soit divisible par 225.
3. On considère le nombre $B = \overline{xyxyxy}$ toujours écrit dans le système décimal avec x et y qui sont des chiffres, x étant non nul. Déterminer B tel que B soit divisible par 225.

EXERCICE 2

1. Soit φ la fonction numérique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = 1 + e^t + te^t.$$

Étudier les variations de φ . En déduire le signe $\varphi(t)$ suivant les valeurs de t .

2. On définit la fonction numérique f par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- b. Étudier les variations de f .

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f (on pourra poser $t = \frac{1}{x}$).

Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité de longueur étant 6 cm (on admettra que la courbe est au-dessus de l'asymptote).

PROBLÈME

Notations : E est un espace affine, $\vec{E}$ est son espace vectoriel associé. f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans E ; $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ sont les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2 .

Pour tout point M de E , on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$.

Étant donné deux réels α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de $f_1, f_2, \alpha_1, \alpha_2$ qui à tout point M de E associe le point $f(M)$, barycentre de M_1 affecté du coefficient α_1 et de M_2 affecté du coefficient α_2). On notera M' l'image par f du point M .

Partie A Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont deux éléments de E , f_1 est la translation de vecteur $\vec{V}_1$ et f_2 est la translation de vecteur $\vec{V}_2$.

Montrer que f est la translation de vecteur $\alpha_1 \vec{V}_1 + \alpha_2 \vec{V}_2$.

2. Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E , D' est une droite vectorielle de E distincte de la direction de D , $f_1 = \text{Id}_E$ et f_2 est la projection affine sur D de direction D' .
- Montrer que les points de D sont invariants par f .
 - Exprimer $\overrightarrow{M2M'}$, en fonction de α_1 et de $\overrightarrow{M2M}$. Dessiner l'image M' d'un point M par f dans le cas où $\alpha_1 = 2$. Quelle est l'application f dans le cas où $\alpha_1 = -1$?

Partie B

1. Soit O un point de E . Montrer que

$$\overrightarrow{O'M'} = \alpha_1 f_1(\overrightarrow{OM}) + \alpha_2 f_2(\overrightarrow{OM})$$

pour tout point M de E (on rappelle que M' désigne $f(M)$ et O' désigne $f(O)$). En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 , quelle est la nature de f (discuter)?
3. Dans cette question E est un plan affine.
- (A, B, C, D) est un parallélogramme de E ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), g est une application affine. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) :
 - Soit $(A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2)$ deux parallélogrammes ($\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$). (On suppose que (A_1, B_1, C_1, D_1) n'est pas aplati), montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que

$$f_2(A_1) = A_2, f_2(B_1) = B_2, f_2(C_1) = C_2, f_2(D_1) = D_2.$$

- Soit A', B', C', D' les barycentres respectifs de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) , (B_1, α_1) et (B_2, α_2) , (C_1, α_1) et (C_2, α_2) , (D_1, α_1) , (D_2, α_2) .
Montrer que (A', B', C', D') est un parallélogramme.

Partie C

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_1)$. À tout point M de E on associe son affixe z .

- Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de E . Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).
- f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport $k/ :$ ($k > 0$), de même angle θ , de centres respectifs A_1 et A_2 . Montrer que f est la similitude directe de rapport k , d'angle θ et de centre A barycentre de (A_1, α_1) et (A_2, α_2) .
- Soit un carré (A, B, C, D) ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et g une similitude directe. Montrer que $(g(A), g(B), g(C), g(D))$ est un carré tel que

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(g(A)g(B), g(A)g(D))}.$$

- (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}, \quad \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$$

et

$$\left(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_1 D_1} \right) = \left(\overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_2 D_2} \right).$$

Montrer qu'il existe une similitude directe f_2 telle que

$$A_2 = f_2(A_1), B_2 = f_2(B_1), C_2 = f_2(C_1), D_2 = f_2(D_1).$$

A', B', C', D' , étant définis comme dans B 3. c. montrer que (A', B', C', D') est un carré, éventuellement réduit à un point.

N.B. - Pour a. et b. l'usage des nombres complexes est déconseillé.

4. On se donne trois points A_1, A_2, B distincts.

M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{A_1 M_1} \right) = \omega t \quad (\omega \neq 0)$.

M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\overrightarrow{A_2 B}, \overrightarrow{A_2 M_2} \right) = \omega t$.

M' est le barycentre de (M_1, α_1) et (M_2, α_2) .

Quel est le mouvement de M' (utiliser la question C 2.)?

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C 1982 Amiens ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de E .

Soit φ l'endomorphisme de E défini analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{2}(-x + z\sqrt{3}) \\ y' &= -y \\ z' &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - z) \end{cases}$$

1. Montrer que φ est une isométrie de E .
2.
 - a. Chercher le sous-espace vectoriel U de E des vecteurs transformés par φ en leurs opposés. On en donnera une base.
 - b. Montrer que le sous-espace U' orthogonal de U est globalement invariant par φ . On en donnera une base.
 - c. Le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ étant supposé orienté par la base directe $(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$, préciser la restriction de φ à cette base.
3. En conclure qu'il existe deux isométries φ_1 et φ_2 de E que l'on caractérisera avec précision telles que

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

EXERCICE 2

4 points

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1.$$

Déduire de l'étude des variations de φ dans $\mathbb{R}^*$, celle du signe de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

- a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en zéro.
- b. Déterminer le tableau de variations complet de f dans $\mathbb{R}$ (on utilisera le 1 pour trouver le signe de $f'(x)$).
- c. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan affine euclidien.
Étudier la limite de $f(x) - \frac{x}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote et construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On représentera la courbe en choisissant, une unité de longueur égale à 5 cm).

PROBLÈME**12 points****Partie préliminaire**

1. (P) est un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit φ l'application de (P) dans (P) définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= y - 4 \\ y' &= x + 4. \end{cases}$$

Montrer que φ est une isométrie affine de (P) que l'on précisera.

2. On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \frac{(a+2)x}{x+2-a},$$

a étant un paramètre réel appartenant à $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$ et on appelle $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de f_a dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de (P).

- Montrer que, pour tout a de $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$, $(\mathcal{C}_a)$ est globalement invariante par φ .
- Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_a)$ passent par deux points indépendants de a .
- Étudier les variations de f_a et construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $(\mathcal{C}_{-1})$ et $(\mathcal{C}_{\frac{3}{2}})$. (On utilisera pour la représentation graphique une unité de longueur égale à 2 cm.)

Partie A

Soit ω_a le point de coordonnées $(a-2; a+2)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de (P) et les vecteurs : $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$.

- Montrer que $(\omega_a, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé de (P).
- Déterminer une équation de $(\mathcal{C}_a)$ dans le repère $(\omega_a, \vec{I}, \vec{J})$.
En déduire que $(\mathcal{C}_a)$ est une hyperbole équilatère (on notera A et A' les points d'intersection de l'hyperbole avec ses axes de symétrie; points appelés sommets de l'hyperbole).
- Soit D la droite d'équation $y = x + 4$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que par tout point M de D, à l'exclusion de points que l'on précisera, passe une courbe $(\mathcal{C}_a)$ unique.
 - Montrer que $(\mathcal{C}_a)$ a ses sommets sur D si et seulement si $|a| > 2$.
 - En déduire l'ensemble des points A et A' lorsque a varie dans $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
- On suppose ici $|a| < 2$.
Évaluer en fonction de a les distances $\omega_0\omega_a$ et ω_aA ; en déduire la distance ω_0A . Déterminer l'ensemble des points A et A' lorsque a varie dans $] -2; 2[$.

Partie B

Dans cette partie on suppose a élément de l'intervalle $I = [0; 2[$.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par U_0 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

On suppose que $U_0 \in [0; 2a]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_a(U_n)$.

On suppose que $U_0 \in [0 ; 2a]$.

En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est partout définie dans $\mathbb{N}$.

Que peut-on dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $U_0 = 0$ ou si $U_0 = 2a$?

2. On suppose que U_0 est différent de 0 et $2a$ (par suite a est différent de 0).

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n \neq 0 \text{ et } U_n \neq 2a)$.

b. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n}{U_n - 2a}$$

Montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de a .

Étudier l'existence et la valeur de la limite de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, en déduire l'existence et la valeur de la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

N. B. Les parties A et B sont indépendantes.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Poitiers ∞

EXERCICE 1

4 points

- En supposant que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers a et b d'une part; p et q d'autre part ont le même PGCD.
 - Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux. Quel est leur PPCM?
- Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de p .

EXERCICE 2

4 points

Un plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de déterminer l'ensemble E des points M de ce plan dont les affixes $z = x + iy$ (x et y réels) vérifient

$$|(1 + i)z - 2i| = 2.$$

Les deux questions proposent chacune une méthode et peuvent être résolues de façon indépendante l'une de l'autre.

- Calculer le carré du module du complexe $(1 + i)z - 2i$ en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M . Déterminer E par une équation cartésienne. Reconnaître E puis le dessiner.
- On note s la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $-2\vec{v}$.
 - Un point M ayant pour affixe z , calculer l'affixe du point $s(M)$ puis l'affixe du point $t \circ s(M)$.
 - Soit C l'ensemble des points M' d'affixe z' tels que $|z'| = 2$. Reconnaître C et le dessiner. Déterminer l'ensemble $t \circ s(E)$; en déduire l'ensemble E .

PROBLÈME

12 points

Un plan affine est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé; pour exécuter les figures on prendra pour unité de longueur 2 cm.

On donne le point A de coordonnées $(1; 1)$.

Partie A

- α étant un réel donné non nul, soit D la droite d'équation $x = \alpha$.
Montrer qu'il existe une application affine f_α , et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions

$$f_\alpha(0) = A \quad \text{et} \quad \forall M \in D \quad \overrightarrow{Mf_\alpha(M)} = \vec{i}.$$

- On considère l'application f qui, au point M de coordonnées $(x; y)$ fait correspondre $M' = f(M)$ de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$x' = x + 1 \quad \text{et} \quad y' = x + y + 1.$$

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que f est une bijection du plan affine.

Y a-t-il des points invariants par f ? Quelle est la matrice de l'endomorphisme φ associé à f ?

3. a. Vérifier que, quel que soit le réel λ , les vecteurs $(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ et $\varphi(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ forment une famille libre.
- b. Soit Δ une droite affine du plan : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$?
4. Chercher l'image $f(\Delta)$ de la droite Δ dans chacun des cas suivants :
- a. Δ a pour équation $x = k$. Montrer que, si M appartient Δ , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur constant $\vec{u}_k$ dont on donnera les coordonnées.
- b. Δ a pour équation $y = k'$.
- c. Δ a pour équation $y = tx$; calculer dans ce cas les coordonnées du point P d'intersection des droites Δ et $f(\Delta)$ en fonction de t . Quel est l'ensemble Π décrit par P lorsque t décrit $\mathbb{R}$?
- Figure* : représenter Π . Tracer les droites Δ et $f(\Delta)$ dans le cas des droites L ayant respectivement pour équation $x = -1$, $y = -1$, $y = -2x$.
5. Faire une nouvelle figure.
On appelle M_0 l'origine du repère et l'on pose

$$M_1 = f(M_0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n = f(M_{n-1}).$$

Soit $(x_n; y_n)$ les coordonnées de M_n . Calculer les coordonnées de M_1, M_2, M_3 . Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1} .

En déduire x_n et y_n en fonction de n .

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n appartient à la courbe C d'équation $y = \frac{x(x+1)}{2}$. Reconnaître C et la dessiner.

6. a. Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En utilisant une primitive G de g , établir l'égalité

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g(x) dx = \int_{\lambda_1+1}^{\lambda_2+1} g(x-1) dx.$$

λ_1 et λ_2 réels donnés.

- b. Si une courbe Γ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation $y = h(x-1) + x$.
Quelle est l'image de la courbe C du 5. ?
- c. Cas particulier : soit E_n la région du plan comprise entre la courbe C et le segment $[M_{n-1} M_n]$; hachurer sur la figure les régions E_1, E_2, E_3, E_4 .
Déduire du a. et du b. ci-dessus que l'aire de E_n est indépendante de n . Quelle est sa valeur ?

Partie B

On considère l'application h_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_0(x) = e^{-x} - 1;$$

soit Γ sa représentation graphique. Montrer que son image $f(\Gamma)$ est la représentation de l'application h_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h_1(x) = e^{-x} - 1 + x.$$

Étudier les applications h_0 et h_1 ; représenter sur la même figure Γ et $f(\Gamma)$, en dessinant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles.

λ étant un réel, supérieur à 1, calculer en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan dont les frontières sont les droites $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\Gamma)$ et son asymptote.

Montrer que, lorsque λ tend vers $+\infty$, $\mathcal{A}(\lambda)$ a une limite à déterminer.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nancy-Metz ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$17q - 11p = 2.$$

2. On désigne par $\overline{n}$ la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$.
Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \overline{1} = 0$.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - [(1 + 2i)u + 1]z + (-1 + z)u^2 + iu = 0$$

où z est l'inconnue complexe et u un paramètre complexe.

On appellera z' la racine qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1 + i)$, z'' l'autre racine.

2. Dans le plan affine euclidien, on appelle P le point d'affixe u , M' celui d'affixe z' , M'' celui d'affixe z'' .

Par quelles transformations du plan passe-t-on de P à M' ? (On appellera T_1 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques). Puis de P à M'' ? (On appellera T_2 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques.)

3. Par quelle transformation T passe-t-on alors de M' à M'' ?

Donner les éléments caractérisant T .

PROBLÈME

12 points

Partie A

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

- Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
- Déterminer une fonction polynôme P , de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.
- Soit k la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser k et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_P$ courbes représentatives respectives de f et P dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan. Tracer soigneusement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_P$. Faire figurer les tangentes aux points communs.

4. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0; 1]$, montrer que

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x) dx < \frac{1}{120}.$$

5. Calculer $\int_0^1 k(x) dx$ et $\int_0^1 P(x) dx$.

6. Dédurre des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{n}{240} < \text{Log } 2 < \frac{n+1}{240}.$$

Partie B

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

Soit h un réel strictement positif et φ l'application de E vers $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(h), P'(h)).$$

1. Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur $\mathbb{R}^4$.
2. Soit φ^{-1} , la bijection réciproque de φ . Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}((0, 0, 1, 0))$ et $P_4 = \varphi^{-1}((0, 0, 0, 1))$.
3. Soit $P_1 = 1 - P_3$, et P_2 défini par $P_2(X) = -P_4(h - x)$.
Vérifier que $P_1 = \varphi^{-1}((1, 0, 0, 0))$ et $P_2 = \varphi^{-1}((0, 1, 0, 0))$.
4. Calculer pour i élément de $\{1, 2, 3, 4\}$ l'intégrale $\int_0^h P_i(t) dt$.
5. Montrer que tout élément P de E s'écrit comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 et P_4 .
En déduire la relation, pour P élément de E ,

$$\int_0^h P(t) dt = \frac{h}{2}(P(0) + P(h)) + \frac{h^2}{12}(P'(0) - P'(h)).$$

Partie C

Soit a un réel strictement positif et g une application de $[0; a]$ vers $\mathbb{R}$ possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0; a]$. Soit $h \in]0; a]$, et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h .

