Ministère des Enseignements Secondaires | Classe : $T^{le}C$ | Coef : 5 | Durée : 4 heures

Academic College of Excellence | Évaluation sommative 2 : 9 Novembre 2019

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices et un problème étalés sur deux pages numérotées de 1 à 2.

Exercice 1 [3 Points]

1. Démontrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$. **[1pt]**
2. Démontrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ a^n - b^n = (a-b)(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1})$. **[0,5pt]**
3. Déterminer l'écriture de $3 \times 10^n - 1$ en base *dix* avec $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$. **[0,75pt]**
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{3^n} + 1$ est divisible par 3^n. **[0,75pt]**.

Exercice 2 [3,5 Points]

1. On pose $Q(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$ et $(E) : Q(z) = 0$.
   a) Après avoir vérifié que 0 n'est pas une solution de (E), justifier que si z_0 est une solution de (E), alors $\overline{z_0}$ et $\dfrac{1}{z_0}$ sont aussi des solutions de (E). **[0,75pt]**
   b) Justifier que $1+i$ est une solution de (E) et déduire une résolution entière de (E) dans $\mathbb{C}$. **[1pt]**
2. On considère l'équation $(E') : az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a = 0$ où $a; b; c; d \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
   a) Déterminer un nombre complexe d en fonction de a et c pour que l'équation (E') soit équivalente à l'équation (E'') : $a(z + \dfrac{1}{z})^2 + b(z + \dfrac{1}{z}) + d = 0$. **[0,5pt]**
   b) Déduire dans $\mathbb{C}$ une résolution de (E) par une méthode autre que celle de 1.*b*) . **[1,25pt]**

Exercice 3 [3,5 Points]

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x - 26y = 1$ puis déterminer $t \in \mathbb{Z}/\quad 0 \leq t \leq 25$ et $23t \equiv 1[26]$. **[1pt]**
2. On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :
   Étape 1 : Les lettres ***A ;B ;C ;... ;X ;Y ;Z*** sont respectivement remplacées par $0; 1; 2; ...; 23; 24; 25$. On obtient un couple $(x_1; x_2)$ où x_1 et x_2 sont les entiers correspondant respectivement à la première puis à la deuxième lettre du mot.
   Étape 2 : $(x_1; x_2)$ est transformé en $(y_1; y_2)$ tel que (S_1) : $\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2[26] & 0 \leq y_1 \leq 25 \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2[26] & 0 \leq y_2 \leq 25 \end{cases}$.
   Étape 3 : $(y_1; y_2)$ est transformé en un mot par **l'étape 1**. Exemple : ***OK*** $\Rightarrow (14; 10) \Rightarrow (2; 8) \Rightarrow$ ***CI***.
   a) Coder le mot ***EU***. **[0,75pt]**
   b) On veut déterminer la procédure de décodage d'un mot codé. Montrer que tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant (S_1) vérifie aussi (S_2) : $\begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2[26] \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2[26] \end{cases}$. **[0,5pt]**

c) Déduire de 1. que tout couple $(x_1;x_2)$ vérifiant (S_1) vérifie aussi (S_3) : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2[26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2[26] \end{cases}$ et que tout couple $(x_1;x_2)$ vérifiant (S_3) vérifie aussi (S_1). **[0,75pt]**

d) Décoder le mot ***OK***. **[0,5pt]**

PROBLEME [10 Points]

PARTIE A [3,5 Points]

Soit $ABCD$ un carré de sens direct. I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AI]$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications $S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{AI}}$; $r_{(A;-\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I;\frac{\pi}{2})}$; $r_{(B;\frac{\pi}{2})} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $r_{(C;-\frac{\pi}{2})} \circ S_{(BC)}$, $S_{(BC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S_{(BC)} \circ r_{(D;-\frac{\pi}{2})}$. **[0,25ptX4+0,5ptX2=2pts]**
2. Soit f la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de f. **[0,5pt]**

   b) Déterminer $f(C)$ et $f(D)$. **[0,5pt]**

   c) Construire avec précision le centre Ω de f. **[0,5pt]**

PARTIE B [2,5 Points]

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $35x - 27y = 2$. **[0,5pt]**
2. Un astronome a observé Le 2 novembre 2019 un corps céleste A qui apparaît tous les 105 jours. Le 8 novembre 2019, il a aussi observé un corps céleste B qui apparaît chaque 81 jours.

   a) Déterminer le premier jour de rencontre simultanée des deux corps A et B. **[1,5pt]**

   b) Si l'astronome manque ce rendez-vous, alors quand pourait-il revoir simultanémént pour la prochaîne fois les deux corps ? **[0,5pt]**

PARTIE C [4 Points]

On considère l'application g du plan dans lui-même dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = -2x + 2y - 9 \\ y' = -2x - 2y + 7 \end{cases}$.

Soit (D) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|iz + 1 - i| = |\overline{z} - 2 - i|$.

1. Chercher la nature et les éléments caractéristiques de g. **[1pt]**
2. Caractériser (D) et son image (D') par g. **[1pt]**
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_0(3i)$, $M_n(z_n)$ tel que $z_{n+1} = (-2-2i)z_n - 9 + 7i$ et $d_n = M_{n+1}M_n$.

   a) Placer M_1 et M_2 sur un repère orthonormé complexe. **[0,5pt]**

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n ; puis d_n en fonction de n. **[0,5pt]**

   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée qui joint les points $M_0; M_1; M_2; ...; M_{n-1}$ et M_n. **[0,25pt]**

   d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = (2\sqrt{2})^n[e^{-\frac{3ni\pi}{4}}] - 1 + 3i$. **[0,75pt]**

Examinateur : NGUEFO Amour , *PLEG mathématiques*

COLLEGE POLYVALENT BILINGUE « LES AIGLONS » Discipline – Unité - Travail					
Examen : prépa Bac c	**Epreuve**	**Coef**	**Durée**	**Classe**	**Année scolaire**
Evaluation du 11/2019	**Mathématique**	**05**	**4H**	**TC**	**2019-2020**

***Exercice* 1 (4.5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1), B(1\ ;-6\ ;-1), C(2\ ;2\ ;2), I(0\ ;1;-1), J(-2\ ;0\ ;0)\ et\ K(1;0;1)$

1- Montrer que les points A, B et C définissent un plan **0.25pt**

2- Déterminer une équation cartésienne (P) du plan (ABC) **0.75pt**

3- Soit (Q) le plan d'équation $x+y-3z+2=0\ et\ (Q_0)$ le plan de repère $\left(0,\vec{\imath},\vec{k}\right)$

  a- Justifier que $(Q)\ et\ (Q_0)$ sont sécant **0.25pt**

  b- Donner les coordonnées du point E et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'intersection de $(Q_0)\ et\ (Q)$ **1pt**

4- Soit (S) l'ensemble défini par $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$

  a- Donner la nature et les éléments caractéristiques (S) **0.25pt**

  b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(S)\cap(Q)$ **1pt**

5- Donner avec précision lé intersection de (S) avec la droite (JK) **1pt**

Exercice 2 **6.5points**

A- Soit A=$\sqrt[3]{28+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}+\sqrt[3]{28-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$

On se propose de déterminer la valeur exacte de A sans utiliser la calculatrice. On pose pour cela : $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$, u= $\sqrt[3]{28+\alpha}$, v= $\sqrt[3]{28-\alpha}$. De ce fait, A=u+v

1- Montrer que $A^3=56+3uvA$ puis calculer u^3v^3 et en déduire que $A^3=56+2A$ **0.75pt**

2- Etudier la fonction $f: x\mapsto x^3-2x-56$ et montre que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution positive. Puis calculer $f(4)$ et en déduire la valeur exacte de A **(1+0.5+0.25+0.25)pts**

B- L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les plans (P)et (π) d'équations cartésiennes respectives : $10x+15y+6z=73\ et\ z=3$.

