Ministère de l'Education Nationale **M. SOUGANE**
Année Scolaire : 2022-2023 **Lycée Technique de Bamako**

CALCUL INTEGRAL – EQUATIONS DIFFERENTIELLES:
(TSE-STI: GC-GM-GMI-GELN-GEL-GEN

Exercice 1 :

I) Calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_{-1}^{2}(2x-1)(x^2-x+1)^2dx$ 2) $\int_0^1\frac{1}{(2x+1)^2}dx$ 3) $\int_{-1}^{2}\frac{3t}{(t^2+1)^3}dt$ 4) $\int_{-2}^{3}|x^2-2x|dx$

5) $\int_{-2}^{0}\frac{x^3+x^2-17x+15}{x-1}dx$ 6) $\int_{-2}^{1}\frac{t}{\sqrt{5-t^2}}dt$ 7) $\int_0^1\frac{1}{t^2+2t+1}dt$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}tan^2xdx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^3xsin^2xdx$

10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\cos 2x\,dx$ 11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^4xdx$ 12) $\int_2^3\frac{x+1}{x-1}dx$ 13) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{sin^2x}{cos^4x}dx$ 14) $\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ 15) $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$

16) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$ 17) $\int_{-2}^{1}\sqrt{x+3}dx$ 18) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{2x}dx$ 19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}}{cos^2x}dx$ 20) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

21) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}e^{2\cos x}\sin x\,dx$ 22) $\int_2^3(x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$ 23) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ 24) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2dx}$ 25) $\int_1^4 x\sqrt{x}dx.$

II) A l'aide d'une intégration par parties, calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-1)\sin x\,dx$ **2)** $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$ **3)** $\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{1-3x}}dx$ **4)** $\int_1^e\ln x\,dx$ **5)** $\int_{-2}^{1}(x+1)e^{-x}\,dx$

6) $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx$ **7)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{cos^2x}dx$

III) A l'aide de deux intégrations par parties, calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin 2x\,dx$ **2)** $\int_{-1}^{1}(1+x)^2e^{-x}dx$ **3)** $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,e^{2x}dx$ **4)** $\int_0^{\pi}x^2\cos x\,dx$

IV) A l'aide d'un changement de variable affine, calcule les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ **2)** $\int_{-8}^{-3}x\sqrt{1-x}\,dx$ **3)** $\int_0^1 x^3\sqrt{x+1}\,dx$ **4)** $\int_{\frac{5}{3}}^{2}\frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$ **5)** $\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx.$

V) On se propose de trouver sans les calculer séparément les trois intégrales :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^4x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^4x\,dx$; $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2sin^2x\,cos^2xdx$

1) Calcule $I-J$ et $I+J+K$

2) Exprime $cos4x$ en fonction de $cosx$ et $sinx$. En déduis la valeur de $I+J-3K$ puis celles de I ; J ; K.

VI) Soit l'intégrale $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^{n+1}\cos 2x\ dx$; $n\in\mathbb{N}$

1) Calcule K_0 à l'aide d'intégration par parties.

2) A l'aide d'une double intégration par parties montre que :

$\forall\, n\geq 2,\ K_n=-\frac{1}{4}(n+1)(\frac{\pi}{2})^n-\frac{1}{4}n(n+1)K_{n-2}$. En déduis $K_2\ et\ K_4$.

VII) 1) Linéarise sin^6x $(x\ désigne\ un\ nombre\ réel)$

2) On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x sin^5t\,costdt\right)dx$. Démontre que $I=\frac{15\pi-44}{1152}$

Exercice 2 :

On considère les intégrales : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2x}$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^4x}$

1) a) Calcule la dérivée de la fonction $x\longmapsto\tan x$. b) En déduis la valeur exacte de I.

2) Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\frac{sinx}{cos^3x}$

a) Démontre que f dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et que, pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x)=\frac{3}{cos^4x}-\frac{2}{cos^2x}$.

b) En déduis une relation entre I et J, puis calcule J.

Exercice 3 :
Dans une gare, on a constaté que le nombre de passagers au temps t heure est donné par la fonction $f : t \longmapsto 45t^2 + t^3$. Calcule le nombre moyen de passagers entre 0 heure et 4 heures.

Exercice 4 :
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)\, dx$

1) Montre que pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.

2) A l'aide d'une intégration par parties montre que $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2}$.

3) Montre que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

($|I_n|$ désigne la valeur absolue de I_n).

Exercice 5 :
L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$, $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$ et $L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} dx$

1) Calcul de I. Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2}\,)$

a) Calcul la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+2}$

b) En déduis la dérivée f' de f.

c) En déduis la valeur exacte de I.

2) Calcul de J et de K

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifie que $J + 2I = K$.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montre que $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduis les valeurs exactes de J et de K.

3) Calcul de L. Soit la fonction h définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $h(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

a) Calcul $h'(x)$, donne les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{12}$ et de $\tan\frac{\pi}{6}$, puis en déduis la valeur exacte de L.

b) A l'aide d'une intégration par parties, détermine la valeur exacte de $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{cos^2 t sint}$.

Exercice 6 :
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

1) Calcule I_1.

2) a) Montre que pour tout $x \geq 0, 1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

b) En déduis que pour tout $n \geq 1$ on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$.

c) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n$.