1. Montrer que g est intégrable sur $[0; h]$ et, en utilisant les résultats de la partie B, qu'on a la relation

$$\int_0^h g(t) dt - \int_0^h Q_h(t) dt = \int_0^h g(t) dt - \frac{h}{2}(g(0) + g(h)) - \frac{h^2}{12}(g'(0) - g'(h)).$$

2. Pour tout u de $[0; a]$, on pose

$$\Psi(u) = \int_0^u g(t) dt - \frac{u}{2}(g(0) + g(u)) - \frac{u^2}{12}(g'(0) - g'(u)).$$

Montrer que l'application Ψ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0; a]$, que

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$$

$$\text{et que } (\forall u \in [0; a]), \quad \left(\Psi^{(3)}(u) = \frac{u^2}{12} g^{(4)}(u) \right).$$

3. On pose $M = \sup_{t \in [0 ; a]} |g^{(4)}(t)|$.

Montrer successivement que

$$\begin{aligned}\forall x \in [0 ; a], \quad |\Psi''(x)| &\leq M \frac{x^3}{36}, \\ \forall y \in [0 ; a], \quad |\Psi'(y)| &\leq M \frac{y^4}{144}, \\ \forall z \in [0 ; a], \quad |\Psi(z)| &\leq M \frac{z^5}{720}.\end{aligned}$$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes que

$$\int_0^a g(t) dt = \frac{a}{2}(g(0) + g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0) - g'(a)) + \mathbb{R},$$

$$\text{avec } \mathbb{R} \leq \frac{a^5}{720} M.$$

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C juin 1982 Lille ☞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(1) \quad 9x - 22y = 55.$$

2. Déterminer les couples solutions de l'équation (1) tels que le plus grand commun diviseur de x et de y soit 55.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$z^4 - (10i - 5)z^2 - 14i - 48 = 0.$$

2. On appelle z_1, z_2, z_3, z_4 les solutions de cette équation en supposant que

$$\Re(z_4) < \Re(z_3) < 0 < \Re(z_2) < \Re(z_1)$$

où $\Re(z_i)$ représente la partie réelle de z_i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Soit M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives $2 + i$ et $1 + 3i$.

Déterminer les deux similitudes laissant le point O d'affixe 0 invariant et transformant M_1 en M_2 . On précisera les éléments caractéristiques de ces similitudes.

PROBLÈME

12 points

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition des fonctions et de leur multiplication par un scalaire.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f: \quad & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto e^x(a + b \sin x + c \cos x) \end{aligned}$$

où a, b et c sont trois réels quelconques.

Partie A

On appelle g l'élément de $\mathcal{E}$ correspondant au cas où $a = 0, b = c = 1$.

1. Étudier les variations de g , démontrer que g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J , que l'on déterminera.

Si l'on appelle g l'application telle que

$$\begin{aligned} \tilde{g}: \quad & \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow J \\ & x \mapsto g(x) \end{aligned}$$

étudier la dérivabilité de la fonction réciproque $h = \tilde{g}^{-1}$. Préciser $h'(1)$.

2. Tracer la courbe représentative C de $\tilde{g}$ dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (unité 2 cm).

Construire la tangente à C au point d'abscisse 0. Tracer dans le même repère la courbe représentative C' de h .

3. a. À l'aide éventuellement d'une double intégration par parties, calculer

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x + \cos x) dx.$$

- b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ du plan compris entre C , les droites d'équations $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine $\mathcal{D}'$ du plan compris entre C' , les droites d'équations $y = x$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Partie B

1. Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ admettant pour base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$, avec

$$\begin{aligned} f_1 : \begin{matrix} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \end{matrix} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto e^x. \\ f_2 : \begin{matrix} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \end{matrix} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto e^x \sin x. \\ f_3 : \begin{matrix} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \end{matrix} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto e^x \cos x. \end{aligned}$$

2. Soit f un élément de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(a; b; c)$ dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' sont des éléments de $\mathcal{E}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Préciser $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de a, b, c .
3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui, à la fonction f de coordonnées a, b, c dans la base $\mathcal{B}$ associe la fonction $\tilde{f}$ de coordonnées

$$a' = 3a + 4b, b' = -2a - 3b \text{ et } c' = 2a + 2b - c,$$

dans la même base.

- a. Déterminer D , ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ invariants par φ et vérifier que

$$D = \left\{ f \in \mathcal{E} \mid f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

- b. Déterminer P , ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ changés par φ en leur opposé et vérifier que

$$P = \left\{ f \in \mathcal{E} \mid f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

- c. Démontrer que D et P sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$. En déduire la nature de φ et l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

4. Soit Φ l'application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f, g) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right)g''\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

- a. Démontrer que Φ est un produit scalaire défini sur $\mathcal{E}$. Dans toute la suite du problème, $\mathcal{E}$ est muni de ce produit scalaire.
- b. Vérifier que le plan vectoriel P et la droite vectorielle D introduits en B 3. sont orthogonaux et préciser alors φ .
5. a. Vérifier que, pour le produit scalaire Φ , la base $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée.
- b. On donne

$$g_1 : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto e^{x-\frac{\pi}{2}}(2-2\sin x + \cos x) \end{matrix}$$

Vérifier que g_1 est normé. Trouver g_2 normé, orthogonal à g_1 appartenant à P et tel que $g_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Soit g_3 le vecteur normé de D tel que $g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Déterminer g_3'' et démontrer que (g_1, g_2, g_3) est une base orthonormée qu'on notera $\mathcal{B}'$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Clermont-Ferrand ∞

EXERCICE 1

1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(1) \quad 5x - 4y = 2.$$

2. On considère les couples (a, b) solutions de l'équation (1).

- Quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun de a et b ?
- Montrer qu'il existe un seul couple (a, b) dont le plus petit multiple commun de a et b est 60 et le plus grand diviseur commun de a et b est 2.

EXERCICE 2

On considère les intégrales définies

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx, \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx.$$

- Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n .
- Calculer I_1 . En déduire I_3 et I_5 .
- a. Soit f l'application qui à $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$ associe

$$f(x) = \text{Log} \left[\text{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $[0; \frac{\pi}{3}]$ par

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

- En déduire I_0 puis I_2 et I_4 .

PROBLÈME

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit E l'espace vectoriel associé de base $\mathcal{B}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A

On considère l'endomorphisme φ de E défini par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= \varphi(\vec{j}) &= \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \\ \varphi(\vec{k}) &= -\vec{k}. \end{cases}$$

- Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E de composantes (x, y, z) relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer les composantes (X, Y, Z) de $\varphi(\vec{u})$ relativement à cette même base.

- Déterminer le noyau D de φ . En donner une base.
- Montrer que l'image de φ est le plan vectoriel P orthogonal à D .
- Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ .
- Montrer que l'endomorphisme φ peut être mis sous la forme

$$\varphi = \psi \circ p$$

où ψ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ et p une projection vectorielle à déterminer.

Partie B

Soit A le point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont $(0, 1, 1)$. Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ associée à l'endomorphisme φ et laissant A invariant.

Au point m de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, correspond le point $M = f(m)$ de coordonnées (X, Y, Z) dans ce même repère.

- Montrer que 1 est définie analytiquement par

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{2}[x + y - 1] \\ Y &= \frac{1}{2}[x + y + 1] \\ Z &= -z + 2 \end{cases}$$

- Déterminer l'ensemble des points invariants par f et l'image de $\mathcal{E}$ par f . Donner les équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$ de ces ensembles.
- Montrer que le repère $\mathcal{R}' \left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \vec{k} \right)$ est un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ d'équation dans $\mathcal{R}$

$$x - y + 1 = 0.$$

- Déterminer, dans ce repère $\mathcal{R}'$, l'expression analytique de la restriction $\hat{f}$ de f à $\mathcal{P}$. Quelle est la nature de $\hat{f}$.
- Soit $m \in \mathcal{E}$ et $M = f(m)$ son transformé par f . Indiquer par quelles transformations géométriques on passe du point m au point M . (On pourra illustrer la réponse à l'aide d'une figure.)

Partie C

On considère le point mobile $m(t)$ dont les coordonnées à la date t sont définies, relativement au repère $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, par

$$\begin{cases} x(t) &= 1 + \cos t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= 1 + \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi[$$

- Quelle est la nature de la trajectoire de $m(t)$?
Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ du point $m(t)$ à la date t .
Quelle est la nature du mouvement?

2. Soit $M(t)$ le transformé de $m(t)$ par f .
- a. Déterminer une représentation paramétrique de la trajectoire (Γ) de $M(t)$, relativement au repère $\mathcal{R}$. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point $M(t)$ à la date t .
 - b. Étudier les variations de l'application :

$$t \in [0 ; 2\pi[\mapsto \left\| \overrightarrow{V(t)} \right\|$$

et tracer la courbe représentative.

- c. Trouver les positions de $M(t)$ pour lesquelles $\left\| \overrightarrow{V(t)} \right\|$ est maximal, minimal.
3. Montrer que (Γ) est globalement invariante par f .
4. Montrer que la trajectoire (Γ) est située dans le plan $\mathcal{P}$ et trouver son équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}'$. Préciser la nature et les éléments géométriques de (Γ) .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Toulouse ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= -\vec{i}; \\ f(\vec{j}) &= (\sin \theta) \cdot \vec{j} + (\cos \theta) \cdot \vec{k}; \\ f(\vec{k}) &= (-\cos \theta) \cdot \vec{j} + (\sin \theta) \cdot \vec{k}. \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; 2\pi[$$

1. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E .
2. Démontrer l'existence d'une valeur unique de θ telle que f soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel; on précisera ce plan.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 - \frac{4}{\sin t} z + \frac{13}{\sin^2 t} - 9 = 0.$$

z désigne l'inconnue, t désigne un paramètre réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

2. Dans le plan affine euclidien, muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé, on considère le point M mobile d'affixe

$$z = \frac{2}{\sin t} + 3i \cotg t, \quad t \text{ décrivant l'intervalle }]0; \pi[.$$

- a. Soit T la trajectoire du mobile; démontrer que T est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
Préciser et construire T .
- b. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ à l'instant t et déterminer t pour que $\|\vec{V}\| = 3$.

PROBLÈME

12 points

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. On sait que $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que tout élément de $\mathcal{F}$ est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
À toute fonction f , élément de $\mathcal{F}$, on associe la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par

$$U_0(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

et, pour $n \geq 1$,

$$U_n(f) = \int_{-1}^1 x^n f(x) dx.$$

Partie A

Dans cette partie on note f la fonction exponentielle de base e

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto f(x) = e^x, \end{aligned}$$

g la fonction, élément de $\mathcal{F}$, définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ &\longmapsto g(x) = xe^x, \end{aligned}$$

et on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions

$$h = af + bg \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer $U_0(f)$, puis $U_1(f)$ grâce à une intégration par parties.
2. Établir, pour $n \geq 1$, la relation $(-1)^n U_n(f) = e + \frac{(-1)^n}{e} - (n+1)U_{n+1}(f)$.

$$U_{n+1}(f) = e + \frac{(-1)^n}{e} - (n+1)U_n(f).$$

3. Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ et que $B = (f, g)$ est une base de $\mathcal{E}$.
4. Établir que, quelle que soit la fonction h élément de $\mathcal{E}$, il existe une fonction H telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \int_{-1}^1 h(x+t) dt.$$

Démontrer que H appartient à $\mathcal{E}$ et que H est l'image de h par une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont on précisera la matrice dans la base B .

(Cette partie est indépendante des deux suivantes).

Partie B

Dans cette partie, on désigne par φ la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[&\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \varphi(y) = \operatorname{tg} y. \end{aligned}$$

1. Démontrer que φ admet une fonction réciproque notée Φ dont on donnera l'ensemble de définition (on ne cherchera pas à expliciter $\Phi(x)$).
2. Démontrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée Φ' vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Montrer que Φ' appartient à $\mathcal{F}$ et calculer $U_0(\Phi')$, $U_1(\Phi')$ et $U_2(\Phi')$.
4. a. Montrer que, si n est impair, $U_n(\Phi') = 0$.
b. Montrer que, si n est pair,

$$U_n(\Phi') \leq \frac{2}{n+1}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\Phi')$.

Partie C

1. f étant un élément quelconque de $\mathcal{F}$, on considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t) \, dt.$$

- a. Montrer que F est un élément de $\mathcal{F}$.
 - b. Montrer que $U_0(f) = F(1) - F(-1)$.
 - c. Calculer $U_n(F)$ en fonction de $F(1)$, de $F(-1)$ et de $U_{n+1}(f)$.
2. Soit Φ la fonction définie au B
- a. Montrer que, si n est pair, $U_n(\Phi) = 0$.
 - b. Calculer $U_1(\Phi)$ sans nouvelle intégration.
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1}(\Phi)$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Strasbourg ∞

EXERCICE 1

4 points

1. On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur autre que le nombre lui-même.
Déterminer les entiers naturels diviseurs stricts de 220.
2. On appelle nombres amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.
3. a. On appelle nombre parfait un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (amiable avec lui-même). Le nombre 28 est-il parfait?
Déterminer un entier p premier tel que le nombre $24p$ soit parfait.
b. Plus généralement, soit n et p deux entiers naturels, p premier; quelle doit être l'expression nécessaire de p en fonction de n pour que $2^n \cdot p$ soit parfait? Donner la liste des nombres parfaits de cette forme pour $n < 10$.

EXERCICE 2

4 points

Fonction scalaire de Leibniz

Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = a$ (a est un réel strictement positif donné).

1. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, 1) et (C, 1).
2. Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on pose

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Démontrer que $\vec{v}$ est un vecteur constant, indépendant de M.

Construire le point A' tel que $\overrightarrow{A'N} = \vec{v}$. Calculer $\|\overrightarrow{A'N}\|$ et $\|\overrightarrow{AG}\|$ en fonction de a .

3. Déterminer et construire l'ensemble (γ) des points du plan $\mathcal{P}$ tels que

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4. Déterminer et construire l'ensemble (ϵ) des points du plan $\mathcal{P}$ tels que

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2.$$

(On pourra remarquer que le point G appartient à (ϵ).)

PROBLÈME

12 points

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions f définies par

$$\begin{aligned} \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = e^{-x}(a \cos x + b \sin x + cx \cos x + dx \sin x). \end{aligned}$$

Partie A

- Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. On pourra utiliser les valeurs de ces fonctions en $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
- Soit les quatre fonctions de $\mathcal{E}$ suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto e^{-x} \cos x; & f_2 : x &\mapsto x e^{-x} \cos x; \\ f_3 : x &\mapsto e^{-x} \sin x; & f_4 : x &\mapsto x e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est un système libre de $\mathcal{E}$.

En déduire que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathcal{E}$.

- a. Calculer les dérivées f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 de f_1, f_2, f_3, f_4 et montrer qu'elles appartiennent à $\mathcal{E}$; en déduire que

$$\begin{aligned} D : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ f &\mapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- Si une fonction f de $\mathcal{E}$ a pour composantes (a, b, c, d) dans la base B , quelles sont les composantes de $D(f)$ dans B ?
- Déterminer le noyau de D . En déduire que D est un automorphisme de $\mathcal{E}$. Définir analytiquement l'application réciproque D^{-1} de D . Si f est élément de $\mathcal{E}$, que représente $D^{-1}(f)$?

Partie B

Soit la fonction f de $\mathcal{E}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x} (\cos x + \sin x + 2x \sin x).$$

- Étudier les variations de cette fonction sur $[0; \pi]$ et tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités :
sur Ox , π est représenté par 12 cm;
sur Oy l'unité est 4 cm.
- On désigne par g la restriction de f à $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Déterminer $J = g(I)$. En déduire que g est une bijection de I sur J .
Soit $g^{-1} : J \rightarrow I$ la bijection réciproque de g . Quel est le domaine de dérivabilité de g^{-1} ? Représenter graphiquement g et g^{-1} dans un même repère orthonormé (unité : 4 cm).
- a. Montrer que l'équation $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in [0; \pi] \end{cases}$ admet une unique solution x_0 . Vérifier que x_0 appartient à l'intervalle $\left] \frac{5\pi}{6}; \pi \right[$.
b. Calculer pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)$, $f(\pi + 2k\pi)$, $f(2\pi + 2k\pi)$.
Montrer que sur l'intervalle $]2k\pi; 2k\pi + 2\pi[$, la fonction f admet exactement un maximum et un minimum qui sont de signes contraires.
c. Déduire du résultat précédent que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]k\pi; k\pi + \pi[$ une solution unique.
Quelques valeurs : $e^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0,46$; $e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0,20$; $e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx 0,09$;
 $e^{-\pi} \approx 0,04$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Nice ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Étudier l'ensemble de définition et les variations (sans en chercher les limites et sans les représenter graphiquement) des deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : x &\longmapsto \operatorname{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \\ g : x &\longmapsto \operatorname{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

2. Dédurre de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - \frac{x^2}{2} < \operatorname{Log}(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Chercher si la fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{\operatorname{Log}(1+x) - x + x^2}{x^2}$ a une limite quand x tend vers zéro par valeurs positives.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Paris ¹ ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'ensemble E des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{x+y-4}{2}\right)^2.$$

1. Démontrer que E est une conique de centre O ; préciser les éléments caractéristiques : foyers, directrices, excentricité, axe principal.
2. On définit une application f du plan euclidien orienté dans lui-même qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1-i}{2}z.$$

Quelle est la nature de l'application f ?