1- Soit x , y et z les entiers naturels tels que $10x+15y+6z=73$

  a- Montrer qu'y est impair **0.25pt**

  b- Montrer que $x\equiv 1[3]$ **0.25pt**

  c- On pose alors $x=1+3P, y=1+2q\ et\ z=3+5r$ où p,q et r sont des entiers naturels. Montrer que M(x,y,z) ∈ (P) si et seulement si $p+q+r=1$ **0.25pt**

  d- Déterminer tout les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels **1pt**

C- Soit α un reel $[-\pi;\pi]$ et z un nombre complexe définie par $z=\frac{1}{2}[\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)]$

a- Déterminer en fonction α le module et un argument de z **0.75pt**

b- Dans cette question α est un reel dans $]0;\pi[$. Déterminer en fonction de α le module et un argument de chacun des nombres complexes suivant : $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$ **1,25pt**

problème : **9points**

Le problème comporte deux parties indépendantes

Partie **3pts**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormée$\left(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les points $A, B\ et\ C$ de coordonnées respectives $(2, 0, 1)$; $(3, -2,\ 0)$;$(2,\ 8, -4)$

1) Soit $M(x, y, z)$ exprimer en fonction de $, y,\ z$ les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$^$\overrightarrow{BM}$ **0,5pt**
2) On suppose qu'il existe un unique point N verifiant $\overrightarrow{AN}$^$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$. Déterminer les coordonnées du point N **1pt**
3) a) le point N etant defini a la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre$ABCN$ est egale a $\frac{1}{6}CN^2$ **0,5pt**

   b) en utilisant les résultats du 1) et en prenant $M = C$ calculer l'aire du triangle ABC **0.5pt**

   c) utiliser les résultats précédentes pour calculer la distance du point N au plan (ABC) **0,5pt**

Partie **B** **6pts**

I) Soit la fonction $f$définie par $f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$. On note $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f dans lerepère orthonormée$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. montrer que f est une fonction impaire **0,25pt**
2. déterminer les limites de f aux bornes son domaine de définition **1pt**
3. f admet- elle un prolongement par continuité en 0 ? justifier votre réponse **0,5pt**
4. On désigne par g la restriction de f sur l'intervalle$]0; +\infty[$.
   a) Montrer que la droite (D): $y = x$ est asymptote a la courbe de g **0,75pt**
   b) Montrer que $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ et dresser le tableau de variation de g **0,5pt**
   c) Montrer que g est bijective de $]0; +\infty[$ vers un intervalle j à déterminer **1pt**
   d) Tracer le tableau des variations de la bijection réciproque de g **0.5pt**

II) Soit h la fonction definie sur IR par $h(x) = x^3 + 3x - 2$
   1. Dresser le tableau de variation de h **0,75pt**
   2. Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $h(\alpha) = 0$.
      Vérifier que $0{,}59 < \alpha < 0{,}60$ **0,75pt**

	MINESEC - COLLÈGE BILINGUE NOTRE REINE DE LOURDES Année scolaire 2019-2020			
	Département	Examen	Classe	Date
	MATHEMATIQUES	Devoir Harmonisé N° 2	TC	09/11/2019
	Durée	Coefficient	Visa de l'AP	Visa de PE
	3H	5		

Exercice 1 : 3,75pts

On considère l'équation (E) : $x^2 - 5y^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.

1. Dans cette question, on suppose que $(x_0; y_0)$ est solution de (E).
   a. Démontrer que x_0 et y_0 sont premiers entre eux. 0,25pt
   b. Prouver que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité. 0,25pt
   c. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$. 0,25pt
2. a. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ 0,5pt
   b. Donner a_1 et b_1 puis exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. 1pt
   c. Montrer à l'aide d'une récurrence que les couples $(a_n; b_n)$ sont solutions de (E) . 0,5pt
   d. En calculant $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{a_n+b_n\sqrt{5}}$, montrer que $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. 0,5pt
   e. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n. 0,5pt

Exercice 2 : 2,5pts

I •Soit (z_n) la suite définie dans C par $z_0 = 1 + i$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = -\frac{1}{2} i\, z_n$

1) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = |z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. 0,5pt
2) On pose w_n = arg z_n , montrer que la suite (w_n) est arithmétique. 0,25pt
2) Exprimer arg(z_n) en fonction de n, puis z_n en fonction de z_0 et n. 0,5pt

II. On considère l'application j qui à tout complexe z associe $j(z) = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z$

On pose $z_0 = 1,\ z_1 = j(z_0),\ z_2 = j(z_1), \ldots\ldots\ldots, z_{n+1} = j(z_n)$.

1) Ecrire $a = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. 0,25pt
2) Montrer par récurrence que $z_n = (\frac{1+i}{3\sqrt{2}})^n$. 0,5pt
3) En déduire l'écriture trigonométrique de z_n. 0,25pt
4) Pour quelle valeur de n , z_n est-il réel ? 0,25pt

Exercice 3 : 2,75pts

On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1): $ax + by = 60$; (a et b etant des entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

1. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution (x_0, y_0). Montrer que d divise 60. 0,25pt
2. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution (x_0, y_0) de l'équation (1). 0,25pt
3. On considère l'équation : (2): $25x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).
   a) Donner le PGCD de 25 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2). 0,5pt
   b) Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. 0,5pt

On appellera S l'ensemble des couples (x, y) solutions

c) Énumérer tous les couples (x, y) solutions de (2) et tels que $-10 \leq x \leq 10$. Donner parmi eux , ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. 0,5pt

d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1cm), représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x, y) telles que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. 0,25pt

e) Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x, y) de l'équation (2) appartiennent à E. 0,25pt

f) Comment peut-on caractériser S ? 0,25pt

Exercice 4 : 1pt

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = u^2z + u - 1$ où $\boldsymbol{u}$ désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $\boldsymbol{u}$ pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (en radians) ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,25pt
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $\boldsymbol{u}$ pour lesquels F est une homothétie de rapport −2 ; Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées. 0,25pt
3. Caractériser F lorsque $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{1 - i}$. 0,5pt

Problème : 10pts

Partie A : 1,5pt

Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3}+2x\right)$ 1,5pt

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 2\sin x)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+\sin x}{x}\right)$

Partie B: 6,75pts

I/ Soit les fonctions f et g définie par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1) Etudier les variations de g. 0,5pt
2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution que l'on note α. 0,5pt
3) Montrer que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$ et que $f(\alpha) = \frac{6\alpha+9}{\alpha^2-1}$ 0,5pt
4) Déterminer le signe de g sur IR. 0,5pt
5) Etudier les branches infinies de f 1pt

II/ Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal , unité 2 cm sur les axes

1) Montrer que (C) admet deux asymptotes horizontales. 0,5pt
2) Déterminer la dérivée première de h et dresser le tableau de variation de h 1pt
3) Justifier que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera 0,5pt
4) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique β et que $\beta \in [-1\,;0]$ 0,75pt
5) Montrer que $\forall\, x \in$ IR, $|h(x) + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}|x|$, déduire $\lim_{x\to 0} h(x)$ 0,5pt
6) Tracer les courbes (C) et (C^{-1}) de h et h^{-1} dans le même repère. 0,5pt

Partie C : 1,75pts

On donne $t(x) = x^3 - px - q$. p et q deux réels positifs.

1) Montrer que si $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, alors t s'annule trois fois sur $\mathbb{R}$. 0,5pt

2) Que se passe-t-il si t a une racine double ? 0,5pt

3) On pose $u(x) = x^2 - 5$, $v(x) = \frac{3}{x}$. Montrer que les courbes de u et v ont trois points de rencontre. 0,5pt

COLLÈGE DE LA RETRAITE
2nd CYCLE SCIENTIFIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ok

ANNÉE SCOLAIRE 2019-2020
DURÉE : 4H COEF. : 2
CLASSE : TC

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

2ème Période

INTITULE DE LA COMPETENCE VISEE

Déterminer des valeurs d'un entier naturel avec les congruences ; calculer la limite d'une fonction par comparaison ; utiliser les nombres complexes pour résoudre un problème en algèbre, en trigonométrie et en géométrie.

APPRECIATION AU NIVEAU DE LA COMPETENCE (à cocher absolument)

Non acquis	En cours d'acquisition	Acquis

NOTE DE L'EVALUATION

NOTE TOTALE

PARTIE 1 :...................... **PARTIE 3 :......................**

PARTIE 2 :...................... **PARTIE 4 :......................** **......................**

NOMS ET PRENOMS :

....

DATE :...Tél :...

OBSERVATIONS DU PARENT :

....
....

Signature

Exercice 1 : **5pts**

Pour tout entier naturel n, on pose : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

1- Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est un multiple de 7. 1pt

2- La division euclidienne de n par 6 a pour quotient q et pour reste r. Montrer que A_n et A_r ont le même reste dans la division euclidienne par 7. **1pt**

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7. **1,5pt**

4- Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que $A_n \equiv B_n\ [7]$. **0,75pt**

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7. **0,75pt**

Exercice 2 : **5pts**

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$.

1- Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

a) Pour tout réel x non nul, déterminer les réels α et β tels que $\frac{1}{x^2+x} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x+1}$. **0,5pt**

b) Montrer que $U_n = \frac{n}{n+1}$. **0,5pt**

2- a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $|xf(x)| \leq 1$ et en déduire la limite de f en $+\infty$. **1pt**

b)Calculer la limite de f en 0. **1pt**

3- Pour tout entier naturel n non nul, on pose $V_n = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$

a) Montrer que : $0 \leq |V_n| \leq \frac{n}{n+1}$ **1pt**

b) En déduire que si la limite de la suite (V_n) existe alors elle est finie. **1pt**

PROBLEME: 10 Pts

Les deux parties de ce problème sont indépendantes

Partie A : 4pts

1- Déterminer les racines cubiques de $z = \frac{-1+i}{4}$. **1,5pt**

2- En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire toutes les racines cubiques de z sous forme algébrique. **1,5pt**

3- En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{11\pi}{12}$ et $\tan\frac{19\pi}{12}$. **1pt**

Partie B : 6pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\ \vec{v})$ avec unités sur les axes 2cm. On considère la transformation g du plan d'écriture complexe $z' = \frac{1+i}{2}z + 1$. Le point Ω a pour affixe$1 + i$. Et les points $A_n(z_n)$ sont tels que $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = 1 + \frac{1+i}{2}z_n$ pour tout entier naturel n.

1- Déterminer la nature et les caractéristiques de g. **1pt**

2- a) Calculer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer ces points dans le repère. **1,5pt**

b) Démontrer que $\Omega A_n A_{n+1}$ est un triangle isocèle rectangle. **0,5pt**

3- a) Exprimer la distance ΩA_n en fonction de n. **0,5pt**

b) A partir de quelle valeur de n, les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,001 ? **0,5pt**

4- Pour tout entier naturel n, a_n est l'aire du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ et $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

a) Montrer que :$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ **0,5pt**

b) Déterminer S_n en fonction de n. **0,5pt**

5- Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés. **1pt**

MINESEC

COLLEGE PRIVE SOCRATE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

EVALUATION SOMMATIVE 1
ANNEE SCOLAIRE 2019/2020
Classe : Tle C
Durée : 4heures / coef : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

NB: *Clarté, lisibilité et précision seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.*

EXERCICE 1 : **04,25 points**

A- Pour chacune des propositions suivantes, indique, si elle est vraie ou fausse. 2pts

1. Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$.
2. Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0[6]$, alors $x \equiv 0[3]$.
3. Il existe un unique couple $(a; b)$ de nombre entier naturels, tels que $a < b$ et $PPCM(a; b) - PGCD(a; b) = 1$.
4. Soit M et N deux entiers naturels tels que $M = abc$ en base dix et N= bca en base dix. Si M est divisible par 27, alors $M - N$ est aussi divisible par 27.

B- On considère l'équation(E): $13x - 84y = 7$.

1. Vérifier que le couple (91 ; 14) est une solution de l'équation (E). 0,25pt
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E). 0,5pt
3. En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 0,5pt
4. Montrer que pour tout couple solution (x ; y) de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a : $pgcd(x\,;\, y) = 1$ ou $pgcd(x\,;\, y) = 7$. 0,5pt
5. En déduire les solutions $(x\,;\, y)$ de (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telles que :
   a. x et y sont premiers entre eux. 0,25pt
   b. $pgcd(x\,;\, y) = 7$. 0,25pt

EXERCICE2 : **04 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$, on donne les points : A(2 ; 1 ; 3), B(-3 ; -1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. 0,5pt
2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$
   a. Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC). 0,25pt
   b. Donner une équation cartésienne du plan (ABC). 0,5pt
3. Soit H le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABC).
   a. Montrer que H est le barycentre de (A ; -2), (B ; -1) et (C ; 2). 0,5pt
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$. 0,5pt
   c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$. 0,5pt
   d. Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles (E) et (Γ). 0,5pt
4. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 6$. 0,75pt

PROBLEME **11,75 points**

Partie A. **04 points**

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f. 0,5pt
2. Déterminer les limites aux bornes de Df. 0,5pt
3. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1, puis donner une interprétation graphique des résultats. 1pt

4. Justifier pourquoi on peut étudier la fonction f sur]0 ; 1]. 0,25pt
5. Démontrer que pour tout $x \in]0;1]$, $f'(x) = \frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. 0,5pt
6. Dresser le tableau de variation de f sur] 0 ; 1]. 0,25pt
7. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1]$. 0,5pt
8. Construire la courbe de f sur Df. 0,5pt

Partie B. **04,25 points**

Soit g la fonction définie sur $I = [0\,; \frac{\pi}{2}\,[$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Déterminer la dérivée g' de la fonction g sur I. 0,5pt
2. Démontrer que $\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $|g'(x)| \leq \sqrt{2}$, puis déduire que $\left|g(x) - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(\frac{\pi}{4} - x)$. 0,75pt
3. Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. 0,5pt
4. On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g.
   a. Dresser les tableaux des variations de g et de g^{-1} 0,5pt
   b. Calculer $g^{-1}(1), g^{-1}(2)$ et $g^{-1}(\sqrt{2})$. 0,75pt
   c. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 0,75pt
   d. Construire les courbes de g et de g^{-1} dans un repère orthonormé du plan. 0,5pt

Partie C. **03,5 points**

A. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M(z) distinct du point A(-2i) associe le point M'(z') telle que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$. On donne B(4+2i) et C(1). Repère $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z telle $|z'| = 1$. 0,5pt
2. .
   a. Montrer que pour tout nombre complexe z distinct de -2i , $(z' - 1)(z + 2i) = -4 - 4i$.
   b. Montrer que pour tout point M distinct de A et d'image M' par f, on a :
      i. $CM' \times AM = 4\sqrt{2}$. 0,25pt
      ii. $Mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{CM'}}\right) + Mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$ 0,5pt

B.

1. Déterminer le prolongement par continuité de la fonction sur$\mathbb{R}^*$ par
   $g(x) = \frac{1}{2x^2}[(1 + x)^n - 1 - nx]$ Où $n \geq 2$. 0,75pt
2. On considère les fonctions $f: x \mapsto (ax + b)\sqrt{x + 1}$ et $g: x \mapsto \frac{-3x+1}{\sqrt{x+1}}$ dérivables sur $]-1;\ +\infty[$
   a. Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction f soit une primitive de g. 0,5pt
   b. En déduire la primitive de g qui prend la valeur -2 en 3. 0,5pt

Examinateur : M. Christian NGUEGANG

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DÉLÉGATION RÉGIONALE DU CENTRE
COLLEGE LA GRACE DE TCHETGNA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

EVALUATION TRIMESTRIELLE N°1
CLASSE : T_C **DURÉE :** 4 HEURES **COEF :** 5
EXAMINATEUR : M.HERVÉ BATTISTON NGANMENI
NOVEMBRE 2019

NB : ***La clarté de la copie, la qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat***

Exercice 1 : (5pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points :
$A(2;1;3)$, $B(-3;-1;7)$, $C(3;2;4)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. $(0,5pt)$

2) Soit (d) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

a) Montrer que la droite (d) est orthogonale au plan (ABC). $(0,75pt)$

b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC). $(0,75pt)$

3) Soit H le point d'intersection de la droite (d) et du plan (ABC).

a) Montrer que H est le barycentre de $(A;-2)$, $(B;-1)$ et $(C;2)$. $(0,5pt)$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$. $(0,75pt)$

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Σ) des points M de l'espace tels que : $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$. $(0,75pt)$

d) Préciser la nature et donner les éléments caractéristiques de l'intersection des ensembles (Γ) et (Σ). $(0,5pt)$

e) Le point $S(-8;1;3)$ appartient-il à l'intersection des ensembles (Γ) et (Σ) ? $(0,5pt)$

Exercice 2 : (5pts)

Soit f la fonction définie sur $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé ayant $2\,cm$ pour unité graphique.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. $(0,5pt)$

2) Montrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $g(\alpha)=0$, puis déduire que $2,1<\alpha<2,2$. $(0,25pt)$

3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$. $(0,25pt)$

Partie B : Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D. En déduire que $(\mathscr{C})$ admet des asymptotes verticales. $(1pt)$

2) En utilisant la définition de α de la partie A, démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha+4}{2}$. $(0,25pt)$

3-a) Démontrer que pour tout $x\in D$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. $(0,5pt)$

3-b) En déduire le tableau de variation de f sur D. $(0,5pt)$

4) Démontrer que la droite (Δ) : $y=x+2$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ et étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ). $(0,5pt)$

5) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère et construire $(\mathscr{C})$. $(0,75pt)$

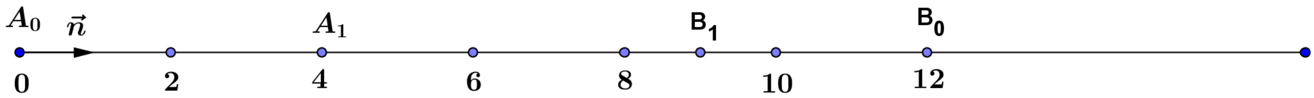
6) Soit h la restriction de f sur $I=[0;1[$.

a) Montrer que h est une bijection de $I=[0;1[$ vers un intervalle J que l'on déterminera. $(0,25pt)$

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. $(0,25pt)$

Exercice 3 : (5pts)

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante :
sur un axe orienté $(0\,;\vec{n})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.



