Terminale C **10/11/2023**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Auteur : Gildas Mba Obiang

Durée : 4h

Collection excellence en mathématiques

Exercice 1. Suites convergentes ../ 3 points

Une fonction continue sur $[0;+\infty[$ a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

1. Justifier que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'équation

$$f(x)=\frac{1}{n}$$

a deux solutions u_n et v_n respectivement dans les intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$.

2. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n). En déduire qu'elles convergent.

Exercice 2. Aritmétique dans $\mathbb{Z}$../ 4 points
Les parties A et B sont indépendantes.
Partie A : Multiple et diviseur

1. Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.
2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Démontrer que p^2-1 est un multiple de 24.

Partie B : Restitution organisée des connaissances.

1. Soit a, b et c des entiers naturels.
   a) On suppose que b et c premiers entre eux. Démontrer que si c divise ab alors c divise a.
   b) En déduire que si a et b d'une part, a et c d'autre part, sont premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.
2. **Application** - On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0=3$, $b_0=5$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=3a_n+52b_n$ et $b_{n+1}=a_n+15b_n$.
   a) Démontrer que si 7 ne divise pas a_n+b_n, alors 7 ne divise pas $a_{n+1}+b_{n+1}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, 7 ne divise pas a_n+b_n.

Exercice 3. Nombres complexes../ 4 points
Soit a un nombre complexe non nul définie par $a = \alpha e^{i\theta}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. a) Soit β et θ' le module et un argument de $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \sqrt{\alpha} \\ \theta' \equiv \dfrac{\theta}{2}[\pi] \end{cases}$$

   b) **Application** - Résoudre l'équation $z^2 = -8i$.

2. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$ puis en déduire la résoltion de l'équation (E) : $z^6 = -8i$.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $2i$ et l'application f définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$.
   a) Déterminer l'affixe b du point B image de A par f, ainsi que l'affixe c du point C image de B par f.
   b) Montrer que b et c sont solutions de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

4. a) Représenter les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.
   c) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.

Problème. Détermination des solutions exactes d'une équation $f(x) = k$../9 points
n étant un entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie sur $]-\infty; 1]$ par

$$\forall x \in]-\infty; 1], f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$$

Partie A : Etude des variations de f_n.

1. a) Dresser le tableau des variations de f_n, pour $n \geq 1$, suivant la parité de n.
   b) Déterminer l'unique réel α_n de $]0; 1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$ pour $n \geq 1$.

2. Représenter dans le même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1 et f_2.

Partie B : Détermination des valeurs des solutions de l'équation $f_1(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

1. Etudier suivant les valeurs du réel k, le nombre des solutions de l'équation $f_1(x) = k$.

2. Montrer que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0, \qquad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{3} < x_3 < 1$$

3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose alors $u_i = \dfrac{3}{2}\left(x_1 - \dfrac{1}{3}\right)$. Montrer qu'il existe unique réel θ_i dans l'intervalle $[0; \pi]$, tel que $u_i = \cos(\theta_i)$.

4. Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont solutions de l'équation $\cos(3\theta) = \dfrac{1}{2}$, avec $\theta \in [0; \pi]$.

5. Donner alors les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

FIN