Préciser les éléments caractéristiques de f .

3. Déterminer l'image de E par f ; on précisera les éléments caractéristiques de cette image.

PROBLÈME

12 points

I

On définit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 5}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Étudier les variations de f .
 - b. Préciser le nombre de points d'intersection de la courbe C avec l'unique asymptote.
 - c. Étudier la position de la courbe au voisinage de l'origine par rapport à la première bissectrice.
 - d. Construire C . (On prendra 1 cm pour unité.)
2. On définit une application g de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ par $g(x) = f(x)$.
 - a. Démontrer que l'application g admet une fonction réciproque g^{-1} .
 - b. Construire la courbe représentative de g^{-1} sur la figure précédente.
 - c. Déterminer explicitement la fonction g^{-1} .
(On sera amené à résoudre une équation du second degré dont l'une des racines définira la fonction réciproque.)

1. Créteil, Versailles

3. Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$. On définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$u_1 = g(u_0), \quad u_n = g(u_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

- a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- b. On suppose que $0 < u_0 \leq \frac{1}{2}$.

Vérifier que pour tout $x \in [0; 1]$, on a $x^2 - 4x + 5 \geq 2$ et en déduire que $u_1 \leq \frac{3}{4}u_0$.

Démontrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite quand n tend vers $+\infty$.

II

a, b, c désignant des constantes réelles, on appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $f_{a, b, c}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe :

$$f_{a, b, c}(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4x + 5}.$$

On appelle $C_{a, b, c}$ la courbe représentative de $f_{a, b, c}$.

- a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour que chaque courbe $C_{a, b, c}$ et l'asymptote correspondante se coupent en un point; ce point est-il unique?

b. On appelle $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de dimension trois dont on donnera une base.
- On appelle φ l'application qui à chaque fonction $f_{a, b, c}$ appartenant à $\mathcal{F}$ associe la fonction $\varphi(f_{a, b, c})$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f_{a, b, c})(x) = f_{a, b, c}(4 - x).$$

- Démontrer que $\varphi(f_{a, b, c})$ appartient à $\mathcal{F}$ et que φ est un automorphisme de $\mathcal{F}$.
Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
Trouver les fonctions $f_{a, b, c}$ telles que $\varphi(f_{a, b, c}) = f_{a, b, c}$.
En déduire la nature de l'application φ .
Donner alors un élément de symétrie des courbes $C_{a, b, c}$ correspondantes.
 - Trouver les fonctions $f_{a, b, c}$ telles que $\varphi(f_{a, b, c}) = -f_{a, b, c}$.
Donner un élément de symétrie des courbes $C_{a, b, c}$ correspondantes.
- On appelle Ψ l'application qui à chaque fonction $f_{a, b, c}$ appartenant à $\mathcal{F}$, associe la fonction $\Psi(f_{a, b, c})$ définie pour tout x réel par :

$$\Psi(f_{a, b, c})(x) = (x^2 - 4x + 5)f'_{a, b, c}(x).$$

où $f'_{a, b, c}$ est la fonction dérivée de $f_{a, b, c}$.

Démontrer que

Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

Déterminer $\{f_{a, b, c} \in \mathcal{F}; \Psi(f_{a, b, c}) = 0\}$, 0 étant l'application nulle.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Polynésie française juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$493\lambda + 10 \equiv 2 \pmod{5}.$$

2. Soit $N = \overline{xyz\bar{t}}$ un entier naturel écrit dans le système décimal, x étant non nul.
Déterminer ce nombre sachant que les restes de la division de N par 17 et par 29 sont égaux à 10, et que les restes de la division de N par 5 et par 9 sont égaux à 2.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{3e^x + 5}{e^x + 2}.$$

1. Étudier f .
2. Montrer que f est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .
3. On considère le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).
Calculer l'aire du domaine D limité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$ et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$.

PROBLÈME

12 points

Partie A

1. Pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$ on pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a + 2b \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a, b)$ où (a, b) appartient à $\mathbb{R}^2$.

- a. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En déterminer une base. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}$?
b. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathcal{M}$ a une structure de corps commutatif.
2. a. Montrer que $(1, 1 + 2i)$ est une base de $\mathbb{C}$, espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. En déduire que tout nombre complexe peut se mettre de façon unique sous la forme $a + b(1 + 2i)$.
b. À tout nombre complexe z s'écrivant $a + b(1 + 2i)$ on associe la matrice $M(a, b)$ que l'on notera $\varphi(z)$.
Montrer que l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{M}$ ainsi définie est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ muni de l'addition dans $\mathcal{M}$ muni de l'addition.

c. Montrer que l'on a aussi

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \varphi(z, z') = \varphi(z)\varphi(z').$$

Quelle conclusion peut-on en tirer?

3. a. Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

b. De façon générale montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$\left[\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} & \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \\ -\frac{5}{2} \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit Ψ l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui laisse O invariant et qui a pour endomorphisme associé

l'endomorphisme de matrice $\varphi\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soit A_0 le point de coordonnées $(1; 1)$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère la suite de points $A_1 = \Psi(A_0)$, et $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad A_n = \Psi(A_{n-1})$.

1. Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point A_n .
2. Montrer que les suites x_n et y_n sont périodiques.
3. Déterminer l'isobarycentre des points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$.

Partie C

On considère dans $\mathcal{E}$ l'application affine g définie par

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

On désigne par F son endomorphisme associé.

1. Pour tout réel λ on appelle E_λ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $F(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Montrer que E_λ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 de λ pour lesquelles E_λ n'est pas réduit à $\{0\}$. Déterminer une base de E_{λ_1} et une base de E_{λ_2} .
3. a. On considère $\vec{U} = 3\vec{e}_1 = \vec{e}_2$ et $\vec{V} = \vec{e}_2$. Montrer que $(\vec{U}, \vec{V})$ est une base de E . Est-elle orthonormée?
b. Quelle est la matrice de F dans la base $(\vec{U}, \vec{V})$?
c. Si un point M a pour coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(O; \vec{U}, \vec{V})$, exprimer les coordonnées $(X'; Y')$ de $g(M)$ dans ce même repère en fonction de $(X; Y)$.

4. Soit p la projection affine sur la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{U}$, de direction la droite vectorielle engendrée par $\vec{V}$.

$$\text{Montrer que } (\forall M \in \mathcal{E}), \quad \overrightarrow{p(M)g(M)} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{p(M)M}.$$

En déduire la construction de $g(M)$ connaissant M , la construction de M connaissant $g(M)$.

5. Représenter les points $g(A_0), g(A_1), \dots, g(A_5)$ puis les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nantes ∞

EXERCICE 1

4 points

Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros : a et b . On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire X associant à chaque paire de jetons tirés, a, b , le plus grand commun diviseur de a et de b .
 - a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Dédurre de la question précédente les probabilités des **événements** suivants :
A : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 1$ admet des solutions »,
B : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 2$ admet des solutions »,
C : « l'équation $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $ax + by = 12$ admet des solutions ».
2. On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note a et b , on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite.
 - a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de quatre tirages successifs ?
 - b. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de a et de b au cours de n tirages successifs soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 2

4 points

Soit E_3 l'espace affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. f désigne l'application affine de E_3 définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' &= z. \end{cases}$$

Démontrer que f est une rotation affine; préciser son axe et une mesure de son angle.

2. On considère les quatre points :

$$A(2; 0; 0), \quad B(-1; \sqrt{3}; 0), \quad C(-1; -\sqrt{3}; 0), \quad D(0; 0; 4)$$

On pose $\mathcal{F} = \{A, B, C, D\}$.

- a. Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
 - b. Vérifier que l'application f laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
3. Soit g une isométrie affine de E_3 qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.

- a. Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D. Calculer

$$\|\overrightarrow{GA}\|, \|\overrightarrow{GB}\|, \|\overrightarrow{GC}\|, \|\overrightarrow{GD}\|.$$

- b. En déduire que g laisse invariant les points G et D.
 c. En déduire l'ensemble des déplacements de E_3 qui laissent $\mathcal{F}$ globalement invariant.
 4. Soit s un antidéplacement de E_3 qui laisse $\mathcal{F}$ globalement invariant.
 a. Démontrer que s est associé à une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel; en déduire la nature géométrique de s .
 b. Quel est l'ensemble des isométries affines de E_3 qui laissent $\mathcal{F}$ globalement invariant?

PROBLÈME**12 points**

Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes

P est un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes; i est le nombre de complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Les affixes des points de P sont toujours données par rapport au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
 f et g sont les deux applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définies par, pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i \\ g(z) &= z^3 + 2 - 2i. \end{aligned}$$

Partie A

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z vérifiant $g(z) = 0$. Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.
 2. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel r , que l'on déterminera, qui vérifie $f(r) = 0$. Déterminer les deux nombres complexes a et b de façon à avoir

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

3. Résoudre l'équation $z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$.
 Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P.
 4. A, B, C sont les points de P dont les affixes respectives sont $-1 + 3i, 1 + i, -4$. Déterminer l'abscisse du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4; 3; 5.
 5. On désigne par h l'application de P vers $\mathbb{R}$ qui à tout point M de P associe le réel

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Calculer $h(C)$. Exprimer $h(M)$ en fonction de $\|MG\|^2$ et $h(G)$.

Déterminer et dessiner l'ensemble des points M de P qui vérifient $h(M) = 18$.

Partie B

À tout point M de P d'abscisse z on associe le point M' de P d'abscisse

$$f(z) - g(z).$$

1. Déterminer les coordonnées $(x' ; y')$ de M' dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de M dans le même repère.
2. A, B, C sont les points définis en A 4. Donner une équation de l'ensemble H_1 des points M de P tels que O, B et M' soient alignés. Démontrer que H_1 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.
3. Donner une équation de l'ensemble H_2 des points M de P tels que O, I et M' soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.
Démontrer que H_2 est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra, par exemple, donner une équation de H_2 sous la forme $y = \varphi(x)$.
4. Démontrer qu'un point M est commun à H_1 et H_2 si, et seulement si, M' est confondu avec O. Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z).$$

En déduire les points communs à H_1 et H_2 .

Construire H_1 et H_2 dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie C

Un mobile du plan P a son affixe $z(t)$ donnée, en fonction du temps t par

$$z(t) = f(t.i) + 10 - 6i,$$

quand t décrit l'intervalle $[0 ; 2]$ de $\mathbb{R}$. On notera $M(t)$ le point correspondant à l'instant t .

1. Déterminer les coordonnées $(x(t) ; y(t))$ de $M(t)$ dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, ainsi que les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t .
2. Faire un tableau indiquant les variations de x et de y en fonction de t .
3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$ du réel t et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$ de t .
4. Déduire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand t décrit $[0 ; 2]$.

Durée : 4 heures

♯ Baccalauréat C juin 1982 Limoges ♯

EXERCICE 1

4 points

Déterminer les paires $\{a, b\}$ d'entiers naturels non nuls tels que

$$2m + 7d = 111,$$

m désignant le PPCM et d le PGCD de a et de b .

EXERCICE 2

4 points

1. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a

$$\cos 3x = (2 \cos 2x - 1) \cos x.$$

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$S_n(\theta) = \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right) + \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3^2} - 1 \right) + \cdots + \text{Log} \left(2 \cos \frac{\theta}{3^n} - 1 \right).$$

où Log désigne le logarithme népérien et θ un nombre réel donné de l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right[$.

- a. Justifier l'existence de $S_n(\theta)$.
b. En utilisant la première question, montrer que

$$S_n(\theta) = \text{Log} \cos \frac{\theta}{2} - \text{Log} \cos \frac{\theta}{2 \cdot 3^n}$$

- c. Calculer $S(\theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\theta)$.

3. Calculer $S'(\theta)$, pour tout θ de l'intervalle I , S' désigne la dérivée de S . En déduire la valeur de $J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$.

PROBLÈME

12 points

On considère E un espace vectoriel euclidien orienté, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note f_0 l'identité de E .

Partie A

Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= \vec{j} + \vec{k} \\ f(\vec{j}) &= \vec{i} + \vec{k} \\ f(\vec{k}) &= \vec{i} + \vec{j}. \end{cases}$$

1. Déterminer $f \circ f$ et vérifier que

$$f \circ f = f + 2f_0.$$

En déduire que f est une bijection et déterminer f^{-1} en fonction de f et de f_0 .

2. Soit $f^n = f^{n-1} \circ f \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que f^n peut s'écrire

$$f^n = \mathcal{U}_n f + \mathcal{V}_n f_0$$

$\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ étant deux réels.

Calculer $\mathcal{U}_{n+1}$ et $\mathcal{V}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$.

3. Soit

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} &= 2\mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1} \\ \beta_{n+1} &= \mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{V}_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n puis β_{n+1} en fonction de β_n .

Calculer α_n et β_n en fonction de n .

En déduire $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et f^n en fonction de f et f_0 .

Partie B

Soit $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi_{a,b} = af_0 + bf.$$

On note Φ l'ensemble de ces endomorphismes avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que Φ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de E et que (f_0, f) est une base de Φ .
2. Quels sont les endomorphismes $\varphi_{a,b}$ tels que

$$\varphi_{a,b} \circ \varphi_{a,b} = \varphi_{a,b} + 2f_0.$$

3. Montrer que $(\Phi, +, \circ)$ est un anneau commutatif unitaire.
4. Déterminer les couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels
 - a. $\varphi_{a,b}$ est une symétrie vectorielle de E . Caractériser les symétries trouvées.
 - b. $\varphi_{a,b}$ est une projection vectorielle de E . Caractériser les projections trouvées.
 - c. $\varphi_{a,b}$ est une isométrie vectorielle de E . Caractériser les isométries trouvées.

La partie B est indépendante de A § 2) § 3).

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Dijon ∞

EXERCICE 1

4 points

n étant un entier naturel fixé, on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E_n) : 165x - 132y = n.$$

Résoudre cette équation dans les trois cas particuliers :

1. $n = 33$.
2. $n = 66$.
3. $n = 42$.

Dans ces différents cas, on déterminera pour chaque couple (x, y) solution, le PGCD de x et y .

EXERCICE 2

4 points

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé, f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z^2 + iz + 1.$$

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.
2. Soit M un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées x et y et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y' son image par f . Déterminer x' et y' en fonction de x et y .
3. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de Γ .
4. Soit $\mathcal{C}$ l'image par f de la droite $(O, \vec{e}_1)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
5. Montrer que Γ et $\mathcal{C}$ sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

PROBLÈME

12 points

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel habituelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Question préliminaire : Justifier, pour tout f élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ et pour tout réel x , l'existence du réel $\int_x^{x+1} f(t) dt$. On note $F(x)$ ce réel; on construit ainsi une fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$, associée à f .

Partie A

Soit $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = x; \quad f_3(x) = e^x.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathcal{V}$.
2. Montrer que, si f est élément de $\mathcal{V}$, F est élément de $\mathcal{V}$.
Soit alors $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ l'application définie par

$$\Phi(f) = F$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{V}$, et donner l'expression des coordonnées a_1, b_1 et c_1 de F dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées a, b et c de f dans cette même base.

Application : On pose $f = -f_1 - f_2 + f_3$. Déterminer $\Phi(f)$.

3. Soit P le plan vectoriel engendré par f_1 et f_2 et D la droite vectorielle engendrée par f_3 .
 - a. Montrer que ces deux sous-espaces de $\mathcal{V}$ sont stables par Φ , c'est-à-dire que $\Phi(P) \subset P$ et $\Phi(D) \subset D$.
 - b. On définit $\Phi^1 = \Phi$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\Phi^n = \Phi^{n-1} \circ \Phi$.
Soit f un élément de $\mathcal{V}$, de coordonnées a, b et c dans la base $\mathcal{B}$, et a_n, b_n, c_n les coordonnées de $\Phi^n(f)$ dans cette même base.
Déterminer a_n, b_n et c_n en fonction de a, b et c .