Le point A_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;\,2)$ et $(B_n\,;\,1)$.
Le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n\,;\,1)$ et $(B_n\,;\,3)$.

1) Placer les points A_2 et B_2 sur le graphique. $(0,5pt)$

2) On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.
Montrer que : $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$. On admet de même que : $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$. $(0,5pt)$

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = b_n - a_n$.
a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on precisera la raison et le premier terme. $(0,5pt)$
b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n. $(0,5pt)$
c) Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat. $(0,5pt)$
4-a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n). $(0,5pt)$
4-b) Etudier les variations de la suite (b_n). $(0,5pt)$
5) Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ? $(0,5pt)$
6) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = 3a_n + 4b_n$.
a) Montrer que la suite (v_n) est constante. $(0,5pt)$
b) Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n) ? $(0,5pt)$

Exercice 4 : (5pts)

1-a) Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss. $(0,5pt)$
1-b) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout. $(0,5pt)$
2) Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S) : \begin{cases} n & \equiv 13\ (19) \\ n & \equiv 6\ (12) \end{cases}$.
a) Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. $(0,5pt)$
On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple.
b) Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 13u$ est une solution de (S). $(0,25pt)$
3-a) Soit n_0 une solution de (S). Vérifier que le système (S) équivaut à (S') : $\begin{cases} n & \equiv n_0\ (19) \\ n & \equiv n_0\ (12) \end{cases}$. $(0,75pt)$
3-b) Démontrer que le système $\begin{cases} n & \equiv n_0\ (19) \\ n & \equiv n_0\ (12) \end{cases}$ équivaut à $(E) : n \equiv n_0 (12 \times 19)$. $(0,5pt)$
4-a) Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante. $(0,5pt)$
4-b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 3-b). $(0,75pt)$
5) Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 3. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ? $(0,75pt)$

"Un homme doit faire son devoir quelque soit les conséquences pour lui, quelque soit les obstacles, quelque soit les risques et les pressions qu'il subit ; c'est la base de ce qu'on appelle la moralité" **Bonne chance ! ! !.**

INSTITUT JEAN PAUL II	**EPREUVE DE MATHEMATIQUES SEQUENCE N°2**	**ANNEE SCOLAIRE 2019-2020**
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES		**CLASSE : Tle C**
		DUREE : 4H
		COEF : 5

EXERCICE 1 : 4 points

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(-1)^{k-1} = n(-1)^{n-1}$. **1pt**
2. En déduire la somme $S = 29 - 31 + 33 - 35 + \ldots + 61$. **0,5pt**
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 11x + 2y = 94$. **0,75pt**
4. Soient a et b deux entiers relatifs. On pose $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$.
   (a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de l'équation (E). **0,25pt**
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 22. **0,5pt**
5. **HAMIDOU** est né en $\overline{19\alpha\beta}^{10}$. En 2004, son âge était curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance. Quel était son âge en 2004? **1pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. On note C_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (***unité graphique 2 cm***)

1. Etudier les variations de f. **1,25pt**
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5pt**
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $-1 < \alpha < 0$. **0,75pt**
4. Tracer la courbe C_f de f et la courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans le même repère. **1pt**
5. **(a)** Montrer que pour tout $x \in I = [-1; 0]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**
   (b) En déduire que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$. **0,5pt**

EXERCICE 3 : 4 points

A) 1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel. **0,75pt**

2. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13. **0,75pt**

B) Soit g la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **0,75pt**
2. On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.
   (a) Déterminer $g^{-1}(1), g^{-1}(2)$ et $g^{-1}(\sqrt{2})$. **0,75pt**
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et que $\forall x \in]1; +\infty[, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **1pt**

EXERCICE 4 : 4,25 points

1. On considère l'équation $(E): 6x+7y=57$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **(a)** Déterminer un couple d'entiers relatifs (u,v) tels que $6u+7v=1$. **0,25pt**
   - **(b)** En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E). **0,25pt**
   - **(c)** Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). **0,5pt**
2. Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace $\mathscr{E}$.
   On considère les points $M(x,y,z)$ appartenant au plan (P) d'équation $6x+7y+8z=57$ et au plan (Q) de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels et le déterminer. **0,5pt**
3. On considère un point $M(x,y,z)$ du plan (P) avec $x,y,z\in\mathbb{N}$.
   - **(a)** Montrer que l'entier y est impair. **0,5pt**
   - **(b)** On pose alors $y=2p+1$ où $p\in\mathbb{N}$.
     Déterminer le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3. **0,75pt**
   - **(c)** On pose $p+z=3q+1$ où $q\in\mathbb{N}$. Montrer que $x+p+4q=7$ et en déduire les valeurs possibles de q. **0,5pt**
   - **(d)** Déterminer les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels. **1pt**

EXERCICE 5 : 3,25 points

A) On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Donner la forme algébrique de z^2. **0,5pt**
2. Ecrire z^2 , puis z sous forme exponentielle. **0,5pt**
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{8}$. **0,5pt**

B) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. ***On prendra pour unité graphique 2 cm.***

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$. **0,5pt**
2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=2i$.
   A tout nombre complexe $z\neq 1+i$, on associe le complexe $z'=\dfrac{z-2i}{z-1-i}$.
   - **(a)** Déterminer et construire l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$. **0,5pt**
   - **(b)** Soit ($\mathscr{F}$) l'ensemble des points M d'affixes z tels que z' soit imaginaire pur.
     Montrer que $B\in(\mathscr{F})$, puis déterminer et construire ($\mathscr{F}$). **0,75pt**

IPPB	**INSTITUT PRIVE POLYVALENT DE BONAMOUSSADI** **BP : 8527 Dla – Tél. : 233 47 00 75** www.groupesimo.org	**Année scolaire : 2019/2020** **Classe : $T^{le}C$** **Durée : 02h30 – Coef : 5**
	EVALUATION PRE-SOMMATIVE N°2	**Prof : M.TOUKAM**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE N°1 **06points**

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3.$

1. Dresser le tableau des variations de f. **1pt**
2. Déduire $f(\mathbb{R})$. **0,5pt**
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. 1pt
4. Préciser le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

B/ Calculer les limites suivantes : **1.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$. **1,5pt**

3. Etudier le comportement de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$ en $-\infty$. **1pt**

C/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$

1. Déterminer le domaine de définition de f. **0,5pt**
2. Montrer que f est continue en 0. **1pt**

EXERCICE N°2 **07,75points**

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 - 3(1+i)z^2 + 8iz - 4i(1+i) = 0.$

1. **a)** Montrer que (E) admet une solution réelle z_0 à déterminer. **1pt**

   b) Résoudre l'équation (E). **1pt**

2. Le plan complexe $\wp$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité sur les axes : $1cm$). Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i, z_B = 2$ et $z_C = 1+i$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{2z}{z-2i}$.

   a) placer les points A, B et C dans un repère. **0,75pt**

b) Montrer que f admet deux points invariants à déterminer. **0,5pt**

c) Donner les images par f des points B et C. **0,5pt**

3. Soit M un point quelconque distinct de A et de 0.

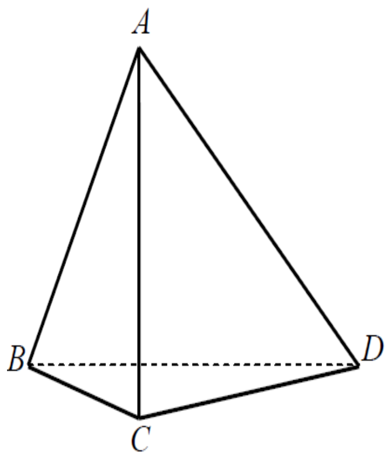
a) Etablir que $Mes\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)\equiv Mes\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)[2\pi]$ et que $OM'=\dfrac{2OM}{AM}$. **2pts**

b) soit (Δ) la médiatrice de $[OA]$. Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera. **1pt**

4. Soit (Γ) le cercle de diamètre $[OA]$ privé de A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (d). **1pt**

EXERCICE N°3 **06,25points**

$ABCD$ est un tétraèdre ; I est le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.



