Ministère de l'Education Nationale **M. SOUGANE**
Année Scolaire : 2022-2023 **Lycée Technique de Bamako**

FONCTIONS LOGARITHMES-FONCTIONS EXPONENTIELLES
(TSE-STI: GC-GM-GMI-GELN-GEL-GEN)

Exercice 1 :

I) Résous dans IR les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)=\ln(6x-3)$
2) $\ln(x+2)+\ln(x+4)<\ln(x+8)$
3) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$
4) $\ln(x-1)+\ln\left(\frac{2}{x}\right)=0$
5) $\ln x+\ln(3-x)\geq\ln 2$
6) $(\ln x)^2-6\ln x+5\geq 0$

II) Soit P la fonction polynôme définie par : $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$

1) Calcule $P(1)$. Détermine les réels $a, b\ et\ c$ tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
2) Résous dans IR : a) $P(x)=0$ b) $P(x)<0$.
3) En déduis la résolution dans IR des équations o u inéquations :

a) $2(\ln x)^2+\ln x=\frac{5\ln x-2}{\ln x}$
b) $2[(\ln x)^3+1]<5\ln x-(\ln x)^2$
c) $\ln(x+3)+\ln(2x^2-5x+2)=\ln(4-8x)$
d) $2(\log_3 x)^3+(\log_3 x)^2-5\log_3 x+2=0$
e) $2e^{2x}+e^x-5+2e^{-x}=0$
f) $2\times 7^{3x}+7^{2x}-5\times 7^x+2=0$

III) Résous dans IR^2 les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}-2\ln x+\ln y=3\\4\ln x-3\ln y=-7\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2=13\\\ln x+\ln y=\ln 6\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(\ln x)(\ln y)=-10\\\ln x+\ln y=3\end{cases}$

4) $\begin{cases}(e^{x-2})^2=e^3\times e^y\\\ln(x-1)+\ln 3=\ln(1-2y)+\ln 2\end{cases}$ 5) $\begin{cases}xy=e^2\\3\log_x y+3\log_y x=-10\end{cases}$

IV) Détermine l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1-\ln x}{(1-2x)^2}$ 2) $g(x)=\ln\left|\frac{x-3}{1-x^2}\right|$ 3) $h(x)=\sqrt{\frac{\ln x}{2-x}}$ 4) $f(x)=x\ln(1-\frac{1}{x})$

Exercice 2 :

1) On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

a) Dresse le tableau de variation de g.

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\ [1;+\infty[$ et que $1\leq\alpha\leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

c) En déduis le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$

a) Dresse le tableau de variation de f.

b) Vérifie que $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$. En déduis un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-3}.

c) Construis la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice 3 :

A) On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1) Dresse le tableau de variation de g.

2) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\ ]0;+\infty[$ et que $1\leq\alpha\leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3) En déduis le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$

1) Etudie les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement ces limites.

2) a) Montre que, pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$.

b) En déduis le sens de variation de f.

c) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$. Dresse le tableau de variation de f.

3) Construis la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal en prenant 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 5 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

Exercice 4 :

A) Soit la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1 + x^2)$

1) Dresse le tableau de variation de g.
2) Montre l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$ et que$1,9 < \alpha < 2$.
3) Précise le signe de $g(x)$ sur $[0;\ +\infty[$.

B) Soit f la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudie la dérivabilité de f en 0.
2) Détermine la limite de f en $+\infty$.
3) On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

a) Montre que pour tout x de $]0;\ +\infty[; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En-déduis le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c) Trace la courbe de f et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Etudie les variations de f.
3) Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm)

Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation puis précise la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'asymptote oblique.

4) Montre que le point $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ est centre de symétrie pour$(\mathcal{C})$.
5) Donne une équation de la tangente en I à $(\mathcal{C})$.
6) Construis $(\mathcal{C})$.

Exercice 6 :

I) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln|x|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Etudie les variations de f.
3) Calcule $g(-1)$ et $g(1)$. En déduis le signe de g suivant les valeurs de x.

II) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = x - 2 - \frac{\ln|x|}{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites aux bornes de D_f.
2) Calcule $f'(x)$ et montre que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
3) Dresse le tableau de variation de f.
4) Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha \in]0; 1[$ et $\beta \in]1; +\infty[$. Trouve un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α et β.
4) a) Montre que la droite $(D): y = x - 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

c) Détermine les coordonnées des points de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite $(D): y = x - 2$

d) Détermine une équation de chacune de ces tangentes que l'on notera (T_1) et (T_2).
5) Trace $(\mathcal{C})$, (D), (T_1) et (T_2) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
6) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1;0[$
a) Montre que h est une bijection de $[-1;0[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Construis la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
c) Calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(h^{-1})'\left(-\frac{5}{2}-2\ln 2\right)$.

Exercice 7 :

I) On considère la fonction h de IR vers IR définie par $h(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
1) a) Détermine l'ensemble de définition de h.
b) Etudie la parité de h.
2) a) Dresse le tableau de variation de h.
b) Montre que h est une bijection de D_h vers un intervalle J que l'on précisera. Explicite sa bijection réciproque.
II) On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x)=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).
1) a) Détermine l'ensemble de définition de f.
b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2) a) Dresse le tableau de variation de f.
b) Précise les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.
c) Montre que l'origine du repère $O\binom{0}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f.
3) Construis $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

Exercice 8 :

Soit f fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=1-x+e^{-2x}+xe^{-2x}$.
1) a) Calcule $f'(x) et\ f''(x)$ puis dresse le tableau de variation de f'.
b) En déduis le signe de $f'(x)$ dans $[0;+\infty[$
2) Dresse le tableau de variation de f.
3) Montre que la courbe $\left(C_f\right)$ de f admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera. En déduis la position relative de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D).
4) Détermine l'équation de la tangente (T) à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse $x_0=0$.
5) Montre que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]0;+\infty[$ et que $1\leq\alpha\leq 2$. Trouve un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
6) Représente la courbe $\left(C_f\right)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm)

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-(x^2+4x+3)e^{-x}$, (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 1 cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x^2+2x-1)e^{-x}+1$
1) Etudie les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Calcule la dérivée $g'(x)\ de\ g(x)$ puis dresse le tableau de variation de g.
3) Montre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution nulle et une autre solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.
4) En déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : Etude de la fonction *f*

1) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Calcule la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ puis dresse le tableau de variation de f. (On pourra se servir de la question 4) de la partie A).
3) Démontre que la droite (D): $y = x$ est asymptote à la courbe (C).
4) Montre que la droite (D) et la courbe (C) se coupent en deux points A et B dont les coordonnées sont à déterminer. En déduis la position relative de la courbe(C) par rapport à la droite (D).
5) Construis la droite (D) et la courbe (C).
6) Soit la fonction H définie sur IR par : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
a) Détermine les réels $a, b, et\ c$ pour que H soit une primitive sur IR de la fonction h définie par :
$h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.
b) En déduis une primitive sur IR de la fonction f.

<u>Exercice 10</u> :

A) Soit g fonction numérique définie sur IR par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.
1) Détermine la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a) Vérifie que 0 en est une.
b) L'autre solution est appelé α. Montre que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$.
4) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

B) Soit f fonction numérique définie sur IR par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.
1) Détermine la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur pour calculer la limite en $+\infty$).
2) Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe (g étant la fonction définie dans la partie A).). Etudie le sens de variation de f.
3) Montre que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$ où α est la solution de l'équation $g(x) = 0$ de la partie A).
En déduis un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$)
4) Etablis le tableau de variation de f.
5) Trace la courbe (C) représentant les variations de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

<u>EXERCICE 11 :</u>

A) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = e^x + \ln x$
1) Dresse le tableau de variation de g.
2) a) Démontre qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
b) Détermine l'entier n tel que : $\frac{n}{100} < \alpha < \frac{n+1}{100}$.
b) En déduis le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