Partie B

Soit f et F les fonctions numériques définies par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= e^x - x - 1 \\ F(x) &= (e - 1)e^x - x - 2 \end{aligned}$$

1. Montrer que F est la fonction associée à f (au sens de la question préliminaire).
2. Étudier les fonctions f et F et construire leurs représentations graphiques respectives γ et Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. (Tracer les deux courbes sur le même dessin).
3. Justifier l'existence, pour tout réel positif x , d'un réel unique c de l'intervalle $[x; x + 1]$ tel que

$$\int_x^{x+1} f(t) dt = f(c).$$

4. On définit la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} f(t) dt = f(c_n)$$

puis la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\delta_n = c_n - n$.

- a. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- b. En utilisant les courbes γ et Γ du B 2., déterminer graphiquement les points M_0, M_1 et M_2 de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisse respective c_0, c_1, c_2 .
- c. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e - 1 - \frac{1}{2e^n} = e^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{e^n}.$$

- d. Montrer que la suite $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
- e. Calculer $F(x) - f(x + \ell)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
En déduire une transformation affine T du plan $\mathcal{E}$ telle que l'on ait $T(\gamma) = \Gamma$. Quelle est la nature de T ?

Les parties A et B pourront être abordées indépendamment l'une de l'autre. (e désignera dans tout le problème la base des logarithmes népériens).

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Antilles–Guyane ∞

EXERCICE 1

On considère l'expression

$$f(z) = z^3 - (1 + 14i)z^2 - 2z(29 - i) + 68i$$

où z est un nombre complexe.

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on notera a . Montrer qu'il existe des coefficients complexes b et c tels que

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c).$$

En déduire les autres solutions de l'équation. On notera b la solution dont la partie réelle est négative, c l'autre.

2. Soit A, B, C , les images des nombres complexes a, b, c dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé.
Déterminer les éléments géométriques de la similitude directe laissant A invariant et transformant B en C .

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = -x^3 + x^3 \operatorname{Log} x.$$

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative C dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.
2. Soit a un nombre strictement positif et strictement inférieur à e . En utilisant une intégration par parties, trouver l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = e$.
Cette aire admet-elle une limite lorsque a tend vers 0? La déterminer si elle existe.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de E .

1. Soit φ , l'endomorphisme de E défini par

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{j} \quad ; \quad \varphi(\vec{j}) = -\vec{i} \quad ; \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

Démontrer que φ est une isométrie vectorielle de E . Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par φ .

2. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite D que l'on déterminera.

3. Soit P le plan vectoriel orthogonal à D . On appelle σ la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan P .
Montrer que $\varphi = r \circ \sigma = \sigma \circ r$ où r est une rotation vectorielle dont on déterminera les éléments.
On précisera l'orientation choisie pour la mesure de l'angle.

Partie B

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien associé à E , rapporté au repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points. O', A, B' de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans R sont :

$$O'(a; 0; a) \quad A(a; 0; 0) \quad B'(0; 0; a)$$

où a est un réel strictement positif.

Soit f l'application affine de $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est φ et qui transforme O en O' .

1. Définir analytiquement f . Préciser les coordonnées des points A' et B tels que

$$A' = f(A), B' = f(B).$$

Montrer qu'il existe un seul point invariant I par f .

2. En utilisant A 3., montrer qu'il existe deux isométries affines h et g , non égales à l'identité de $\mathcal{E}$, telles que

$$f = h \circ g = g \circ h$$

Donner la nature et les éléments caractéristiques de h et de g .

3. Soit ℓ un réel strictement positif. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par I de direction P et C_ℓ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que

$$\|\overrightarrow{Mf(M)}\| = 1.$$

Montrer que C_ℓ , est globalement invariant par f . Montrer que l'intersection de C_ℓ et $\mathcal{P}$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon.

4. On note G l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{Of(M)} = 0.$$

Montrer qu'une équation de G dans $\mathbb{R}$ est

$$ax - z^2 + az = 0.$$

Montrer que l'intersection de G et du plan d'équation $y = 0$ est une parabole dont on déterminera le sommet et l'axe de symétrie.

Construire cette parabole dans le cas où $a = 4$.

Partie C

On considère les triplets $F = \{O; A; B\}$ et $F' = \{O'; A'; B'\}$.

On se propose de déterminer l'ensemble Q des isométries affines de $\mathcal{E}$ qui transforment F en F' .

1. Montrer que Q est non vide.
2. Soit q un élément de Q .
 - a. Montrer que $q(0) = O'$.

- b.** Déterminer l'image par q du milieu du bipoint (A, B).
- c.** Soit X l'endomorphisme associé à q . Déterminer les images possibles de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par X . En déduire que P est globalement invariant par X . Montrer alors, que

$$X(\vec{k}) = \vec{k} \quad \text{ou} \quad X(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

- 3.** Déterminer les quatre endomorphismes qui peuvent être associés à q .
- 4.** Déterminer analytiquement tous les éléments de Q .
Vérifier qu'il existe, dans Q , deux déplacements.
Déterminer leur nature et éventuellement leur forme réduite.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Aix-Marseille ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

À tout nombre complexe z , $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $\mathcal{R}$. Le nombre complexe conjugué de z est noté $\bar{z}$. Soit (E) l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - (\bar{z})^2) = 1.$$

Soit r la rotation affine de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) par r .

1. Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère $\mathcal{R}$. Reconnaître la nature de (E') .
2. En déduire le tracé de (E) dans le repère $\mathcal{R}$; on prendra 5cm pour unité graphique.

EXERCICE 2

5 points

(La question 3. peut être traitée indépendamment des deux questions précédentes.)

On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

- La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n , $n \in \mathbb{N}^*$, la particule π est soit en A soit en B.
- Entre deux instants successifs, n et $(n+1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre.

Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n .

On ne demandera pas d'explicitier les espaces probabilisés. Mais nous pouvons traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante :

si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « la particule π est en A au temps n » et B_n l'évènement « la particule π est en B au temps n ».

Ainsi $A_n \cap A_{n+1}$ est l'évènement « la particule π est en A au temps n et aussi au temps $(n+1)$ », ...

Soit respectivement α_n et β_n la probabilité des évènements A_n et B_n .

On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0; 1[$. Nous exprimerons les positions définies ci-dessus par les *hypothèses* :

- $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$),
- La probabilité de $A_n \cap A_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $B_n \cap B_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

1. Calculer, en fonction de θ et β_n , la probabilité de l'évènement $B_n \cap A_{n+1}$ (c'est à dire de l'évènement « la particule π se trouve en B au temps n et en A au temps $(n+1)$).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.
3. Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{(2\theta - 1)^n}{2} + \frac{1}{2}$.

Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME**5 points**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'application de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{si } k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k \sqrt{1-x}, \quad \text{et } f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

I.

1. Étudier la continuité de f_k et la dérivabilité de f_k .
2. Donner, en distinguant selon la valeur de k , le tableau de variation de f_k .
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes C_0 , C_1 et C_2 représentatives de f_0 , f_1 et f_2 .

3. Calculer $\int_0^1 f_0(x) dx$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$.

Montrer, en intégrant par parties, que pour tout entier $k > 1$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}.$$

En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_k(x) dx \leq \frac{1}{k+1}.$$

II. On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{si } x \in [0; 1[\quad \text{et } F(1) = 0.$$

1. Étudier la continuité de F sur $[0; 1]$.
Présenter son tableau de variations.
2. Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$, on note F_n la fonction définie pour tout $x \in [0; 1]$ par :

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x).$$

Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout x réel fixé dans $[0; 1]$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.

3. Pour tout entier $n > 2$, on désigne par A_n l'intégrale $\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x) dx$.

Calculer A_n . Déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Établir que $\int_0^1 F_n(x) dx$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

On pourra écrire :

$$\int_0^1 F_n(x) dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 F_n(x) dx$$

Majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ par $\sqrt{n}$, et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par $\sqrt{n}$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique centrale juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Pour tout n entier naturel, on considère

$$I_n = \int_1^n \text{Log}^n x \, dx.$$

1. Calculer I_0 . À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1} .
2. Montrer, par récurrence que l'on a

$$I_n = a_n e + b_n.$$

avec a_n terme général d'une suite a définie par $a_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel, par

$$a_{n+1} = 1 - a_n(n+1);$$

b_n terme général d'une suite b définie par $b_0 = -1$ et, pour tout n entier naturel non nul, par

$$b_n = n!(-1)^{n-1}.$$

3. Déterminer le signe de I_n .
À l'aide du 1., montrer que l'on a

$$I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Étudier le comportement de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

4 points

Un examen comporte deux épreuves obligatoires : une d'histoire et une d'économie. La question d'histoire est choisie au hasard parmi 30 sujets possibles et la question d'économie choisie au hasard parmi 20 sujets.

On suppose que tous les couples de questions possibles ont la même probabilité d'être obtenus.

Un candidat est reçu s'il connaît à la fois le sujet d'histoire et le sujet d'économie.

1. Un candidat se présente à cet examen en ignorant 6 sujets d'histoire et 5 sujets d'économie. Quelle est la probabilité pour que le candidat soit reçu ?
2. Trois candidats se présentent à cet examen. Ils ignorent tous 6 sujets d'histoire et 5 sujets d'économie. On suppose que le résultat de l'examen pour les trois candidats sont des événements indépendants.
Soit X la variable aléatoire qui associe à cet examen le nombre des candidats reçus. Définir la loi de probabilité de X . Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

EXERCICE 2

4 points

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E . On considère l'application linéaire Φ_a de E dans E , admettant pour matrice dans la base B

$$M_a = \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & 1-a \\ 1-a & -a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

où a est un nombre réel.

Pour quelles valeurs de a , Φ_a est-elle involutive?

Préciser dans chacun des cas la nature de l'endomorphisme et ses éléments caractéristiques.

Partie B

On considère un plan affine euclidien $\mathcal{E}$ associé à E et $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. Soit α et β deux nombres réels. On appelle $f_{\alpha, \beta}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans R , associe le point M' de coordonnées (x', y') dans R telles que

$$\begin{cases} x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} + \alpha \\ y' &= \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \beta \end{cases}$$

Soit $O' = f_{\alpha, \beta}(O)$.

- Déterminer l'ensemble des points O' pour lesquels l'application $f_{\alpha, \beta}$ admet des points invariants.
- On suppose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ et $\beta = -1$. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $f_{2-\sqrt{3}, -1}$. Quelle est l'image de la droite d'équation $x - y\sqrt{3} - 1 = 0$ par $f_{2-\sqrt{3}, -1}$?
- On suppose $\alpha = 4$ et $\beta = 0$. Déterminer le vecteur $\vec{u}$ et la droite affine D de vecteur directeur $\vec{u}$ tels que

$$f_{4, 0} = t_{\vec{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\vec{u}}$$

où $t_{\vec{u}}$ représente la translation de vecteur $\vec{u}$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D .

- On considère la courbe C de $\mathcal{E}$ d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Définir la courbe C , en donner ses éléments caractéristiques et la construire dans R . Déterminer une équation de l'image C' de C par $f_{4, 0}$.

- Soit z l'abscisse du point M et z' l'abscisse du point $M' = f_{4, 0}(M)$. Trouver la relation existant entre z' et z .

Partie C

On considère l'application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans $\mathbb{R}$, associe le point M'' de coordonnées $(x''; y'')$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} x'' &= x\sqrt{3} + y - 3 \\ y'' &= x - y\sqrt{3} + 3. \end{cases}$$

- Montrer que g admet un point invariant, et un seul. Soit Ω ce point.
- Déterminer une homothétie h de centre Ω et une droite affine Δ contenant Ω telles que

$$g = s_{\Delta} \circ h = h \circ s_{\Delta}.$$

où s_{Δ} est la symétrie orthogonale par rapport à Δ .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Besançon ¹ ∞

EXERCICE 1

1. Calculer la somme suivante pour x réel et p entier naturel

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p.$$

2. Montrer que quels que soient les entiers naturels x et n , l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.
3. En déduire que, quel que soit l'entier naturel p , $\left(2^{(2^p)}\right)^k + 1$ est divisible par $2^{(2^p)} + 1$ si l'entier k est impair.
4. Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier naturel m soit une puissance de 2. On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.

EXERCICE 2

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = x$, s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{j}$.

k étant un réel donné on considère l'application du plan dans lui-même associant au point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' définies par :

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= x + ky. \end{cases}$$

Soit f_k cette application.

1. Trouver l'ensemble des points invariants par f_k .
2. Montrer que f_0 est la composée de deux applications simples à déterminer.
3. Trouver l'expression analytique de $f_{k'} \circ f_k$ pour deux réels k et k' quelconques. Donner la nature de la composée pour $k' = -k$.
4. Déterminer analytiquement l'application $f_k \circ s \circ f_k \circ s$. Reconnaître cette application et donner ses éléments caractéristiques, directement ou en utilisant les nombres complexes.

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

2. Déterminer les réels a, b, c tels que, quel que soit le réel t appartenant au domaine de définition de f

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}.$$

3. Montrer l'existence du réel

$$A(x, y) = \int_x^y f(t) dt$$

pour x strictement positif et x strictement inférieur à y .
Donner une interprétation géométrique de ce réel.

Partie B

Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2(1+t)}.$$

1. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t) - f(t) \end{array}$$

admet des primitives. Les calculer.

2. En déduire

$$B(x, y) = \int_x^y g(t) dt$$

pour x strictement positif et x strictement inférieur à y .

3. x étant fixé, trouver la limite $F(x)$ de $A(x, y)$ quand $y \rightarrow +\infty$ puis la limite $G(x)$ de $B(x, y)$ quand $y \rightarrow +\infty$.

Partie C

On suppose x réel positif strictement.

- Étudier les variations de la fonction F .
En déduire que : quel que soit x strictement positif, $0 < F(x)$.
- Étudier les variations de la fonction G . En déduire que quel que soit x strictement positif, $G(x) < 0$.
- Déduire des questions précédentes que : quel que soit x strictement positif,

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

4. Puis que pour tout entier naturel non nul n ,

$$1 < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Et en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Dans $\mathbb{Q}$, résoudre le système à l'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -1 \\ 3x + y - 2z = 2. \end{cases}$$

2. Dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, dont les éléments sont notés $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, résoudre le système à l'inconnue (x, y, z) :

$$\begin{cases} x + \overline{2}y - \overline{4}z = -\overline{1} \\ \overline{3}x + y - \overline{2}z = \overline{2}. \end{cases}$$

EXERCICE 2

4 points

On donne un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ dont le plan vectoriel associé est noté P, un triangle $A_1A_2A_3$ de $\mathcal{P}$ et une similitude $\mathcal{S}$ de P. On note $B_1B_2B_3$ le triangle de $\mathcal{P}$ défini par

$$\overrightarrow{A_2B_1} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_2A_3}), \quad \overrightarrow{A_3B_2} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_3A_1}), \quad \overrightarrow{A_1B_3} = \mathcal{S}(\overrightarrow{A_1A_2}).$$

- On désigne par G l'isobarycentre du triangle $A_1A_2A_3$ (barycentre des sommets affectés de coefficients égaux). Montrer que G est aussi l'isobarycentre du triangle $B_1B_2B_3$.
- On rapporte le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormal direct d'origine G. On appelle a_1, a_2, a_3 les affixes de $A_1A_2A_3$ et b_1, b_2, b_3 les affixes de B_1, B_2, B_3 . On désignera par s le nombre complexe associé à la similitude $\mathcal{S}$ c'est-à-dire que, si z est le nombre complexe associé à un vecteur $\vec{v}$ de P et z' le nombre complexe associé au vecteur $\vec{v}'$ transformé de v par $\mathcal{S}$, on a $z' = sz$.
Montrer qu'il existe, en général, deux similitudes $\mathcal{S}$ telles que le triangle $B_1B_2B_3$ soit équilatéral et que celles-ci sont indépendantes du choix du triangle $A_1A_2A_3$.
Quel est le cas d'exception?

N.B. - On utilisera le nombre complexe j de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

PROBLÈME

12 points

Partie préliminaire

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx.$$

2. Montrer que chacune des cinq fonctions numériques :

$$\begin{aligned}
 x &\longmapsto x - \sin x \\
 x &\longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \\
 x &\longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \\
 x &\longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x \\
 x &\longmapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x
 \end{aligned}$$

ne prend que des valeurs positives (au sens large) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Montrer que, pour $x \in]0; \frac{\pi}{3}[$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

vérifie 1 (x2) 1 1

$$\frac{1}{6} \left(1 - \frac{x^2}{20} \right) \leq g(x) \leq \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}}.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une application continue f_n de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\sin nx \leq f_n(x)$

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin x} \quad \text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Montrer que l'application f_n est dérivable et calculer $f'_n(0)$.