1. a) Soit $G_1=bar\{(A,1);(B,1);(C,-1);(D,1)\}$. Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placer I, J, G_1 sur la figure. **1,25pt**

a) Soit $G_2=bar\{(A,1);(B,1);(D,2)\}$. Démontrer que G_2 est le milieu de $[ID]$. **1pt**

Placer G_2 et démontrer que IG_1DJ est un parallélogramme et en déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J. **1,5pt**

2. Soit $m\in\mathbb{R}$. On note $G_m=bar\{(A,1);(B,1);(C,m-2);(D,m)\}$.

a) Préciser l'ensemble Σ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe. **0,5pt**

On suppose dans la suite $m\in\Sigma$.

b) Démontrer que G_m appartient au plan (ICD). **0,75pt**

c) Démontrer que le vecteur $m.\overrightarrow{JG}$ est constant . **0,75pt**

En déduire l'ensemble η des points G_m lorsque m décrit l'ensemble Σ. **0,5pt**

Epreuve de Mathématique du 07 Novembre 2019 (20pts) Coef : 5

Exercice

1. Soit a un nombre premier telque $11a + 1$ soit le carré d'un entier. Déterminer une valeur de a. (0,5pt)
2. 191 peut s'écrire comme différence des carrés de deux entiers. Déterminer ces entiers. (0,5pt)
3. Considérons le système de congruence suivant : $S\ \begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 5[6] \end{cases}$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x - 6y = 3$. (0,5pt)
   b) Déduire les solutions du système S. (0,5pt)
4. Démontrer

Exercice (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 0$, $\lim_{0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Calculer la dérivée seconde de f etdéduire la position de f par rapport à toutes ses tangentes. (0,5pt)
2. Donner les variations de f et dresser son tableau de variation. (0,5pt)
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$. (0,5pt)
4. On suppose que f est bijective. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.
   a) Dresser le tableau de variation de f^{-1}. (0,25pt)
   b) Calculer $(f^{-1})'(0)$ puis déduire l'équation de la tangente (T') à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse $x_1 = 0$. (0,75pt)
5. Tracer dans le même repère orthonormé $(O\vec{i}\vec{j})$, les courbes de f et f^{-1} ainsi que les tangentes (T) et (T'). (1,5pt)

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonrmé $(O\vec{u}\vec{v})$. On donne les points A, B, D et E d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_D = 4$ et $z_E = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Placer les points A, B et D dans le plan. (1pt)
2. On pose $z = \frac{z_A}{z_E}$.
   a) Donner la forme algébrique et celle trigonométrique de z. (1pt)
   b) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$. (0,5pt)
3. Calculer le rapport $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ et déduire la nature du triangle DAB. (0,75pt)
4. Déterminer l'écriture complexe de la similitude de centre D qui transforme A en B. (0,5pt)
5. On donne les équations suivantes : $E_1\ z^2 - 4z + 8 = 0$, $E_2\ iz^2 + z - 3 + i = 0$ et le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^3 + 12z^2 - 16z + 32$.
   a) Résoudre E_1 et E_2 dans $\mathbb{C}$. (1pt)
   b) Comparer $\overline{P(z)}$ et $P(\bar{z})$
   c) Calculer $P(i)$ et $P(2i)$. (0,5pt)
   d) Déduire deux solutions de $P(z) = 0$. (0,5pt)
   e) Mettre $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de second degré. (0,75pt)
   f) Résoudre $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. (0,5pt)

Exercice 2 (4,75pts)

L'espace est muni du repère orthonormé $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$. On donne les points $A(2;1;2)$; $B(4;1;1)$; $C(0;2;2)$ et G le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

1. Soit f l'application qui à tout point M de l'espace associe le réel $f(M) = MA^2 - MB^2 + MC^2$.
   a) Calculer $f(A)$. (0,5pt)
   b) Montrer que pour tout point M de l'espace, on a $f(M) = MG^2 + f(G)$. (0,5pt)
   c) Calculer $f(G)$ et déduire l'ensemble des points M de l'espace tel que $f(M) = 24$. (0,5pt)
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (0,75pt)
3. Soit $D(3;-1;2)$ un point de l'espace.

a) Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (ABC). (0,25pt)

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. (0,5pt)

4. Soient les ensembles P_λ d'équation $x + 2y + 2z + \lambda = 0$ et S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z - 1 = 0$.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la sphère S. (0,5pt)

b) Montrer que le plan P_{-8} d'équation $x + 2y + 2z - 8 = 0$ et la sphère S se rencontrent en un cercle dont on déterminera le rayon et le centre. (0,75pt)

c) Déterminer les valeurs de λ pour que le plan P_λ soit tangent à la sphère S. (0,5pt)

MINESEC
LYCEE DE BATIE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Evaluation N° 2 2019/2020
Classe : Tle C
Durée : 4heures / coef : 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : (5points)

1) On considère l'équation (E) : $13x - 7y = 2$
   a) Déterminer un couple (u, v) $tel\ que$ $13u - 7v = 2$ **1pt**
   b) En déduire la résolution de (E) **1pt**
   c) Utiliser la question précédente pour résoudre dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$
2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 **1pt**
3)
   a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne de 7^n par 9 **1pt**
   b) En déduire le reste de la division Euclidienne de 34^{2009} par 9 **1pt**

EXERCICE 2 : 5 points

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On donne les points :

$A(2,0,1), B(3,-2,0)$ et $C(2,8,-4)$.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. **1pt**
2. Résoudre le système $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$. On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie **1pt**
3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N. **1pt**
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   (a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$. **1pt**
   (b) Calculer l'aire du triangle ABC. **0,5pt**
   (c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC). **0,5pt**

Problème(10points)

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M'd'affixe $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O,$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$)

Partie A

1) Montrer que f admet des points invariants 0,5**pt**
2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.Exprimer x' et y' en fonction de x et y **1pt**
3) En déduire l'image de la droite (O,$\overrightarrow{e_1}$)privée du point O par f 0,5**pt**
4) On suppose que le point M d'affixe z appartient au cercle ($\mathcal{C}$)de centre O et de rayon 1.Déterminer l'ensemble décrit par les points M'd'affixe z',image de M par f. 1**pt**
5) Soit λ un réel quelconque
   5.1) On pose $z' = \cos\lambda$.Déterminer l'ensemble décrit par les points M 1**pt**
   5.2)
      a) Soit n un entier naturel non nul et p un nombre complexe de module 1 et d'argument λ.Donner en fonction de n les racines n-ièmes de p.0,5**pt**
      b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}(z^n + \frac{1}{z^n})= \cos\lambda$. 1**pt**

Partie B

1) Soit g l'application qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $g(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) - \left|\frac{1}{2}(z + \overline{z}) + i\right|$
   Montrer que $g(z)$ est un réel 0,5**pt**
2) On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ on désigne par © sa courbe représentative.

2.1) Etudier les limites aux bornes du domaine de définition de f 0,5**pt**

2.2) Montrer que la courbe (C) de f admet deux asymptotes dont on donnera les équations 0,5**pt**

2.3) Dresser le tableau de variation de f. 1**pt**

2.4) On définit sur $]-\infty; 0[$ une fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2-1}{2x}$

a) Vérifier que $h\big(f(x)\big) = x$ puis conclure. 0,5**pt**

b) combien y'a-t-il des points de la courbe de h dont les coordonnées sont entières. 0,5**pt**

2.5) construire la courbe (C) de f et déduire dans le même repère la courbe (C') de h. 1**pt**

LYCEE BILINGUE DE BAMYANGA			
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES			
Deuxième Évaluation	Classes : T_C	Année scolaire 2019-2020	Date : 14 /11/ 2019
Épreuve de mathématiques	Durée : 4h	Coef : 5	

Proposée par : ***M. NOUMSSI***

NB : *le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.*

EXERCICE 1 : (5.25 points)

1) Démontrer par récurrence que :

a) Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$. **1pt**

b) Pour tout entier naturel $n \geq 4$; $3^n > n^3$. **1pt**

2) Déterminer le nombre entier naturel N qui s'écrit : $N=\overline{xyz}^{7}=\overline{zyx}^{11}$. **1.5pt**

3) Démontrer en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n ; **0.5pt**

$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ est divisible par 17.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2-3x+4\equiv 0[7]$. **0.5pt**

5) Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de 2^n par 7. **0.75pt**

EXERCICE 2 : (3 points)

1. L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+2=0$ et le plan $(\mathcal{P}_\lambda)$ d'équation $-x+4y-z+\lambda=0$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
Étudier suivant les valeurs de λ les positions relatives de $(\mathcal{S})$et $(\mathcal{P}_\lambda)$. **1.5pt**

2. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2\overline{z}=0$. **1pt**

b) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I ,J). O, A, B, C sont les images des solutions obtenues. Montrer que A, B, C sont situés sur un cercle. **0.5pt**

EXERCICE 3 : (4.25 points)

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

Soit le nombre complexe $z_0=e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. On pose : $\alpha=z_0+z_0^4$ et $\beta=z_0^2+z_0^3$.

a) Démontrer que $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$ et en déduire que α et β sont solutions de l'équation (E) : $Z^2+Z-1=0$. **1.5pt**

b) Exprimer α en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. **0.5pt**

c) Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$. **0.75pt**

2. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2,\ z_0^3\ et\ z_0^4$.
Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O,\overrightarrow{e_1})$.

a) Démontrer que l'affixe du point H est $\cos(\frac{2\pi}{5})$. **0.5pt**

b) soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i.
(Γ) coupe la droite de repère $(O,\overrightarrow{e_1})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive. **1pt**
Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de [OM].