B) On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = e^x + x(-1 + \ln x) & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).
1) a) Donne l'ensemble de définition de f.
b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interprète ce résultat.
c) Détermine la limite de f en $+\infty$.
2) Dresse le tableau de variation de f.
3) Montre que$f(\alpha) = -\alpha + (\alpha - 1)\ln \alpha$. En utilisant la question A) 2) b) Trouve un encadrement d'amplitude 10^{-1} de $f(\alpha)$.
4) Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

Exercice 12 :

Pour un entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $IR - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$ et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

1) Détermine la dérivée $f_n{}'$ de f_n et donne l'expression de $f_n{}'$ en fonction de f_{n+1} et f_n

2) Etudie les variations de f_n , et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 ; $+\infty$. On distinguera les cas n pair et n impair.

3) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par un même point que l'on déterminera.

4) Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Trace, sur deux figures distinctes, les courbes (C_1) et (C_2).

Exercice 13 :

Pour n un entier naturel non nul, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ et on note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

1) a) Etudie les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$. (Pour la limite en $+\infty$, on posera : $X = x + 2$)

b) Etudie suivant la parité de n, la limite de f_n en -2.

2) a) Calcule $f_n{}'(x)$, puis étudie son signe suivant la parité de n.

b) Dresse le tableau de variation de f_n. On distinguera les cas n pair et n impair.

3) a) Montre que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A que l'on déterminera.

b) Détermine une équation de la tangente (T_n) à (C_n) en A.

4) a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ce résultat.

b) Démontre que pour tout entier naturel n, et pour tout nombre réel $x \neq -2$ on a : $f_n{}'(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$.

c) En déduis les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2).

5) Trace les courbes (C_1) et (C_2).

Problème 1 :

Partie A :

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \; si \; x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

1) a) Justifie que g est continue à droite en 0.

b) Calcule les limites en $+\infty$ de g et de $\frac{g(x)}{x}$. Interprète graphiquement ces résultats.

2) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

3) a) Justifie que : $\forall \, x \in \,]0; +\infty[, g'(x) = (-\ln x)(2 + \ln x)$.

b) Etudie avec soin le signe de $g'(x)$ et dresse le tableau de variation de g.

4) a) Démontre que sur $[0; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $2 \leq \alpha \leq 2{,}1$.

b) Déduis-en le signe de $g(x)$.

c) Prouve que $\ln \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x \ln x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité graphique 4cm.

1) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis précise les éventuelles asymptotes à (C_f).

2) a) Justifie que : $\forall\, x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x\ln x)^2}$.

b) Etudie le sens variation de f et dresse son tableau de variation.

c) Vérifie que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et donne un encadrement de $f(\alpha)$.

3) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point I du repère.

4) Construire (T) et (C_f) en prenant $f(\alpha) = 0{,}29$.

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0;\alpha]$.

1) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} puis donne l'ensemble de définition de h^{-1}.

2) a) Prouve que h^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$.

b) Démontre que la tangente (D) à la courbe (Γ) de h^{-1} au point J est parallèle à la droite (T).

3) a) Précise l'asymptote à la courbe (Γ) de h^{-1}.

b) Trace la droite (D), la demi-tangente à (Γ) de h^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et la courbe (Γ) de h^{-1}.

Problème 2 :

A) L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(t) = \frac{1-e^{-t}}{t} \; si\; t > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1) a) Etablis que g est continue en 0.

b) Détermine $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)$.

2) a) Calcule $g'(t)$ pour $t > 0$.

b) Prouve que pour tout $t \geq 0$; $1 + t \leq e^t$.

c) En déduis le signe de g' et le sens de variation de g. (On ne construira pas la courbe de g).

3) On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. A cet effet, on considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$

a) Calcule $h'(t)$ et $h''(t)$ ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.

b) Montre que : $\forall\, t \geq 0; 0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$.

c) En déduis un encadrement de $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$. Prouve finalement que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

B) On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) \; si\; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) a) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Prouve que $\forall\, x > 0, f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-2x}[2x + 1 - e^x(x+1)]$

c) Utilise le résultat établi au A) 2) b) pour montrer que $\forall\, x > 0$, $f'(x) \leq 0$.