On utilisera les résultats de la partie préliminaire 2.

2. Pour $n \geq 1$, on désigne par C_n la représentation graphique de f_n par rapport à un repère orthonormal donné (unité graphique : 2 cm). Déterminer les abscisses des points communs à C_n et C_{n+1} . Construire C_1, C_2, C_3 .

Interpréter en terme d'aire l'intégrale

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_n(x) dx. \quad (n \geq 2)$$

3. On note $\omega = \int_0^{\pi} \varphi(t) dt$ où φ est l'application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\sin t$.

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.$$

On admettra que l'intégrale ω , que l'on ne cherchera pas à calculer, s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_n(x) dx$$

où la fonction continue φ_n est définie par

$$\varphi_n(0) = n, \quad \varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Pour $n \geq 2$, justifier l'égalité

$$A_n - \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \cdot g(x) \, dx.$$

En déduire $7t(7t^2)7t1$

$$\frac{\pi}{6n^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{20n^2} \right) \leq A_n - \omega \leq \frac{\pi}{6n^2} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{6n^2}}$$

Trouver les limites des suites $(A_n)_{n \geq 2}$ et $(n^2(A_n - \omega))_{n \geq 2}$.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2 .
2. Exprimer $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n et en déduire une expression de I_n ne faisant intervenir aucun symbole d'intégration.

N. B. - On rappelle la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

Durée : 4 heures

♻ Baccalauréat C juin 1982 Lyon ♻

EXERCICE 1

4 points

1. a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$.
b. Résoudre dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i = 0$$

dont on remarquera qu'elle admet une racine z_1 réelle.

On notera $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ ($x_2 < x_3$) les deux autres solutions.

2. On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 .

Calculer le rapport et donner une mesure en radian de l'angle de la similitude plane directe de centre M_1 transformant M_2 en M_3 .

EXERCICE 2

4 points

Pour tout naturel $n \geq 1$ on pose

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties calculer I_1 .
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geq 1$ on a

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geq 1$ on a

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} A.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!}.$$

PROBLÈME

12 points

$\mathcal{P}$ est un plan vectoriel euclidien et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de ce plan, a est un réel et b un réel non nul. On note $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\begin{pmatrix} a & b^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Pour quelles valeurs de a et b , $\varphi_{a,b}$ est-il bijectif? Déterminer, suivant les valeurs de a et de b , le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$.
2. Dans cette question $a = b$.

On appelle h l'homothétie vectorielle de $\mathcal{P}$ de rapport $\frac{1}{2b}$. Démontrer que l'application $p = \varphi_{a,b} \circ h$ est une projection vectorielle dont on précisera les ensembles qui la caractérisent. En déduire que $\varphi_{a,b}$ est égal à la composée d'une homothétie vectorielle, dont on donnera le rapport, et d'une projection vectorielle.

3. Dans cette question $a = 0$ (et b est toujours un réel non nul).
Pour quelles valeurs du réel λ le système d'équations

$$\begin{cases} \lambda x - b^2 y &= 0 \\ x - \lambda y &= 0 \end{cases}$$

d'inconnue le couple $(x; y)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, admet-il d'autres solutions que le couple $(0; 0)$?

Pour chaque valeur de λ trouvée, déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

En déduire qu'il existe deux droites vectorielles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont on donnera des équations cartésiennes, globalement invariantes par $\varphi_{a,b}$. À quelle condition ces droites sont-elles orthogonales?

Partie B

Soit P le plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Dans la suite du problème, toutes les constructions demandées se feront dans un même repère orthonormé, en prenant 2 cm pour unité de longueur sur les axes.

On appelle f l'application affine de P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que

$$\begin{cases} x' &= b^2 y \\ y' &= x + \text{Log} b^2 \end{cases}$$

(où Log est le symbole du logarithme népérien).

1. Quelle est la matrice, relativement à $(\vec{i}, \vec{j})$, de l'endomorphisme associé à f ? Montrer que f est bijective et déterminer analytiquement sa réciproque f^{-1} .
2. Déterminer, suivant les valeurs de b , l'ensemble des points invariants par f . Dans le cas où $b^2 = 1$, reconnaître f .
3. Quelles sont les droites affines D de P transformées en droites $f(D)$ parallèles à D ?
4. Construire les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \text{Log} x$. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}'$ est la transformée de la courbe $\mathcal{C}$ par f .
Soit Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M_0 d'abscisse x_0 .
Démontrer que la tangente à $\mathcal{C}'$ au point $M'_0 = f(M_0)$ est la droite $\Delta' = f(\Delta)$.

Partie C

Soit t un réel. Un point mobile M a pour coordonnées dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, à l'instant t ,

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y(t) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t. \end{cases}$$

1. Construire la trajectoire Γ de M . Quelle est la nature du mouvement de M ?
2. A quels instants le point M coïncide-t-il avec le point A de coordonnées $(0; 1)$. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et Γ admettent en A la même tangente T .
3. Déterminer la nature de la trajectoire Γ' du point $M' = f(M)$.
Dans le cas où $b^2 = 2$ construire Γ' , placer les points $A, A' = f(A), O' = f(O)$ et la droite

$$T' = f(T).$$

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nice ∞

EXERCICE 1

4 points

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On suppose $n \geq 3$.

On tire une boule, qu'on remet dans l'urne après en avoir noté le numéro. On admet que le tirage de chacune des boules est équiprobable. Puis on tire une seconde boule et on en note le numéro.

On appelle X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

- si les numéros sont égaux, X prend leur valeur commune,
- si les numéros sont différents, X prend la valeur du plus grand des deux.

1. Trouver la probabilité des événements suivants :

- E_1 : X prend la valeur 1.
- E_2 : X prend la valeur 2.
- E_3 : X prend la valeur 3.
- E_p : X prend la valeur p (p entier tel que $1 \leq p \leq n$).

2. Calculer l'espérance de X .

On rappelle que la somme des n premiers entiers non nuls est

$$\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

et que la somme des carrés des n premiers nombres entiers non nuls est

$$\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXERCICE 2

4 points

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité.

Tracer $\mathcal{C}$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$.

On désigne par $d(M, D)$ la distance du point M à la droite (D) . Soit P le point de coordonnées $(-4; 6)$; $d(M, P)$ désigne la distance de M à P .

Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, P) = 2d(M, D)$?

PROBLÈME

12 points

On désigne par $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Partie A

On appelle $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynômes P définies par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x) = ax^2 + bx + c,$$

où (a, b, c) est élément de $\mathbb{R}^3$. On appellera θ la fonction polynôme nulle.

On rappelle que $\mathcal{P}_2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension trois, dont la base canonique est (e_0, e_1, e_2) avec

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2.$$

On considère l'application φ de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$, qui à tout élément P associe $\varphi(P) = Q$, avec Q défini par la relation

$$(1) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) : \quad [\varphi(P)](x) = Q(x) = x^2 P'' - (\alpha x + \alpha - 1)P'(x) + P(x)$$

où α est un réel donné, P' et P'' étant les fonctions dérivées première et seconde de P .

1. **a.** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$.
- b.** Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ en fonction de e_0, e_1, e_2 .
 φ étant défini par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x) = ax^2 + bx + c,$$

calculer $\varphi(P)$ en fonction de e_0, e_1, e_2 .

2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$, $(\varphi(e_0), \varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est une base de $\mathcal{P}_2$.

En déduire que φ est un automorphisme de $\mathcal{P}_2$.

Déterminer la fonction polynôme P telle que $\varphi(P) = \theta$.

3. Dans cette question, on suppose $\alpha = 1$.
 - a.** Calculer alors $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.
 - b.** Montrer que φ est une projection vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.
 - c.** Comment faut-il choisir Q dans $\mathcal{P}_2$ pour qu'il existe des fonctions polynômes P de $\mathcal{P}_2$ vérifiant $\varphi(P) = Q$?
 On donne Q défini par $Q(x) = x^2 - 2$. Trouver les fonctions polynômes P solutions de $\varphi(P) = Q$.
4. Dans cette question, on suppose $\alpha = \frac{3}{2}$.
 - a.** Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.
 - b.** En déduire $\text{Im } \varphi$.
 - c.** Déterminer $\text{Ker } \varphi$.

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, et vérifiant la relation

$$(2) (\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \quad x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = 0.$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$, est une solution de (2). Comparer à A 3.

2. On se propose de chercher les éléments f de $\mathcal{F}$, sous la forme $f(x) = xg(x)$ où g est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que (2) équivaut à

$$xg'(x) = d,$$

où d est une constante réelle arbitraire.

b. En déduire la forme générale des fonctions g puis celles des fonctions f .

3. Soit h , la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = x \operatorname{Log} x - 2x.$$

a. Montrer que h est un élément de $\mathcal{F}$.

b. On définit la fonction $\bar{h}$ par

$$\begin{cases} \bar{h}(x) &= h(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \bar{h}(0) &= 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $\bar{h}$ pour $x = 0$.

Étudier les variations de $\bar{h}$ et donner sa représentation graphique dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$.

Préciser la tangente à l'origine.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Reims ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $2n-1$.
2. Montrer que pour tout entier relatif, les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.
3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ soit un entier relatif.

EXERCICE 2

4 points

1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$$

dans l'ensemble des nombres complexes.

2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3. Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

PROBLÈME

12 points

Soit E un plan vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$. On munit l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E de sa structure usuelle d'espace vectoriel. Pour chaque endomorphisme f de E , on note $M(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $T(f)$ le réel $a+d$.

L'application identique de E sera notée Id .

On appelle F l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $M(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec (a, b, d) réels quelconques.

Partie A

On note f_1, f_2, f_3 les endomorphismes de E de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ respectivement dans la base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de base (f_1, f_2, f_3)
2. Trouver deux éléments f et g de F tels que $g \circ f$ ne soit pas dans F
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme r de E , et un seul, vérifiant

$$\begin{cases} r(f_1) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3) \\ r(f_2) &= f_1 - f_3 \\ r(f_3) &= \frac{1}{2}(f_1 - f_2 + f_3). \end{cases}$$

Soit un élément f de F tel que $M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$; calculer (en fonction de a, b, d) $M(f')$ où $f' = r(f)$.

Partie B

Soit t la restriction de T à E

1. Montrer que t est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le noyau de t , noté $\text{Ker } t$ est un plan vectoriel de F contenant toutes les symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de E .
3. Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul de E , on note $S_{\vec{u}}$; la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{u}$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de E et soit α la mesure de l'angle du couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Quelle est la nature de la transformation $R = S_{\vec{v}} \circ S_{\vec{u}}$?

Calculer $T(R)$ en fonction de α .

Partie C

Soit $\varphi : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(f, g) = T(g \circ f)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur F .
2.
 - a. Calculer $\varphi(f, \text{Id})$ pour tout $f \in F$.
 - b. En déduire l'orthogonal de $\text{Ker } t$ pour φ .
3. On reprend l'endomorphisme r de F défini à la question 3. de la première partie.
 - a. Montrer que r est une isométrie vectorielle de F pour le produit scalaire φ .
 - b. Calculer $r(\text{Id})$ et en déduire que $r(\text{Ker } t) = \text{Ker } t$.
 - c. Calculer $\varphi(f, r(f))$ pour tout f élément de $\text{Ker } t$.
 - d. En déduire que r est une rotation de E . Que peut-on dire de son angle ?

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Sport-études septembre 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

- si $x < 0$ alors $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$,
- si $x > 0$ alors $f(x) = xe^{\frac{x-1}{x^2}}$.

1. La fonction f est-elle continue en 0? La fonction f est-elle dérivable en 0?
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. a. Rappeler le résultat de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
b. Montrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe représentative, $\mathcal{C}$ de la fonction f .

Tracer $\mathcal{C}$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 2

4 points

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel, n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2. Trouver tous les entiers naturels, n , tels que

$$3^n \equiv n \pmod{5}.$$

PROBLÈME

12 points

Dans tout le problème, des figures simples pourront suggérer les démonstrations demandées.

Partie A

1. $\mathcal{E}_2$ est un plan vectoriel euclidien orienté et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_2$.
a. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les droites vectorielles de bases respectives :

$$\vec{u}_1 = \vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \vec{j}.$$

Soit s_1 et s_2 les symétries vectorielles orthogonales par rapport, respectivement, à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
Déterminer l'application composée $r = s_2 \circ s_1$.

- b. $\mathcal{D}_3$ est la droite vectorielle de base $\vec{u}_3 = \vec{i} + 4\vec{j}$ et s_3 la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_3$. Montrer que s_3 a pour matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$,

$$\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

- c. Démontrer l'existence d'une symétrie vectorielle orthogonale unique, s_4 telle que

$$s_4 \circ s_3 = s_2 \circ s_1.$$

Donner une base de son axe $\mathcal{D}_4$. Quel est l'angle des droites vectorielles $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$?

2. E_2 est un plan affine euclidien associé à $\mathcal{E}_2$ et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E_2 .
Soit $A(5; 0)$, $B(4; 1)$, $A'(-3; 2)$, $B'(-4; 1)$ quatre points de E_2 .

- a. Montrer qu'il existe un déplacement, f , de E_2 , et un seul, tel que

$$f(A) = A' \quad \text{et} \quad f(B) = B'.$$

Donner sa nature et ses éléments fondamentaux.

- b. m est le point de coordonnées $(0; -3)$ et D la droite ωA , s_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine D . Montrer qu'il existe une droite D' , et une seule, telle que

$$f = s_{D'} \circ s_D.$$

Faire une figure.

- c. R est la rotation de centre A et dont l'angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation affine de vecteur $\vec{AA'}$. Montrer que

$$f = T \circ R.$$

Soit $B_1 = R(B)$. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B_1B$?

- d. g est l'antidépacement tel que $g(A) = A'$ et l'endomorphisme associé est s_1 de $\mathcal{E}_2$ (défini au 1. a.)

Montrer que g est la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur $\vec{v}$ appartenant à la direction de Δ . Préciser Δ et $\vec{v}$ et vérifier que le milieu I de (A, A') est sur Δ .

- e. Montrer que les cinq points O, I, A, B, ω sont cocycliques.

Partie B

$\mathcal{E}_3$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe.

1. σ_1 et σ_2 sont les symétries vectorielles orthogonales par rapport aux droites vectorielles de bases respectives

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{k}.$$

Montrer que l'application $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation vectorielle dont on précisera l'axe et l'angle.

2. σ_4 est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\vec{j}$. Caractériser $\rho = \sigma_4 \circ \sigma_3$ pour cela on étudiera la restriction de ρ au plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$ supposé orienté à l'aide du vecteur $\vec{k}$.

3. E_3 est un espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}_3$ et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de E_3 . C et C' sont les points de coordonnées respectives : $(5; 0; 1)$ et $(-3; 2; 1)$.

- a. R' est l'application affine associée à ρ , telle que $R'(C) = C'$. Montrer que R' est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle; pour cela on étudiera la restriction de R' au plan d'équation $z = 1$.

- b. T' est la translation affine de vecteur $6\vec{k}$. Soit $F' = T' \circ R'$. Donner la nature de F' , ses éléments caractéristiques, ainsi que l'ensemble des points invariants par F' .

L est la droite de E_3 d'équations

$$\begin{cases} y &= & -3 \\ z &= & 1 \end{cases}$$

S_L est la symétrie orthogonale par rapport à la droite L.

Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale par rapport à une droite L' , à déterminer, telle que

$$F' = S_{L'} \circ S_L.$$

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Rouen ∞

EXERCICE 1

4 points

P est un plan vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\mathcal{P}$ est un plan affine, de plan vectoriel associé P , muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

1.
 - a. Étudier les variations de f .
 - b. Tracer sur un même graphique, en prenant 5 cm comme unité de longueur, les courbes :
(C') représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
(C'') représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ dans le même repère;
(C) représentative de la fonction f dans le même repère.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .
On pose $y = f(x)$. Exprimer e^x puis x en fonction de y .
En déduire $f^{-1}(y)$.
Calculer la fonction dérivée de f^{-1} . Tracer la courbe représentative de f^{-1} sur le graphique du 1.
3. λ est un nombre réel positif.
Calculer l'aire S_λ de l'ensemble des points m dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 0 & \leq x & \leq \lambda \\ f(x) & \leq y & \leq e^x \end{cases} \quad \text{On exprimera cette aire en cm}^2$$

S_λ admet-elle une limite quand λ tend vers $+\infty$?