PROBLEME (7.5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit m et M deux réels tels que : $m \leq f'(x) \leq M$, pour tout x de I. Soit a et b deux éléments de I avec $a \leq b$.

On considère les fonctions g et h définies sur I par :

$g(x) = Mx - f(x)$ et $h(x) = mx - f(x)$.

1. a) Etudier le sens de variation de g. **0.5pt**

   b) En déduire que pour tous réels a et b de I, $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$. **0.5pt**

2. a) Etudier le sens de variation de h. **0.5pt**

   b) En déduire que pour tous réels a et b de I, $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$. **0.5pt**

3. En déduire un encadrement sur I de $f(b) - f(a)$. **0.5pt**

4. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a : **1pt**

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Partie B

Soit la fonction f de $[0\,; \frac{\pi}{2}]$ vers $[0; 1]$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$

1) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. **0,5pt**

2) Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable. **0,25pt**

3) Démontrer que : $(f^{-1}(x))' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\times\sqrt{1-2x}}$. **1pt**

Partie C

1. Étudier les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C}_h)$de $h(x) = \frac{2x+sinx}{x-1}$. **1pt**

2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\tan(x + \frac{\pi}{4})$; b) $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right))$. **1.25pt**

DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES N° 2

EXERCICE 1 : [4.5pts]

I. Soit a un entier naturel. On pose $b = \overline{1225}^{a}$

1) Ecrire b en base $(a+1)$ **[0.5pt]**
2) Déterminer b sachant que $b < 500$ **[0.5pt]**

II. Dans $\mathbb{Z}$, on considère l'équation (E) : $7x - 3y = 1$

a) Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$. **[0.25pt]**
b) Montrer que si (x_0, y_0) est solution de (E) alors x_0 et y_0 sont premiers entre eux. **[0.25pt]**
c) Résoudre l'équation (E). **[0.5pt]**
d) Déduire la solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $7a - 3b = 29$ **[0.5pt]**
e) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $\begin{cases} 7a - 3b = 29 \\ ppcm(a,\ b) = 1044 \\ pgcd(a,\ b) = 29 \end{cases}$ **[1pt]**

EXERCICE 2 : [2.5pts]

ABCDEFGH est un cube d'arête 1cm. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On désigne par I le milieu du segment [EF] et K le centre de ADHE.

1) Montrer que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$ **[1pt]**
2) En déduire l'aire du triangle IGA. **[0.5pt]**
3) Calculer le volume de ABIG et déduire la distance du point B au plan (AIG). **[1pt]**

EXERCICE 3 : [5pts]

f est la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}$ On note (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites aux bornes de ce domaine. **[0.75pt]**
2) a) Développer, réduire et ordonner $(x-2)(x^3 - 6x^2 + 9x)$ **[0.25pt]**
   b) Calculer f' et dresser le tableau de variation de f. **[1pt]**
3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2,\ 3[$ **[0.5pt]**
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. **[0.5pt]**
4) a) Vérifier que $\forall x \neq 2, f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$ **[0.25pt]**

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f. **[0.25pt]**

c) Etudier la position relative entre (Δ) et (Cf). **[0.5pt]**

5) Tracer la courbe de f. **[1pt]**

PROBLEME : [8pts]

PARTIE A [4pts]

I. Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on définit l'application r qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z + i$$

1) Montrer que r est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. **[0.75pt]**

2) Soit la suite des points (M_n) définie par $M_0 = O$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = r(M_n)$. Soit z_n l'affixe de M_n. On pose $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$

a) Montrer qu'il existe un unique complexe a tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = aZ_n$ **[0.75pt]**

b) Trouver tous les entiers naturels p tels que $a^p = 1$ **[0.5pt]**

c) Calculer Z_n en fonction de n. Que vaut Z_{2000} ? **[0.75pt]**

II. 1) Calculer le module et un argument de $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$. **[0.5pt]**

2) Déduire les racines cinquièmes de $\frac{9\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$. **[0.75pt]**

PARTIE B [2pts]

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$z^2 + (-7 + i)z + 12 - 16i = 0$ Résoudre cette équation. **[1pt]**

2) Soit A et B les points d'affixes respectives 1−3i et 6+2i. Donner la nature du triangle OAB. **[0.5pt]**

3) a) Calculer l'affixe du point I milieu du segment [AB]. **[0.25pt]**

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ **[0.25pt]**

PARTIE C [2pts]

Soit s la transformation du plan complexe qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$ soit C et D les points d'affixes respectifs 1+i et i

1) Donner les affixes des points C' et D' images de C et D par s. **[0.5pt]**

2) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s. **[0.5pt]**

3) On pose z' = x' +iy' et z= x +iy. Exprimer x' et y' en fonction de x et y. **[0.5pt]**

4) Déterminer l'image de la droite (d) d'équation $y = x\sqrt{3} + 1$. **[0.5pt]**

« Pose ta question, tu seras un idiot une seconde, ne la pose pas tu resteras un idiot toute ta vie » A. Einstein

Trimestre 1	Discipline	Enseignant	Classe	Date :Novembre 2019	Durée 4H
Evaluation Trimestrielle No:2	Mathématiques	M. TIWA	TERMINALE C	Coefficient : 5	

Exercice 1 (5POINTS)

I. (U_n) est la suite définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = 4U_n + 1$. (0.75pt)
2. En déduire que pour tout entier naturel n, U_n est un entier naturel et que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux. (0.75pt)
3. On pose : $V_n = U_n + \frac{1}{3}$. Démontrer que (V_n) est en suite géométrique que l'on caractérisera et exprimer U_n et V_n en fonction de n. (0.75pt)
4. Pour tout entier naturel non nul, déterminer $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$. (0.75pt)

II. définit la suite (U_n) sur IN^* par $U_1 = 1$ *et* $n^2U_n^2 - (n-1)^2 U_{n-1}^2 = n$ *pour* $n \geq 2$.

1. On définit la suite (V_n) sur IN^* par : $V_n = n^2U_n^2$.

a) Justifier que (V_n) vérifie la relation $V_n - V_{n-1} = n$. 0,5pt

b) Sachant que pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Déterminer l'expression de V_n en fonction de n. 0,75pt

2. Déduire de 1), que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,75pt

Exercice 2 (4,5POINTS)

θ est un nombre réel, (E_θ) désigne l'équation $Z^2 - 2cos\theta Z + 1 = 0$ d'inconnue Z complexe.

1) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, résoudre l'équation $(E_{\frac{\pi}{2}})$. 0,5pt
2) Résoudre l'équation (E_π) pour $\theta = \pi$. 0,5pt
3) θ étant un réel quelconque, résoudre l'équation(E_θ) . 1pt
4) Pour quelles valeurs de θ les solutions (E_θ) sont-elles imaginaires pures ? 0,5pt
5) Pour quelles valeurs de θ les solutions (E_θ) sont-elles réelles ? 0,5pt
6) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Z_1 *et* Z_2 sont les solutions de l'équation $(E_{\frac{\pi}{3}})$. Z_1 étant la solution dont la partie imaginaire est négative.

M_1 *et* M_2 sont les points d'affixes Z_1 *et* Z_2 . (C) est l'ensemble des points M d'affixe Z tels que $|Z - Z_1| = 1$.

a. Démontrer que (C) contient M_2 et déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C) . 0,75pt

b. N est le point de (C) tel que $mes\left(\vec{u},\overrightarrow{M_1N}\right)=\frac{2\pi}{3}$. Déterminer un module et un argument de Z_N-Z_1 et en déduire l'affixe Z_N de N. 0,75pt

Exercice 3 (4,5POINTS)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne $A(1,1,2)$; $B(1,2,1)$; $C(2,1,0)$ et $D(0,0,1)$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC. 0,5pt
2) Démontrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume. 0,75pt
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). 0,75pt
4) a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre $\Omega(1,-1,1)$ et tangente au plan (ABC). 1pt

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la sphère avec le plan ABC. 0,75pt

5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC}$. 0,75pt

Exercice 4: 6 POINTS

1. montrer que pour tout entier non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots x^{k-1})=x^k-1. \qquad 0{,}5\text{pt}$$

Dans la suite de l'exercice, a est un nombre entier supérieur ou égal à 2

2. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n. montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1 0,5pt

3. Déduire que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9 0,75pt

4. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a) On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$ en appliquant Bezout à m' et n', montrer qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que :$mu-nv=d$ 0,5pt

b) On suppose que u et v sont strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=1$ 0,5pt

c) Montrer que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et $a^{nv}-1$ 0,75pt

d) En utilisant la question précédente, calculer le pgcd de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$ 1pt

5. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $3x-5y=13$ 0,75pt

6. Montrer que $4^n\equiv 1+3n[9]$ 0,75pt

MINESEC

LYCEE CLASSIQUE ET MODERNE DE NGAOUNDERE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

ANNEE SCOLAIRE 2019/2020

CLASSE: T^c DUREE: 4H

COEF: 6 EVALUATION N°2

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 3,75 pts

I. On considère la fonction f définie par $\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x-21} \ si\ x\epsilon]-\infty,-3[\mathrm{U}]7,+\infty[\\ \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4x+21} \ si\ x\epsilon]-3,7[\\ 0 \ sinon \end{cases}$.