Exercice 7 :
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^{2n+1}x}$

1) Détermine deux nombres réels a et b tels que : $\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$. En déduis la valeur exacte de I_0.

2) Démontre, à l'aide d'une intégration par parties, que :$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

En déduis I_1 et I_2 . (On pourra écrire I_n sous la forme : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{cos^2 x} dx$).

Exercice 8 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}dx$

1) Calcule I_0, calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

2) Compare x^n et x^{n+1} lorsque $0 \le x \le 1$. En déduis que $I_{n+1} \le I_n$.

3) a) En procédant par encadrement, montre que : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. b) Détermine $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Calcule $f'(x)$, puis montre que : $\forall\, x \in [0;1]\,, 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$.

b) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis montre que :

$$\forall\, x \in [0;1], 0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \le \frac{1}{2}(1-x)$$

c) En déduis que : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

d) Détermine la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 :

I) Résous sur IR les équations différentielles :

1) $4y' + 3y = 0$ 2) $y' = e^{-2x} + \frac{1}{x}$ 3) $y'' = e^{-x} + \cos x$ 4) $2y'' - y' - 6y = 0$ 5) $y'' - 16y = 0$

6) $y'' + y = 0$ 7) $4y'' + 4y' + y = 0$ 8) $y'' - y' + \frac{9}{4}y = 0$

II) Détermine la solution générale de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$. Trouve la solution particulière f dont la courbe représentative (C_f) admet au point A(0 ;1) une tangente parallèle à la droite d'équation $3x + y - 2 = 0$.

III) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Détermine la fonction f deux fois dérivables sur IR telle que $f'' + \frac{1}{9}f = 0$ et dont la courbe représentative (C_f) admet au point $B(\frac{\pi}{2};2)$ une tangente parallèle à l'axe $(O;\vec{\imath})$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\ln x$

1) a) Vérifie que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$

b) Résous dans IR l'équation différentielle (E') : $y'' + 3y' + 2y = 0$.

2) a) Soit g une fonction deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$. Montre que g est une solution de (E) si, et seulement si $g - f$ est une solution de (E').

b) En déduis toutes les solutions de (E).

Exercice 11 :

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$.

1) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}g(x)$. Montre que f est solution de (E) si et seulement si : $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. 2) En déduis toutes les solutions de (E).

Exercice 12 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 6y = -6x - 1$

1) Détermine les réels a et b tels que la fonction $g : x \longmapsto ax + b$ soit solution de l'équation (E) sur IR.

2) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E') :$y'' - y' - 6y = 0$.

3) Résous l'équation (E'). En déduis les solutions de (E) sur IR.

4) Trouve la solution de (E) vérifiant : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Exercice 13 :

A l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 2,5 unités d'une substance médicamenteuse. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang l'instant t, exprimée en unités adaptées. On admet que le processus d'élimination peut être représenté mathématiquement par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\beta Q(t)$, où β est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1) Montre qu'on a $Q(t) = 2{,}5e^{-\beta t}$.

2) Calcule la valeur de β, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%. On donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-4} près.

3) Etudie le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, détermine sa limite en $+\infty$, et trace la courbe représentative (Γ) de Q dans le plan P.

4) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang a-t-elle été réduite de moitié ? On donnera la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Exercice 14 :

Un condensateur de capacité C tel que $C = 200\ \mu F$ se décharge à travers un condensateur ohmique de résistance $R = 1\ K\Omega$. On admet qu'à tout instant t, la charge q du condensateur vérifie l'équation différentielle : $q' + \frac{1}{RC}q = 0$ où R est exprimé en ohm (Ω) et C en Farad (F).

1) Donne l'expression de $q(t)$ sachant la charge initiale du condensateur est q_0.

2) On considère que le condensateur est déchargé lorsque la charge est égale à 1% de la charge initiale.

a) Calcule le temps mis par le condensateur pour se décharger.

b) Quelle valeur doit prendre la résistance pour que le temps de décharge soit de 10^{-3} seconde.

NB : $1\ \mu F = 10^{-6}F \quad 1\ K\Omega = 10^3\Omega$.

Exercice 15 :

1) a) Calcule la dérivée de la fonction $h(x) = x^2 f(x)$ où f est une fonction dérivable sur IR.

b) Résous sur IR l'équation différentielle d'inconnue f : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

2) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$. On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Montre que l'équation (E) est équivalente à $x^2 g'(x) + 2xg(x) - 1 = 0$.

b) En déduis la résolution de l'équation (E).

Exercice 16 :

On note $Q(t)$ la quantité de carbone 14 présent à l'instant t dans un fragment d'os. On admet que Q vérifie, à tout instant$t$, $Q'(t) = -\lambda Q(t)$. (λ est appelé constante radioactive du carbone 14)

1) Soit Q_0 la quantité de carbone 14 présent à l'instant $t = 0$. Exprime $Q(t)$ en fonction de t et de Q_0.

2) On appelle période (ou demi-vie) d'un élément radioactif la durée T au bout de laquelle la moitié des atomes de cet élément se sont désintégrés. Sachant que $\lambda \approx 1{,}2444 \times 10^{-4}$ et que t est évalué en années, détermine la période du carbone 14.

3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. A la mort de ceux-ci l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin. Calcule l'âge de ces fragments.