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Amiens ∞

PROBLÈME

14 points

1. Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des applications numériques définies sur $\mathbb{R}$, et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On donne les quatre éléments de $\mathcal{F}$, définis pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = xe^x \quad ; \quad f_2(x) = e^x \quad ; \quad f_3(x) = xe^{-x} \quad ; \quad f_4(x) = e^{-x}.$$

On appelle $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, engendré par la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) .

- a. Soit f , l'élément de $\mathcal{E}$, égal à $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que la dérivée d'ordre n , de f , qu'on note $f^{(n)}$, est définie par

$$f^{(n)}(x) = [a(x+n) + b]e^x + (-1)^n [c(x-n) + d]e^{-x}.$$

(Il est conseillé d'utiliser ce résultat dans la suite du problème.)

- b. Montrer que $\mathcal{E}$ est de dimension 4. (On pourra utiliser le fait que, si $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ est l'application nulle 0, ses trois premières dérivées sont nulles).

2. a. Étudier les variations de l'application f , définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = (4x-6)e^x + (2x+1)e^{-x} - x^2 + x - 5.$$

(Pour l'étude des branches infinies de la courbe représentative (C) on fera seulement une étude précise des limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.)

Donner une allure de la courbe (C) , dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé.

- b. Évaluer l'aire géométrique de la portion de (P) comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

On recherchera une primitive de f en utilisant le 2. a.).

3. On appelle G , l'application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$G(f) = f'' - 2f' + f.$$

Montrer que G est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

Soit h un élément tel que $G(h) = 0$, et g l'élément de $\mathcal{F}$ défini par $g(x) = e^{-x} \cdot h(x)$.

Évaluer la dérivée seconde de g , en déduire que g est une application affine, puis que $\{f \in \mathcal{F}; G(f) = 0\}$ est le plan vectoriel de base (f_1, f_2) .

4. On appelle G_1 la restriction de G à l'ensemble de départ $\mathcal{E}$.

- a. Montrer que G_1 est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- b. Déterminer $\{f \in \mathcal{E}; G_1(f) = 0\}$ et $\{g \in \mathcal{E}; g = G_1(f), f \in \mathcal{E}\}$.

- c. Soit l'application $f_5 = 8f_3 - 4f_4$.

Trouver un élément f_0 du plan engendré par f_3 et f_4 tel que $G_1(f_0) = f_5$.

- d. Trouver une application polynôme, p_0 , du second degré, telle que, $G(p_0) = p$, p étant l'application polynôme définie par $p(x) = x^2 + 5x - 9$.

- e. Prouver que l'ensemble $S = \{f \in \mathcal{F} / G(f) = f_5 + p\}$ est non vide et le déterminer.

- f. Déterminer l'élément f de S , tel que $f(0) = -10$ et $f'(0) = 0$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Rennes ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

($\ln$ désigne le logarithme népérien).

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit λ un réel supérieur à 1 et

$$\Delta_k = \left\{ M(x; y) \left| \begin{array}{ccc} 1 & \leq & x & \leq & \lambda \\ 1 & \leq & y & \leq & f(x) \end{array} \right. \right\}$$

Calculer l'aire $\mathcal{A}(\Delta_k)$ de Δ_k .

Étudier la limite de $\mathcal{A}(\Delta_k)$ quand λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

4 points

1. Étudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
2. Dans le système de numération décimale déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ défini par

$$A(n) = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n.$$

PROBLÈME

12 points

Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel euclidien muni de la base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, P le plan affine euclidien muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Δ) la droite affine d'équation $x - 2y = 0$, (D) la droite vectorielle de base $\vec{j}$.

Dans toute la suite du problème S désigne la symétrie affine par rapport à la droite (Δ) , suivant la droite vectorielle (D) ; σ est l'endomorphisme associé à S .

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications affines bijectives f de P dans P telles que $f \circ S = S \circ f$.

Partie A

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ n'est pas l'ensemble vide et que $\mathcal{F}$ est stable pour la loi de composition des applications, notée $\circ$.
Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe.
2. Au point $M(x; y)$, la symétrie affine S associe un point $M_0(x_0; y_0)$. Donner x_0 et y_0 en fonction de x et y .

3. Soit g l'application de P dans P qui au point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$:

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' &= -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que $g \in \mathcal{F}$.

4. Soit f une application affine bijective de P dans P d'endomorphisme associé φ .
Démontrer que f est élément de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées simultanément :

$$\begin{cases} f(0) \in (\Delta) \\ \exists a \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j}) \exists b \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(\vec{j}) = b\vec{j} \end{cases}$$

Écrire alors en fonction de a et b la matrice M de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Vérifier ce résultat dans le cas particulier étudié au 3.

5. **a.** Préciser les couples (a, b) pour que f soit une homothétie (caractériser géométriquement f).
b. Préciser les couples (a, b) pour que f soit une translation. Caractériser f .
6. On appelle $\mathcal{F}_1$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ dont l'endomorphisme associé φ vérifie $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$.
a. Montrer que $(\mathcal{F}_1, \circ)$ est un groupe.
b. Soit f_1 un élément de $\mathcal{F}_1$.

Démontrer que $M(x; y)$ a pour image $f_1(M) = M'$ de coordonnées $(x'; y')$:

$$\begin{cases} x' &= ax + 2\alpha \\ y' &= \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points invariants par f_1 ? (On discutera selon les valeurs de a et de α).

- c.** Vérifier que l'application g proposée au 3. est un élément de $\mathcal{F}_1$. On note $M' = g(M)$.
Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par g . Si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera.
Calculer alors les coordonnées du point M_1 commun à la droite (MM') et à (E). Comparer $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{M_1M}$; en déduire une construction géométrique de M' .

Partie B

1. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = e^x + \frac{1}{2}x.$$

Étudier et représenter F dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de F .

2. **a.** Soit f_1 un élément quelconque de $\mathcal{F}_1$. Déterminer une équation de l'image de (C) par f_1 .

- b.** Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(C_{m, p})$ la courbe d'équation

$$y = e^{mx+p} + \frac{1}{2}x$$

dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que $(C_{m, p})$ est l'image de (C) par une application appartenant à $\mathcal{F}_1$.

- 3.** Soit Γ la courbe d'équation

$$y = e^{-2x+2} + \frac{1}{2}x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, reconnaître l'application élément de $\mathcal{F}_1$ qui transforme (C) en Γ .

Dessiner Γ à partir du tracé de (C) .

- 4.** Construire l'image (C') de (C) par $g \circ S$.
- 5.** $(m', p') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer, en utilisant A 6. a. que toute autre courbe $(C_{m', p'})$ est l'image de la courbe $(C_{m, p})$ par une application appartenant à $\mathcal{F}_1$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Orléans-Tours ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, l'équation (1)

$$(1) \quad 2(1+i)z^2 + 2(a+i)z + ia(1-i) = 0$$

où z est l'inconnue complexe et a un paramètre réel.

2. À tout nombre complexe z , on associe dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ le point M d'affixe z .

Déterminer l'ensemble E des points, images des solutions de l'équation (1), quand a décrit $\mathbb{R}$.

3. Quel est l'ensemble transformé de l'ensemble E par la similitude directe plane S , de centre $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, d'angle $\frac{\pi}{4}$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

EXERCICE 2

4 points

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle $\mathcal{C}$ le cube de sommets : O, A, B, C, D, E, F, G , défini par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \vec{i}, \overrightarrow{OC} = \vec{j}, \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \vec{k}. \end{aligned}$$

1. Dessiner $\mathcal{C}$; soit r_1 la rotation de $\mathcal{E}$, d'axe (OA) dirigé par $\vec{i}$, dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$; soit r_2 la rotation de $\mathcal{E}$, d'axe (OC) dirigé par $\vec{j}$, dont une mesure de l'angle est $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_1 \circ r_2$.

Montrer que f et g sont des relations de $\mathcal{E}$, définies par

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} & \mapsto & f(M) \begin{vmatrix} -y \\ -z \\ x \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} & \mapsto & g(M) \begin{vmatrix} -z \\ -x \\ y \end{vmatrix} \end{array}$$

(On ne cherchera ni l'axe ni l'angle de chacune des rotations f et g).

2. On note $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$, les images respectives par f des points A, B, C, D, E, F, G , et $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2$, les images respectives par g des points A, B, C, D, E, F, G .

Montrer que $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1\} = \{A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2\}$

3. On pose $\varphi = g \circ f^{-1}$. Quelle est l'image $\mathcal{C}_2$ par φ de la liste ordonnée de points $\mathcal{C}_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1)$?

Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'axe.

PROBLÈME

4 points

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$x \mapsto f(x) = x \operatorname{Log} \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

où Log désigne la fonction logarithme népérien de base e .

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f ; étudier la continuité et la dérivabilité de f , en énonçant les théorèmes utilisés.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f' , fonction dérivée de f , et en déduire les variations de f' .
b. Soit F la restriction de f' à l'intervalle $I =]-1; 0[$.
 Démontrer que F est une bijection de I sur un intervalle à préciser. En déduire que dans I , l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique, notée a ; on ne cherchera pas à calculer a , mais on montrera que $a > 2$.
c. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.
d. Des résultats précédents, déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in D_{f'}$ et les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de $D_{f'}$ (on pourra utiliser le changement de variable $X = \frac{1}{x}$).
4. Pour une étude locale de f au voisinage de zéro, on adoptera le plan suivant :
 Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\mapsto h(x) = f(x) \\ 0 &\mapsto h(0) = 0. \end{aligned}$$

- a.** Démontrer que h est le prolongement par continuité de f en zéro.
- b.** Étudier la dérivabilité de h en zéro.

Conclusion de la partie A : Donner le tableau de variations de f et construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans P plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, en précisant l'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses.

Partie B

P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit s l'application de P dans P définie par

$$s: P \rightarrow P \\ M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \mapsto s(M) = M' \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} \quad \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = y \end{cases}$$

1. Déterminer la nature et les points invariants de s .
2. Soit $(\mathcal{C}')$ l'image de $(\mathcal{C})$ par s , $(\mathcal{C})$ étant la courbe représentative dans P de la fonction f étudiée dans la partie A. Construire $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant $(\mathcal{C}')$ comme courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculer $g(x)$ et préciser D_g ensemble de définition de g .
3. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.

Partie C

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < 1 < g(n)$.

En déduire l'encadrement suivant de e :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Préciser cet encadrement pour $n = 1$. Soit $\ell(n)$ la largeur de cet encadrement c'est-à-dire

$$\ell(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell(n)$ est majoré par $\frac{4}{n}$ et minoré par $\frac{2}{n}$.

2. Donner un rang à partir duquel l'encadrement ci-dessus de e permet d'obtenir une valeur approchée de e à 10^{-3} près, c'est-à-dire

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < 10^{-3}.$$

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat C Maroc juin 1982 ❧

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan affine euclidien E , on considère le triangle ABC isocèle rectangle en A tel que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 3a \quad (a \in \mathbb{R}_+^*).$$

1. Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4, -3, 2. Construire ce point.

2. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $M \mapsto f(M) = 4\|\overrightarrow{MA}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2.$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$f(M) = -36a^2.$$

Représenter cet ensemble.

EXERCICE 2

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit f l'endomorphisme de E défini par.

$$f(\vec{i}) = f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

1. Déterminer l'ensemble image $\text{Im } f$ et le noyau $\text{Ker } f$ de l'endomorphisme f . Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de l'espace vectoriel E .
2. a. Montrer que $f \circ f = 3f$.
b. Démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de E ,

$$\vec{u} \in \text{Im } f \iff f(\vec{u}) = 3\vec{u}.$$

3. On désigne par id_E l'application identique de E . Montrer qu'on peut trouver un réel α non nul tel que l'endomorphisme $g = \alpha f - \text{id}_E$ soit une involution. Montrer alors que g est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à $\text{Im } f$.

PROBLÈME

12 points

Soit P un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ direct. On appelle $\mathcal{P}$, le plan vectoriel associé à P .

Partie A

Pour tout réel a non nul, on considère l'application affine F_a de P dans P qui au point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = ia\bar{z} + 2a(1 - i)$$

avec $\bar{z} = x - iy$.

1. Donner suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants de F_a .
2. Pour quelles valeurs de a , F_a est-elle une isométrie de P ?
Dans chaque cas préciser les éléments caractérisant F_a .

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log} \left(\frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} \right).$$

On appelle (Γ) sa courbe représentative dans le plan affine P .

1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + \text{Log} \left[\frac{1 + 3e^{-2x}}{1 - e^{-x}} \right]$.
Étudier la fonction f . Préciser les asymptotes à Γ . Construire Γ (unité : 2 cm).
2. On appelle g la restriction de f à l'intervalle $I = [\text{Log} 3; +\infty[$.
Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
Énumérer les propriétés de g^{-1} .
Sans calculer $(g^{-1})(x)$ déterminer $(g^{-1})'(\text{Log} 7)$ (nombre dérivé de (g^{-1}) au point $\text{Log} 7$).
3. α étant un réel strictement positif, résoudre $f(x) = f(\alpha)$.
4. Étudier les variations de la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
 $v(x) = \text{Log} \left(\frac{e^{2x} + 3}{e^x - 1} \right)$ (ne pas construire sa courbe).
Calculer $v(\text{Log} 3)$.
5. Soit $F = g^{-1} \circ f$.
Donner l'ensemble de définition de F .
Exprimer $F(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie B

On considère le mouvement d'un point m de P dont les coordonnées sont données à l'instant t par

$$\begin{cases} x &= \text{Log} \left(t + 2 + \frac{4}{t} \right) + 2 \\ y &= \text{Log}(t + 1) - 2. \end{cases}$$

Soit (γ) la trajectoire de m lorsque t décrit $\mathbb{R}_+^*$.

1. Donner une équation cartésienne de la courbe (γ') transformée de (γ) par l'application F_1 (de la partie A 2. avec $a = 1$).
2. À l'aide de la courbe (Γ) tracée en B, construire la trajectoire (γ) .
Déterminer les asymptotes à (γ) .
3. Donner le nombre de points de (γ) d'abscisse 4.
La courbe (γ) est-elle la courbe représentative d'une fonction numérique?

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Centres étrangers groupe 1 bis juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Démontrer que, si un entier naturel premier p est tel que la somme de tous les diviseurs de p^4 est le carré d'un entier naturel n , alors

$$2p^2 + p < 2n < 2p^2 + p + 2.$$

En déduire l'existence et l'unicité de p ainsi que le calcul du couple (p, n) .

EXERCICE 2

4 points

Dans un plan affine euclidien orienté, une similitude directe $\mathcal{S}_O$ de centre O transforme un couple donné (A, B) de points distincts, autres que O, en un couple (A', B').

La similitude directe $\mathcal{S}_A$ de centre A qui transforme B en B', transforme O en P. La similitude directe $\mathcal{S}_B$ de centre B qui transforme A en A', transforme O en Q.

Démontrer que O est le milieu de (P, Q).

PROBLÈME

12 points

On donne les deux applications numériques

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -1 + \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \\ \varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{1+|x|} \end{aligned}$$

1. Démontrer que f et φ sont paires, continues et dérivables.

Étudier $f(x)$ et $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que les courbes représentatives $\mathcal{C}$ de f et Γ de φ rapportées au repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ (unité : 2 cm) admettent pour asymptotes deux droites ayant respectivement pour équation

$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = -x - 1.$$

Étudier les variations de f et de φ .

2. Démontrer que, quel que soit x réel,

$$1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad f(x) \leq \varphi(x).$$

En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ que l'on construira en plaçant les points d'abscisses 1, 2, 3, 4 notamment, points dont les ordonnées seront calculées à 0,1 près par excès. Justifier la position de $\mathcal{C}$ et Γ par rapport à leurs asymptotes communes.