1. Préciser son domaine de définition D_f. **(0,25pt)**
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **(0,5pt)**

   b. La courbe représentative (C_f) de f admet-elle des branches infinies en$-\infty$et$-\infty$? Justifier votre réponse. **(0,5pt)**
3. a. Etudier les branches infinies à (C_f) en $-\infty$. **(0,5pt)**

   b. Etudier les branches infinies à (C_f) en $+\infty$. **(0,5pt)**
4. On considère la fonction la fonction : $g(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2-7x+7}-\sqrt{4x+1}}{2-x} si\ x>2 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{9x^2-4x-3}\ si\ x<2 \end{cases}$.

   a. Préciser le domaine de g. **(0,25pt)**

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to2} g(x)$. **(0,5pt)**

   c. g est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Si oui définir ce prolongement par continuité en précisant son domaine de définition. **(0,75pt)**

Exercice 2 : 3,25 pts

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$on donne les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$et $C\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$,et justifier que (ABC) est un plan de l'espace. **(0,75pt)**

   b. Donner une équation du plan (ABC). **(0,25pt)**
2. On considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ d'équations cartésiennes respectives : $x+2y-z-4=0$ $2x+3y-2z-5=0$.

   a. Démontrer que l'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ est une droite $(\mathcal{D})$ dont on précisera une représentation paramétrique. **(0,75pt)**

   b. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$? **(0,75pt)**

   c. Déterminer la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$. **(0,75pt)**

Exercice 3 : 2,25pts

On note (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ par$\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{3}u_n-v_n \\ v_{n+1}=u_n+\sqrt{3}v_n \end{cases}$.

On pose $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $z_n=u_n+iv_n$. On note le nombre complexe $a=\sqrt{3}+i$.

1. Démontrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $z_{n+1}=az_n$. **(0,75pt)**
2. Ecrire a sous forme exponentielle. **(0,5pt)**

3. En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_n = 2^n \cos(\frac{n\pi}{6}) \\ v_{n+1} = 2^n \sin(\frac{n\pi}{6}) \end{cases}$. **(1pt)**

<u>Problème</u> : 11,25 pts

Le problème comporte 3 parties indépendantes

Partie A

On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$.

1. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $x_n = 2^{n+1} + 1$. **(0,5pt)**

2. a. Calculer $PGCD\,(x_8, x_9)$ et $PGCD\,(x_{2002}, x_{2003})$. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part ; pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part. **(1pt)**

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux ? Justifie. **(0,75pt)**

3. a. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $2x_n - y_n = 5$. **(0,75pt)**

b. Exprimer y_n en fonction de n. **(0,25pt)**

4. Déterminer suivant les valeurs de p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.(0,5pt)

5. On pose $d_n = PGCD(x_n, y_n)$.

6. Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. **(1pt)**

7. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que x_n et y_n sont premiers entre eux. **(0,5pt)**

Partie B

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{\frac{i2\pi}{5}}$

1. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

   a. Démontrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$, et en déduire que α et β sont solutions de l'équation $(E): Z^2 + Z - 1 = 0$. **(1pt)**

   b. Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **(0,5pt)**

   c. Résoudre (E) et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$. **(1pt)**

2. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $\frac{2z-1}{z^2} \in \mathbb{R}$. **(1,5pt)**

Partie C

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0,75pt)**

2. On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f.

   a. Déterminer $f^{-1}(1), f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(\sqrt{2})$. **(0,75pt)**

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **(1pt)**

   c. Construire C_f $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et en déduire la construction de $C_{f^{-1}}$. **(0,75pt)**

Proposée par Siryle GEUFO

MINESEC
LYCÉE D'ELIG-MFOMO
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ANNÉE SCOLAIRE : 2019-2020

Évaluation sommative n° 1
Classe : T^{le}C ; Durée : 2 h ; Coef : 05
Examinateur : Georges Michaël TCHOUPA

Exercice 1 : .... 2.5 points

On considère la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que :
   (a) La suite (u_n) est strictement croissante. [1pt]
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$. [1pt]
2. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? [0.5pt]

Exercice 2 : .... 7.5 points

1. Écris l'entier $3^{10} - 1$ en base 9. [1pt]
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^3 - y^3 = 386$. [1.5pts]
3. Soit $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$ un entier écrit en base 10.
   (a) Montrer que $a \equiv \overline{a_1 a_0}$ [100]. [0.5pt]
   (b) En déduire le chiffre des dizaines de l'entier $n = 2019^{2018^{2017}}$. [1.5pts]
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. [1pt]
5. Soit (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.
   (a) Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure. [1pt]
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [1pt]

Exercice 3 : .... 5 points

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2 - 2x - 2} - 2x + 1)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. [1pt]
2. Étudier les branches infinies de la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. [1.5pts]
3. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$.
   (a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations. [1pt]
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. [0.5pt]
   (c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α. [1pt]

Exercice 4 : .... 5 points

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient les points $A(3; -2; 2)$; $B(6; 1; 5)$; $C(6; -2; -1)$; $D(0; 4; -1)$.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A,B et C ne sont pas alignés. [0.5pt]
2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A. [0.5pt]
   (b) Déterminer une équation du plan $(\mathcal{P}_1)$ orthogonal à (AC) et passant par A. [0.5pt]
   (c) Vérifier que le plan $(\mathcal{P}_2)$: $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à (AB) et passe par A. [0.5pt]
3. (a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et et de rayon $5\sqrt{3}$. [0.5pt]
   (b) Donner la nature et les caractéristiques de l'ensemble $(\mathcal{L}) = (S) \cap (\mathcal{P}_2)$. [1pt]
4. (a) Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC). [1pt]
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. [0.5pt]

Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Mokong
Département de mathématiques

Année scolaire 2019-2020
Évaluation numéro 2
Durée : 4h, Coefficient : 5
Classe : Tle C

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires.

Exercice 1 : 05 points

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $M = 9n - 1$ et $N = 9n + 1$.

1. On suppose que n est un entier pair.
   (a) Démontrer que M et N sont des entiers impairs. **0,5pt**
   (b) En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le $PGCD(M; N)$. **0,5pt**
2. On suppose que n est un entier impair.
   (a) Montrer que M et N sont des entiers pairs. **0,5pt**
   (b) Déterminer le $PGCD(M; N)$. **0,5pt**
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.
   (a) Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction de M et N. **0,25pt**
   (b) Démontrer que si n est pair, alors $81n^2 - 1$ est impair. **0,5pt**
   (c) Démontrer que $81n^2 - 1$ est est divisible par 4 si et seulement si n est impair. **0,75pt**
4. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants : **1,5pt**
   $\begin{cases} pgcd(x; y) = 7 \\ ppcm(x; y) = 84 \end{cases}$; $\begin{cases} x + y = 84 \\ ppcm(x; y) = (pgcd(x; y))^2 \end{cases}$

Exercice 2 : 04 points

I- L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On donne les points $A(2; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$ et $C(3; 2; 6)$ dans le repère.

1. Calculer les coordonnées du vecteur produit vectoriel $\vec{AB} \quad \vec{AC}$, puis déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75pt**
2. Calculer l'aire du triangle ABC. **0,25pt**
3. Soit $F(2; 4; 4)$ un point de l'espace.
   (a) Monter que le point F n'appartient pas au plan (ABC). **0,25pt**
   (b) Calculer le volume du tétraèdre $FABC$. **0,5pt**
4. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que : $(\vec{AM} - 3\vec{BM}) \quad \vec{AC} = \vec{0}$. **0,5pt**

II- On considère dans le plan $(\mathcal{P})$ un carré $ABCD$ tel que $AC = BD = a$, avec $a > 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer une condition sur t pour que les points $(A; t)$, $(B; 1 - 2t)$, $(C; t)$ et $(D; 3 - 4t)$ admettent un barycentre. **0,25pt**

2. On désigne par (Γ_t) l'ensemble des points M du plan tels que :
$tMA^2 + (1-2t)MB^2 + tMC^2 + (3-4t)MD^2 = a^2(1-t)$.
   (a) Vérifier que le centre du carré $ABCD$ appartient à (Γ_t). **0,5pt**
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma_{\frac{1}{2}})$. **1pt**

Problème : 11 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : 05 points

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la fonction $l : x \longmapsto l(x) = \frac{3}{4}\sqrt{|-x^2+4x+12|}$ et $(\mathcal{C}_l)$ sa courbe représentative dans le repère.