2) Vérifie que : $\forall\, x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie A). En déduis que f est dérivable en 0 et calcule $f'(0)$. Détermine l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 0.

3) Construis (C_f) et (T) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité graphique : 3cm)

Problème 3 :

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de –1 par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On note (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 2\ cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 4\ cm$. Les parties A et B sont indépendantes.

__Partie A__ : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

1) Détermine D_g et calcule les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Etudie les variations de g, on ne demande pas de calculer les limites en –1 et en 0.

3) Calcule $g(-\frac{1}{2})$. Démontre que l'on a :

$\forall\ x \in]-\infty; -1[\cup \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\ \ g(x) < 0$

$\forall\ x \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[\cup]0; +\infty[\ \ g(x) > 0$

__Partie B__ : Etude de la limite de f en l'infini

1) Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions $h\ :\ t \longmapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2})$ et

$k : t \longmapsto \ln(1+t) - (t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3})$. Démontre que : $\forall\ t \geq 0\ \ t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$ .2).

En déduis que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

3) En utilisant les résultats précédents, démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. On admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

4) Donne une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

__Partie C__ : Etude de la fonction f

1) Détermine D_f et calcule la limite de f en –1.

2) Etudie la continuité de f en 0.

3) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

4) Calcule la dérivée de f et démontre que $f'(x) = xg(x)$.

5) Dresse le tableau de variation de f.

6) a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse en 0.

b) Précise les équations des asymptotes à la courbe (C_f).

c) Montre que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0{,}8 < \beta < -0{,}7$.

7) a) Trace (C_f) et (T).

b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

8) Soit φ la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $IR - \{1\}$ par :

$\begin{cases} \varphi(x) = x + x^2 \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| & si\ x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

a) Dire comment peut-on obtenir la courbe (Γ) de la fonction φ à partir de la courbe (C_f) de la fonction f.

b) Construis la courbe (Γ) dans le même repère que (C_f).

__Problème 4 :__

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2x - \ln(e^x + 2e^{-x})$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm)

1) Montre que pour tout $x \in IR$, $f(x) = x - \ln(1 + 2e^{-2x}) = 3x - \ln(e^{2x} + 2)$.

2) Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) a) Montre que la droite (D_1) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D_1).
b) Montre que la droite (D_2) d'équation : $y = 3x - \ln 2$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$. Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D_2).
4) a) Etudie le sens de variation de f.
b) détermine une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
5) Montre qu'il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$. Détermine un encadrement de α à 10^{-2} près.
6) Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
7) a) Montre que f admet une fonction réciproque que l'on notera f^{-1}.
b) Trace les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le repère.
8) Montre que $(f^{-1})'(0) = \frac{1+2e^{-2\alpha}}{1+6e^{-2\alpha}}$.

<u>Problème 5 :</u>

On considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = (x+1)^n e^{-x}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)
A) 1) Calcule la dérivée f_n' de f_n. Exprime f_n' en fonction de f_n et f_{n-1}.
2) a) Dresse, suivant la parité de n, le tableau de variation de f_n.
b) Détermine, suivant la parité de n, la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ?
3) a) Résous dans IR l'équation : $f_{n+1}(x) = f_n(x)$.
b) Déduis de ce qui précède que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
c) Etudie, suivant la parité de n, les positions relatives des courbes (C_{n+1}) et (C_n) .
4) Trace (C_2) et (C_3) dans le même repère.
5) a) Détermine les réels a, b et c pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de f_2.
b) Calcule l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. (on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} près).
B) Dans cette partie on pose $n = 2$
1) a) Soit la fonction g définie sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ par : $g(x) = f_2(x) - x$. Montre que g est strictement décroissante sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
b) Démontre que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
2) Etudie le sens de variation de f_2' dans l'intervalle $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ et en déduis pour tout réel $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$ on a : $|f_2'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f_2(U_n)$
a) Démontre que pour tout entier naturel n, U_n est élément de $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
b) Démontre en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$. En déduis : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
c) Prouve que (U_n) converge vers α. Pour quelle valeur de n_0, U_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près ?