3. Démontrer que l'application numérique

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

est paire, continue et dérivable et que l'application numérique

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{Log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

est l'une de ses primitives.

(Log désigne le logarithme népérien).

Démontrer par une intégration par parties que

$$\int_0^x \sqrt{1+u^2} du = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\text{Log}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ ensemble des points M dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que

$$0 \leq x \leq 4 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq \varphi(x).$$

Calculer la valeur numérique de $\mathcal{A}$ à 0,01 près par défaut.

4. Soit $\mathcal{C}_\alpha$ le cercle passant par O origine de $\mathcal{R}$ et centré en I dont le couple de coordonnées est $(0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$.

Former l'équation aux *ordonnées* des points communs à C et $\mathcal{C}_\alpha$. Montrer que ces deux courbes ont deux points communs A et A' autres que O si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Dans la suite $a(\alpha)$ désigne la valeur absolue commune des abscisses de A et A'.

Démontrer que la droite AA' coupe le segment [OI].

Pour quelle valeur α_1 de α , A, A' et O sont-ils confondus?

Démontrer que α_1 est la limite de $\frac{x^2}{2f(x)}$ quand x tend vers zéro.

Calculer l'ordonnée $q(x)$ du point Q d'abscisse x de l'arc $\widehat{AOA'}$ de $\mathcal{C}_\alpha$. Démontrer que

$$|x| \leq a(\alpha) \Rightarrow f(x) \geq q(x).$$

En déduire la position relative des arcs $\widehat{AOA'}$ de C et $\mathcal{C}_\alpha$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Bordeaux ∞

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien P on considère un triangle équilatéral (A, B, C) inscrit dans un cercle (Γ) .

Soit M un point, distinct de A et de C , situé sur celui des arcs AC dont B n'est pas élément. I est le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.

1. Montrer que le triangle (I, M, A) est équilatéral.
2. On oriente le plan P de façon qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $+\frac{\pi}{3}$. Soit r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $+\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les images par r des points B et I .
En déduire

$$MA + MC = MB.$$

EXERCICE 2

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et i un élément de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1+2i)z^3 - 4(1-6i)z^2 - 8\sqrt{3}(4-6i)z - 192.$$

Démontrer qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{C}$ tels que pour tout élément z de $\mathbb{C}$:

$$f(z) = (z^2 + 2\sqrt{3}z + 2i)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Préciser le module et l'argument de chaque solution.

Calculer le produit de ces quatre racines.

PROBLÈME

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ω étant un nombre réel non nul, on considère les fonctions f_ω et g_ω , de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f_\omega(x) = e^{-\omega x} \sin \omega x \quad \text{et} \quad g_\omega(x) = e^{-\omega x} \cos \omega x$$

et $\mathcal{F}_\omega$ désignera le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par f_ω et g_ω .

Partie A

1. **a.** Démontrer que le couple (f_ω, g_ω) détermine une base de $\mathcal{F}_\omega$.
b. Montrer que tout élément de $\mathcal{F}_\omega$ admet une dérivée élément de $\mathcal{F}_\omega$.
2. On considère l'application φ_ω de $\mathcal{F}_\omega$ vers $\mathcal{F}_\omega$, qui à tout élément f de $\mathcal{F}_\omega$ fait correspondre la fonction dérivée f' de f .
a. Démontrer que φ_ω est un endomorphisme de $\mathcal{F}_\omega$; déterminer sa matrice M_ω , relativement à la base (f_ω, g_ω) ; montrer que φ_ω est bijectif.

- b. À la matrice M_ω est associé le nombre complexe $z_\omega = -\omega + \omega i$. (i étant un nombre complexe tel que $i^2 = -1$).
Déterminer les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 1 pour lesquels z_ω^n est un nombre réel; quelle est alors la nature de l'endomorphisme $\varphi_\omega^n = \varphi_\omega \circ \varphi_\omega \circ \dots \circ \varphi_\omega$, composé de n termes égaux à φ_ω .

Partie B

1. On pose $\omega = 2$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-2x} \sin 2x \end{aligned}$$

- a. Étudier les variations de f_2 pour x appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
b. Soit $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = e^{-2x} \sin 2x$ et $y = e^{-2x}$ relativement à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Calculer les abscisses des points communs à $\mathcal{C}$ et Γ et démontrer qu'en chacun de ces points les courbes $\mathcal{C}$ et Γ ont même tangente.
c. Construire l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à l'intervalle $[0; \pi]$ dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 3$ et $\|\vec{j}\| = 10$, en centimètres). Construire également Γ .
2. a. Déterminer pour $\omega = 2$ l'endomorphisme réciproque φ_ω^{-1} de l'endomorphisme φ_ω , de la question A 2. En déduire les primitives, sur $\mathbb{R}$, des fonctions f_2 et g_2 .
b. Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$F(X) = \int_0^X f_2(x) dx.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(X)$.

3. a. Calculer $\int_0^\pi e^{-2x} \sin 2x dx$ et $\int_0^\pi e^{-2x} \cos 2x dx$.
En déduire $\int_0^\pi e^{-2x} \sin^2 x dx$ et $\int_0^\pi e^{-2x} \cos^2 x dx$.
b. a et b étant deux nombres réels calculer

$$I(a, b) = \int_0^\pi (ae^{-x} \sin x + be^{-x} \cos x)^2 dx$$

en fonction de a et b .

- c. Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, I(a, b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ et en déduire que l'application Φ de $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

est un produit scalaire.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Les éléments de l'anneau $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ sont notés $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{8}$. Soit a un élément de $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$.
On définit une application f_a de $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ dans lui-même par

$$f_a(x) = ax + i.$$

1. Pour quelles valeurs de a l'application f_a est-elle bijective?
2. On pose dans la suite $a = \dot{5}$ et on note f l'application $f_{\dot{5}}$.

Résoudre dans $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ l'équation

$$f(x) = x.$$

3. On définit une suite à valeurs dans $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ par 105

$$\begin{cases} u_0 &= \dot{3} \\ u_n &= f(u_{n-1}). \end{cases}$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , non nul, on a

$$u_n - \dot{2} = \dot{5}(u_{n-1} - 2).$$

- b. En déduire u_n en fonction de n .

Démontrer que la suite u est périodique et déterminer sa période.

Calculer u_{1982} .

EXERCICE 2

4 points

La fonction numérique f de la variable réelle x est définie par

$$f(x) = \text{Log}(\sqrt{x^2 + 4} - x).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Montrer que la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé du plan admet le point $I(0, \text{Log} 2)$ comme centre de symétrie.
3. Étudier les variations de f et construire la courbe C .

PROBLÈME

12 points

Partie A

1. Vérifier que

$$3z^3 - z^2 - z - 1 = 3(z-1)(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})$$

où

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{2}$$

2. Calculer $|\alpha|$; α^2 .3. On définit les deux suites *réelles*, a et b telles que pour tout entier naturel n

$$\alpha^n = a_n + ib_n.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$|a_n| \leq |\alpha^n|$$

$$|b_n| \leq |\alpha^n|$$

En déduire que les limites des suites a et b sont égales à 0.

Partie B

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles. On définit la somme de deux suites u et v , comme la suite $u+v$ de terme général $u_n + v_n$. On définit le produit de la suite u par le réel λ , comme la suite $\lambda.u$ de terme général $\lambda.u_n$.

$\mathcal{E}$ muni de ces opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{F}$ désigne le sous-ensemble des suites de $\mathcal{E}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\} \quad 3u_{n+1} - u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0.$$

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.2. Démontrer que l'application Φ , de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}^3$, qui, à toute suite u de $\mathcal{F}$ fait correspondre le triplet (u_0, u_1, u_2) de ses trois premiers termes, est un isomorphisme d'espace vectoriel.

3. a. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\} \quad 3\alpha^{n+1} - \alpha^n - \alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} = 0.$$

b. En déduire que les suites a et b appartiennent à $\mathcal{F}$.Soit, d'autre part, la suite réelle c telle que pour tout entier naturel n

$$c_n = 1.$$

c. Montrer que $c \in \mathcal{F}$.Calculer $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, $\Phi(c)$. En déduire que (a, b, c) est une base de $\mathcal{F}$.

4. Soit d la suite de $\mathcal{F}$ définie par le triplet de ses trois premiers termes $\Phi(d) = (0, 1, 0)$.
Déterminer les coordonnées (X, Y, Z) de la suite d dans la base (a, b, c) . En déduire la limite de d .
5. Soit d' la suite de $\mathcal{F}$ définie par le triplet $\Phi(d') = (0, 0, 1)$. Déterminer les coordonnées (X', Y', Z') de la suite d' dans la base (a, b, c) .
En déduire la limite de d' .

Partie C

Soit un plan affine P et trois points, non alignés, G_0, G_1, G_2 de ce plan. On considère le repère cartésien $(G_0; \vec{i}, \vec{j})$ où

$$\begin{cases} \vec{i} &= \overrightarrow{G_0 G_1} \\ \vec{j} &= \overrightarrow{G_0 G_2} \end{cases}$$

On définit une suite de points $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée des trois premiers points G_0, G_1, G_2 et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, G_{n+1} , isobarycentre des points G_n, G_{n-1}, G_{n-2} ?

1. Calculer les coordonnées des points G_3, G_4, G_5 dans le repère $(G_0; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit T l'application affine telle que

$$T(G_0) = G_3 ; T(G_1) = G_4 ; T(G_2) = G_5.$$

- a. Déterminer le point $T(G_3)$.
 - b. Déterminer la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'endomorphisme associé à l'application affine T .
 - c. Exprimer en fonction des coordonnées $(x; y)$ d'un point M de P , les coordonnées $(x'; y')$ de son image M' par T .
 - d. Montrer que T laisse un point invariant I .
3. Pour tout entier naturel n , on note x_n et y_n les coordonnées du point G_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathcal{F}$ et qu'elles sont égales aux suites d et d' de la partie B.
Que peut-on conclure pour la suite des points G_n ?

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1982 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = -2 + \text{Log} |x^2 - 4| \quad (\text{où Log désigne le logarithme népérien}).$$

1. Étudier les variations de f et la représenter dans un repère orthonormé. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Soit $I =]-\infty; -2[$ et soit f_1 la restriction de f à I .
Montrer que f_1 est une bijection de I vers $\mathbb{R}$ et expliciter la bijection réciproque f^{-1} .

EXERCICE 2

4 points

1. Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p .
 - a. Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$). En déduire que p divise a . Montrer que p divise b .
 - b. Démontrer que le PGCD de a et b est, soit p , soit p^2 .
2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que $\text{PGCD}(a+b, ab) = 49$ et $\text{PPCM}(a, b) = 231$.
 - a. Soit a et b deux tels entiers. Montrer que leur PGCD est 7.
 - b. Quelles sont les solutions du problème posé?

PROBLÈME

12 points

Partie A

Soit f la fonction d'une variable numérique réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}.$$

1. Soit P un plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Étudier les variations de f et la représenter graphiquement dans P .
On appellera C la courbe ainsi obtenue.
2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $] -\infty; 2[$.
3. Vérifier que pour tout réel x différent de 2, on a

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

En déduire les points de C dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

4. Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} \frac{k+4n}{k-2n}.$$

Montrer que S_n est une somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Partie B

Soit u_1 un nombre réel tel que $u_1 < 2$.

1. Montrer (en utilisant la question A 2.) que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, dont le premier terme est le nombre u_1 donné et telle que

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{u_n - 2}.$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de u_1 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante? Retrouver ce résultat en utilisant la courbe C tracée dans la partie A.
3. Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}.$$

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

1. Déterminer les images respectives $\vec{I}$ et $\vec{J}$ des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.
2. Soit $R' = (O'; \vec{I}, \vec{J})$, O' étant défini par

$$\vec{OO'} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Déterminer une équation de la courbe C dans le repère R' .

Déterminer les éléments (foyers, sommets et excentricité) de cette conique C.

Partie D

À tout nombre complexe z différent de 2, on associe le $z+4$ nombre complexe

$$Z = \frac{z+4}{z-2}.$$

1. Exprimer les parties réelle X et imaginaire Y de Z en fonction des parties réelle x et imaginaire y de z .
2. On rappelle qu'à tout nombre complexe z est associé un point M de $\mathbb{P}$, qui est son image. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathbb{P}$, images de nombres complexes z tels que Z soit imaginaire pur.
3. Soit λ un nombre réel non nul. Quelle condition doivent vérifier les parties réelle et imaginaire x et y de z pour que les parties réelle et imaginaire X et Y de Z vérifient l'équation

$$Y = \lambda X.$$

Déterminer l'ensemble F_λ des points M de $\mathbb{P}$ images des nombres complexes z vérifiant cette condition. Déterminer, lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$, l'ensemble des centres des courbes F_λ . Montrer que ces courbes F_λ passent par deux points de $\mathbb{P}$ dont les coordonnées sont indépendantes de λ .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Caen ∞

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que
P.G.C.D. (a, b) + P.P.C.M. $(a, b) = b + 9$.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'application ν de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que

$$\begin{cases} x &= -x+2 \\ y' &= z+1 \\ z' &= y+1 \end{cases}$$

1. Soit $f = h_1 \circ \nu$, application composée de ν par h_1 , où h_1 est l'homothétie de centre $A(1; 0; 0)$ et de rapport 2.

Démontrer que f admet un unique point invariant B.

2. Soit $r = h_2 \circ \nu$, application composée de ν par h_2 , où h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

Démontrer que r est un demi-tour d'axe une droite D , que l'on précisera.

3. En déduire que ν est un vissage.

Préciser les éléments caractéristiques de ce vissage.

PROBLÈME

N.B. - Les parties B et C de ce problème sont indépendantes.

Soit λ un réel non nul, on considère la fonction f_λ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f .
Étudier les variations de f'_λ .
2. Discuter, selon le réel λ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x ,

$$f'_\lambda = 0.$$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les quatre cas $\lambda < 0$; $0 < \lambda < e$; $\lambda = e$; $\lambda > e$).

3. Déduire de ce qui précède, le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ .
4. Étudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe C_λ .

5. Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes C_λ .
6. Soit I_λ le point de C_λ dont l'abscisse est 1. Écrire une équation de la tangente D_λ en I_λ à la courbe C_λ .
Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.
7. On se propose de tracer avec précision les courbes C_{-1} , C_e , C_4 . Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétrique en prenant 2 cm comme unité.
 - a. On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation d'inconnue x , $f'_{-1}(x) = 0$, n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0,57$ et $-0,56$.
Construire la courbe C_{-1}
 - b. Tracer C_e .
 - c. Montrer que l'équation d'inconnue x , $f'_4(x) = 0$, a deux solutions : x_1 comprise entre $0,35$ et $0,36$ et x_2 comprise entre $2,15$ et $2,16$.
Tracer C_4 .

Partie B

1. Montrer que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble de ces primitives.
2. Montrer que, pour chaque réel non nul λ , on peut définir une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} & \varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda. \end{cases}$$

Calculer $\varphi_1(x)$. Montrer, par récurrence, pour tout naturel n non nul et tout réel x

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n + 1}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (x+n+1) e^{-x}.$$

C

On suppose dans cette partie $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$.

1. Montrer que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à -1 .
En déduire que, si $-1 < x < 0$, alors, $-1 < \lambda < 0$.
2. On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) = u_n + \lambda(u_n + 1)e^{-u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que :

- a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n < 0$,
- b. la suite u est décroissante,
- c. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < (1+\lambda)(u_n + 1)$.

En déduire que la suite u est convergente et trouver sa limite.

Durée : 4 heures

♧ Baccalauréat C juin 1982 Grenoble ♧

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^6 = -1$ où z est l'inconnue.
2. Mettre le polynôme $x^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes à coefficients réels.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \text{Log} \left| \frac{x}{x+1} \right|.$$

1. Étudier f et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.
2. **a.** Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Calculer l'aire géométrique $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$. (On pourra intégrer par parties).
- b.** Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$.

PROBLÈME

12 points

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E . On notera Id l'application identique de E , θ l'application nulle de E . Pour tout élément φ de $\mathcal{L}(E)$ on pose $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi + \varphi = 2\varphi$.

Partie A

On étudie dans cette partie les éléments φ de $\mathcal{L}(E)$ tels que

$$(1) \quad (\varphi - \text{Id})^2 = \theta.$$

1. Montrer que $(\varphi - \text{Id})^2 = \theta$ équivaut à $2\varphi - \varphi^2 = \text{Id}$. En déduire que si φ est solution de (1) alors φ est bijectif et préciser φ^{-1} .
2. **a.** Quelles sont les homothéties vectorielles solutions de (1)?
b. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E , φ_1 et φ_2 les endomorphismes de matrices respectives

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que φ_1 et φ_2 sont solutions de (1).

En déduire qu'il existe un élément Ψ de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\Psi \neq \theta$ et $\Psi^2 = \theta$.

3. Soit φ une solution de (1) et λ un réel : démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que $\varphi(\vec{U}) = \lambda \vec{U}$ si, et seulement si, $\lambda = 1$.
4. **a.** Soit Ψ un élément de $\mathcal{L}(E)$ différent de θ tel que $\Psi^2 = \theta$.
Soit $\vec{U}_0$ un vecteur de E tel que $\vec{U}_0 \neq \theta$: montrer que $(\Psi(\vec{U}_0), \vec{U}_0)$ est une base de E . Donner la matrice de Ψ dans cette base.

- b. En déduire que, pour φ solution de (1) et $\varphi \neq \text{Id}$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Soit φ une solution de (1) autre que l'identité.
On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par φ et Id .
- a. Démontrer que la dimension de F est 2.
- b. Démontrer que F muni de l'addition des applications et de la composition des applications a une structure d'anneau commutatif unitaire.
Déterminer G , l'ensemble des éléments inversibles de F .
Quelle est la structure de $(G, \circ)$?

Partie B

On étudie dans cette partie les applications affines du plan affine P associé à E laissant au moins deux points distincts invariants.

On considère dans P , trois points non alignés A, B, C et C' un point quelconque de P .

Soit f l'application affine laissant A et B invariants et transformant C en C' et φ l'endomorphisme associé. ($f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C'$).

- On suppose $C = C'$. Que peut-on dire de f ? Dans la suite du problème on suppose $C \neq C'$.
- Montrer que la droite AB est invariante point par point par f .
- On suppose les droites AB et CC' sécantes en O . Soit $(x; y)$ les coordonnées d'un point M de P dans le repère $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC})$.
 - Calculer les coordonnées $(x'; y')$ de $M' = f(M)$.
 - Quelle est la nature de f si $C' = O$?
 - Si $C' \neq O$ étudier comment se transforment les droites parallèles aux axes.
- On suppose que les droites AB et CC' sont parallèles. Soit k tel que $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{AB}$.
 - Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \frac{1}{k}\overrightarrow{AC})$ exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' image par f d'un point M de coordonnées $(x; y)$.
Vérifier que $(\varphi - \text{Id})^2 = \theta$.
 - Démontrer que, pour tout point M de P

$$\overrightarrow{Mf(M)} = y\overrightarrow{AB}$$

(y est l'ordonnée de M).

En déduire une construction géométrique de $f(M)$. (On envisagera les cas : CM est parallèle à AB , CM n'est pas parallèle à AB).

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Montpellier ∞

EXERCICE 1

4 points

On considère l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (n, p) &\mapsto 2^n(2p+1).\end{aligned}$$

1.
 - a. Calculer $\varphi(0, 0)$, $\varphi(3, 4)$ et $\varphi(2, 6)$.
 - b. Décomposer 1 584 en produit de facteurs premiers. Déterminer l'antécédent de 1 584 par φ .
 - c. Montrer que φ est bijective.
2. On définit une loi de composition interne notée T dans $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \forall (n', p') \in \mathbb{N}^2, \quad (n, p)T(n', p') = (n + n', 2pp' + p + p').$$

- a. Calculer $(3, 4)T(2, 6)$.
- b. Résoudre l'équation $(3, 4)T(n, p) = (4, 49)$.
- c. Démontrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{N}^2, T)$ sur $(\mathbb{N}^*, \times)$.
- d. Est-ce que $(\mathbb{N}^2, T)$ admet un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?

EXERCICE 2

4 points

On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β .

1. Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul ?
2. Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).
Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de (A, |b|) et (B, |a|).
3. À l'aide du 1. montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif.

Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

PROBLÈME

12 points

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{(a, b)} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a & b-a \end{pmatrix} \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

On pose $I = M_{(0, 1)}$ et $J = M_{(1, 0)}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de base (I, J) de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 .
2. Calculer J^2 . En déduire que si $M \in E$, $M' \in E$ alors $M \times M' \in E$.
Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. Quelles sont les matrices $M_{(a, b)}$ inversibles dans E? Exprimer alors $M_{(a, b)}^{-1}$ dans la base (I, J).

Partie B

Dans ce qui suit on suppose $b = 0$.

Soit V le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit P un plan affine d'espace vectoriel associé V; P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f_a l'application affine de P dans P dont l'endomorphisme associé a pour matrice dans $(\vec{i}, \vec{j})$

$$M_{(a, 0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

et qui au point O fait correspondre le point $O'(0; a+3)$.

1. Déterminer analytiquement f_a .
2. Pour quelles valeurs de a, f_a est-elle une bijection?
Déterminer analytiquement, quand elle existe f_a^{-1} .
3. Déterminer suivant les valeurs de a, l'ensemble D des points invariants par f_a .
4. Démontrer que seule l'application f_1 , obtenue pour la valeur 1 du paramètre a, est une involution que l'on caractérisera.
5. f_a peut-elle être une isométrie?
6. On prend $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit G le barycentre des points $A(\alpha; \alpha)$, $B(\alpha; 2)$, $C\left(\alpha; -2\frac{\text{Log } \alpha}{\alpha}\right)$.
Trouver les coordonnées de G; en déduire une équation cartésienne de la courbe décrite par G quand α varie dans $\mathbb{R}_+^*$.
7. Soient A_1, B_1, C_1 les images des points A, B, C par l'application f_1 (définie en B 4.).
Soit G_1 le barycentre de A_1, B_1, C_1 respectivement affectés de 1, 2, -1.
Trouver une équation cartésienne de la courbe décrite par G_1 quand α varie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Partie C

Soit ($\mathcal{C}$) la courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{\text{Log } x}{x}.$$

1. On considère la fonction

$$h: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 - 2\text{Log } x + 2 \end{cases}$$

Étudier les variations de h et préciser le signe de $h(x)$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).

2. Étudier les variations de la fonction g. Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que ($\mathcal{C}$) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe ($\mathcal{C}$).

3. Soit $(\mathcal{C}_1)$ la transformée de $(\mathcal{C})$ par f_1 (définie dans B 4.).
 - a. Écrire une équation de $(\mathcal{C}_1)$. ($(\mathcal{C}_1)$ est la courbe représentative d'une fonction g_1).
 - b. Montrer que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$ ont les mêmes droites asymptotes. Tracer $(\mathcal{C}_1)$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ que $(\mathcal{C})$ sans étudier g_1 .
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = m$ ($m > 1$) et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$.

Durée : 4 heures

♣ Baccalauréat C juin 1982 Paris Créteil et Versailles ♣

EXERCICE 1

4 points

Pour chaque couple (a, q) d'entiers naturels tels que $1 \leq q \leq a$ on note b_q le quotient dans la division euclidienne de a par q .

On appelle S_q l'ensemble des entiers naturels non nuls b tels que s soit le quotient dans la division euclidienne de a par b .

1. On suppose dans cette question que $a = 1982$.
 - a. Déterminer b_1 ; b_8 ; b_9 ; b_{1982} .
 - b. Soit b un entier naturel non nul. Démontrer que $b \leq b_8$ si, et seulement si, $8b \leq 1982$, démontrer que $b > b_9$ si, et seulement si, $9b > 1982$.
 - c. En déduire que $S_8 = \{b \in \mathbb{N} ; b_9 < b \leq b_8\}$. Déterminer le cardinal de S_8 .
2. On suppose que a est quelconque et que $1 \leq q < a$.
 - a. Démontrer que $S_q = \{b \in \mathbb{N} ; b_{q+1} < b \leq b_q\}$.
 - b. Démontrer que $\forall a \geq 1$

$$\sum_{q=1}^a \text{Card.}(S_q) = a$$

où $\text{Card}(S_q)$ désigne le cardinal de S_q .

EXERCICE 2

4 points

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois, muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{E}$ un espace affine associé muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne l'application f_α de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui au point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ associe le point $f_\alpha(M) = M'$ de coordonnées $(x' ; y' ; z')$ définies par

$$\begin{cases} x' &= -z + \alpha \\ y' &= -x \\ z' &= y - 2 \end{cases}$$

Où α est un réel donné,

1. Montrer que f_α est un déplacement que l'on caractérisera.
2. Pour quelle valeur de α ce déplacement f_α est-il une rotation ?
Préciser dans ce cas l'axe de rotation.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$.
Montrer que f_1 est un vissage dont on précisera l'axe.

PROBLÈME

12 points

Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

On appelle f_0 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. a. Démontrer que pour chaque $k \geq 1$, la fonction f_k est croissante sur $\mathbb{R}_+$; en déduire, suivant la parité de l'entier k , le sens de variation des fonctions f_k .
- b. Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geq 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\frac{f_k(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives $\mathcal{C}_k$ des fonctions f_k ?
- c. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par deux points fixes ; construire sur une même figure et dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.
On précisera, s'il y a lieu, les asymptotes. (On prendra 2 cm pour unité.)-
2. Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx.$$

- a. Démontrer que la fonction $x \mapsto \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (Log désigne la fonction logarithme népérien).
En déduire la valeur de I_0 .
- b. Calculer I_1 .
- c. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la relation

$$k.I_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3 .

- d. Démontrer que $I_k \leq \frac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite I_k quand k tend vers $+\infty$.
3. Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite infinie $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\text{pour } k > 0 \text{ fixé } u_1 = f_k(u_0), \quad u_n = f_k(u_{n-1}) \text{ pour } n \geq 1.$$

- a. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- b. On suppose que $k \geq 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n < \frac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour chaque entier k strictement positif on définit une application g_k de $[0; 1]$ dans $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.
 - a. Démontrer que pour chaque entier $k \geq 1$, la fonction g_k admet une fonction réciproque g_k^{-1} .
 - b. Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions g_k^{-1} pour $k = 1, 2, 3$.
 - c. Donner l'expression des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1} .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1982 Nancy-Metz ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

- a. Résoudre cette équation. On note z_1 et z_2 ses racines.
b. Calculer $z_1^n + z_2^n$ pour l'entier naturel n non nul.
2. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = 1.$$

On pose $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que l'application f de $\mathbb{C}'$ vers $\mathbb{C}'$ définie par $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ est une application involutive.

3. Former une équation du second degré admettant $f(z_1)$ et $f(z_2)$ pour racines.

EXERCICE 2

5 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

1. Montrer que :
tout réel x vérifie $\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = 1$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f est une fonction impaire.
3. Étudier les variations de f .
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentatrice de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser les branches infinies et la tangente au point d'abscisse 0.
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} . Déterminer f^{-1} . Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ représentatrice de f^{-1} .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Rouen ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre l'équation d'inconnue $(x; y)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$661x - 991y = 1.$$

On pourra remarquer que

$$1982 = 2 \times 991 \quad \text{et} \quad 1983 = 3 \times 661.$$

2. On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 &= 3, & v_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= u_n + 991, & v_{n+1} &= v_n + 661 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indiquer tous les couples $(p; q)$, avec p et q entiers naturels inférieurs à 2 000, tels que $u_p = v_q$.

EXERCICE 2

4 points

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel, de dimension 2 ou 3, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{V}$, chacun distinct de $\{0\}$ et de $\mathcal{V}$.

On désigne par

p la projection vectorielle sur $\mathcal{A}$, de direction $\mathcal{B}$

q la projection vectorielle sur $\mathcal{B}$, de direction $\mathcal{A}$,

e l'identité dans $\mathcal{V}$.

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ des endomorphismes de $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel réel pour l'addition des endomorphismes et la multiplication d'un endomorphisme par un réel.

Soit $F = \{ap + bq; (a; b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel réel. Démontrer que $(p; q)$ est une base de F .
2. Démontrer que F est stable pour la composition des endomorphismes.
3. Soit φ un élément de F . On pose $\varphi^0 = e$ et, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$.
Calculer φ^n .
4. Déterminer l'ensemble des projections vectorielles éléments de F . Donner leurs éléments caractéristiques.

PROBLÈME

12 points

Le plan P affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par P^* le plan P privé du point O .

Un point quelconque M ayant pour coordonnées x et y par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$; on note $\bar{z}$ le conjugué de z ; on désigne par $[r, \theta]$ le nombre complexe qui s'écrit $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r élément de $\mathbb{R}_+$ et θ élément de $\mathbb{R}$.

Partie A

Étant donné un nombre complexe a non nul, on considère l'application φ_a de P^* dans P^* qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = \frac{a}{z}$.

1. Cette application est-elle bijective?
Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants par φ_a .
2. Déterminer la nature de l'application composée $\varphi_b \circ \varphi_a$, a et b étant des nombres complexes non nuls.
Montrer que $\varphi_a \circ \varphi_a$ est la restriction à P^* d'une isométrie de P dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de a .
Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier a pour que φ_a soit involutive?

Partie B

Dans cette partie, a est un réel strictement positif.

1. En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :
 φ_a est-elle bijective?
Quel est l'ensemble des points invariants par φ_a ?
 b étant aussi un réel strictement positif, quelle est la nature de $\varphi_b \circ \varphi_a$?
 φ_a est-elle involutive?
2. M' étant l'image de M par l'application φ_a calculer les coordonnées x' et y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M , puis les coordonnées x et y de M en fonction des coordonnées x' et y' de M' . z' étant l'affixe de M' , on pose $z' = [r', \theta']$, calculer r' et θ' en fonction de r et θ .
Dans la suite du problème, on se servira, suivant les questions, soit de la relation $z' = \frac{a}{z}$, soit des relations donnant x' et y' en fonction de x et y , soit celles donnant x et y en fonction de x' et y' , soit de celles donnant r' et θ' en fonction de r et θ .
3. Montrer que les points O , M et $M' = \varphi_a(M)$ sont alignés.
Soit une droite (D) passant par O ; déterminer l'image par φ_a de (D) privée de O .
4. Soit un cercle (C) passant par O et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse c .
Déterminer l'image par φ_a de (C) privé de O . En déduire l'image par φ_a d'une droite parallèle à l'axe des coordonnées et distincte de celui-ci.

Partie C

Soit (H) la courbe d'équation

$$x^2 - y^2 + 2x = 0$$

par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que (H) est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers, asymptotes. Dessiner (H) en prenant 4 cm pour unité sur chacun des deux axes.
2. Montrer que (H) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tels que $r = f(\theta)$ ou $f(\theta) = \frac{-2\cos\theta}{\cos 2\theta}$, θ décrivant un sous-ensemble de $[0; 2\pi]$.
En étudiant le signe de $f(\theta)$ suivant les valeurs de θ , vérifier que (H) se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine O ; sur la figure, on hachurera les autres régions.
3. À partir de cette question, on suppose $a = 1$.
Soit (Γ^*) l'image par φ_1 de (H) privée de O et soit $(\Gamma) = (\Gamma^*) \cup \{O\}$.
Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tels que $r = g(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$; calculer $g(\theta)$.

4. Montrer que (Γ) se trouve dans les mêmes régions que celles définies au 2. et qui contiennent (H) .

Montrer que (Γ) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

Placer les points invariants de (H) et calculer leurs coordonnées.

5. Soit A le point de (H) appartenant à l'axe des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative.

Déterminer $A' = \varphi_1(A)$.

Soit (Δ) la tangente en A à (H) ; déterminer l'image (Δ') de (Δ) par φ_1 en utilisant la question B 4.

Construire (Δ') .

6. Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est

$$y^2 = x^2 \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right).$$

Soit (Γ_1) l'ensemble des points du plan P de coordonnées x et y telles que $y = x \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$.

En étudiant la fonction

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} \end{aligned}$$

et en utilisant les questions précédentes, construire (Γ_1) sur le même graphique que (H) , puis en déduire (Γ) . Préciser les tangentes en O et en A' à (Γ_1) . Vérifier que (Γ) et (Δ') ont la même tangente en A' .