1. Écrire $l(x)$ sans symbole de valeur absolue. **0,5pt**
2. Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition, puis étudier les branches infinies si elles existent. **0,5pt+1pt**
3. Étudier la dérivabilité de l en -2 et en 6, puis donner une interprétation géométrique des résultats. **1pt**
4. Étudier les variations de l et dresser le tableau de variation de l. **1pt**
5. Construire soigneusement $(\mathcal{C}_l)$. **1pt**

Partie B : 06 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et sa dérivée $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner l'expression de $f(x)$. $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité graphique : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $g'(x) = 0$ **0,25pt+0,25pt**
   (b) Calculer $g(0)$ et en déduire la parité de f. **0,25pt+0,25pt**
2. Soit h une fonction sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$.
   (a) Montrer que h est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $h'(x)$. **0,5pt**
   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur $[1;x]$, montrer que $h(x) = 2f(1)$. **0,5pt**
   (c) En déduire que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $2f(1)$, puis donner une interprétation géométrique. **0,5pt**
3. (a) Démontrer que, pour tout élément x de $[0;1]$, $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$. **0,5pt**
   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0;1]$, démontrer que $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq 1$. En déduire une valeur approchée de $f(1)$. **0,75pt**
   (c) Soit t la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par $t(x) = f(\tan(x)) - x$. Démontrer que t est une constante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. En déduire que la valeur exacte de $f(1)$ est $\frac{\pi}{4}$. **0,75pt**
4. (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$. **0,5pt**
   (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans le repère. **1pt**

LYCEE DE NTUI					
EPREUVE	ANNEE SCOLAIRE	CLASSE	EVALUATION	COEF	DUREE
MATHEMATIQUES	2019/2020	TERMINALE C	N°2	5	4h
EXAMINATEUR	M. DJOUMESSI				

Exercice 1 : 5 points

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $n^7 - n$ est multiple de 42. 0,75 pt
2) Démontrer que $4^{28} - 1 \equiv 0[29]$. 0,5 pt
3) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $8x + 5y = 1$.
   a) Donner une solution particulière de (E) . 0,5 pt
   b) Résoudre l'équation (E). 0,5 pt
4) Soit N un entier tel qu'il existe un couple (a, b)d'entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$.
   a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de l'équation (E). 0,5 pt
   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 40. 0,5 pt
   c) En déduire une valeur possible de N qui soit un entier naturel. 0,5 pt
5)
   a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 5y = 100$. 0,5 pt
   b) Pour apprêter le menu de la soirée du club scientifique, les membres du club ont cotisé au total 100 pièces de 100 F, soit 8 pièces par garçon et 5 pièces par fille.

   Combien pouvait-il avoir de garçons et de filles dans ce club ? 0,75 pt

Exercice 2 : 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal et à tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnée (x, y) ; on dit que z est l'affixe de M. On désigne par (U_n), $n \in \mathbb{N}$, la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison le complexe $q = 1 + i$. On désigne par M_n le point d'affixe U_n.

1) a) Exprimer U_n en fonction de q et de n. 0,25 pt
   b) Donner le module et une détermination d'un argument de U_n. 0,75 pt
2) Placer sur une figure (on prendra 1cm pour unité graphique) les 6 points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 ; M_5 . 1 pt
3)
   a) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle OM_nM_{n+2} est rectangle, puis donner l'écriture complexe de la rotation de centre O qui transforme M_n en M_{n+2} . 1,25 pt
   b) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les points M_n et M_{n+4} sont alignés avec O. 0, 5 pt
   c) Déterminer la longueur $M_n M_{n+4}$. 0,5 pt
   d) Démontrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, le triangle $M_n M_{n+2} M_{n+4}$ est rectangle. 0,75 pt

PROBLEME : 10 points

Les parties A et B sont dépendantes.

PARTIE A : 3,25 points

Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

1) Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation. 1,5 pt
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $-1,68 < \alpha < -1,67$. 0,75 pt
3) Donner suivant les valeurs du réel x, le signe de $g(x)$. 0,5 pt
4) Etudier les branches infinies de g. 0,5 pt

PARTIE B : 4,75 points

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{1+x}{x^3-1}$. (C_f) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0,75 pt
2) Démontrer que (C_f) admet deux asymptotes dont on précisera les équations. 0,5 pt
3) Montrer que pour tout réel x différent de 1, on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$. 0,75 pt
4) Dresser le tableau de variation de f. 0,75 pt
5) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

a) Montrer que h est une bijection de $]1, +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. 0,5 pt

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}. 0,5 pt

6) Représenter dans le même repère, les courbes représentatives des fonctions h et h^{-1}. 1 pt

PARTIE C : 2 points

On considère la fonction numérique k définie par $k(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de k. 0,5 pt
2) Justifier que la fonction k est impaire. 0,25 pt
3) Démontrer que la fonction k admet deux asymptotes dont on précisera les équations. 1,25 pt

Année scolaire 2019-2020
Classe : TleC
Coefficient : 05 Durée : 4h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 04points

1. On considère l'équation (E) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue $(n\,;\,m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$.

a) Justifier que cette équation admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$. **0.25pt**

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (E). **0.25pt**

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E). **0.5pt**

2. On se propose de déterminer le PGCD de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a) Montrer que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$. **0.5pt**

b) $(n\,;m)$ désigne un couple quelconque solution de (E). Montrer que l'on peut écrire $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$ **0.5pt**

c) Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$. En déduire qu'il existe deux entiers x et y tels que $(10^{11} - 1)x - (10^{24} - 1)y = 9$ **1pt**

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9. **0.5pt**

e) Déduire de ce qui précède PGCD$(10^{11} - 1\,; 10^{24} - 1)$. **0.5pt**

Exercice 2 / 5,5 Pts

I. $ABCDEFGH$ est un cube. On rapporte l'espace orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Un triangle et son centre de gravité

a) Démontrer que BDE est un triangle équilatéral. **0,5pt**

b) Soit I son centre de gravité

i) Montrer que $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AG} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ? **0,75pt**

ii) Montrer que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE). **0,5pt**

2) Une droite particulière.

Pour tout réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan (P_k) de façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$.
- (P_k) est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE).
- N_k est le point d'intersection du plan (P_k) et de la droite (BC).

a) Montrer que le point N_k a pour coordonnées$(1{,}3k - 1{,}0)$. **0,75pt**

b) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC). **1pt**

II L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère l'ensemble $(\mathcal{S})$ des points $M(x; y; z)$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 10 = 0$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{S})$. **0.5pt**

2) On considère les points $J(-3; 0; -2)$, $Q(1; -2; -2)$, $R\left(2; -1; -\frac{1}{2}\right)$ et $T(1; 2; -1)$.

a) Démontrer que les points J, Q, R et T ne sont pas coplanaires puis calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0.75pt**

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de $(\mathcal{S})$ et (JQR). **0.75pt**

Problème / 10,5 Pts

Partie A / 6,5 Pts

A- On considère la fonction f définie sur $]0; 4[$ par : $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1-a) Etudier les variations de f. **0,75pt**

b) Montrer que f réalise une bijection de $]0;4[$ vers $\mathbb{R}$. **0,5pt**

c) Soit g la réciproque de f. Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$. **0,5pt**

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $]0;4[$ une solution inique α telle que $\alpha > 2$. **0,75pt**

3-a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 2. **0,5pt**

b) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T). **0,5pt**

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f. **0,75pt**

B- Soit la fonction μ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ pour : $\begin{cases} \mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \mu(x) = \frac{2}{g\,(2\tan x)} \end{cases}$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\mu(x) = \frac{1}{1+\sin x}$. **0,5pt**

2) Montrer que μ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera. **0,5pt**

3) Calculer $\mu^{-1}(2)$ et $\mu^{-1}(2+\sqrt{2})$. **0,5pt**

4) Dresser le tableau de variation de μ^{-1} et donner le programme de construction de sa courbe représentative à partir de celle de μ **0.75pt**

<u>Partie B</u> / 4 Pts

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 + i\sqrt{3})z + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$. **0,5pt**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le point A d'affixe 2 et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O passant par A.

Dans toute la suite α est un nombre complexe tel que $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

2-a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$. **0,5pt**

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$. **0.5pt**

3)- D est le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $2e^{i\theta}$ avec $\in]-\pi;\pi[$.

-E est l'image de D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$;

-On désigne par F et G les milieux respectives de $[BD]$et de $[CE]$.

a) Démontrer que $\frac{z_G-\alpha}{z_F-\alpha} = \frac{\alpha}{2}$. **0,5pt**

b) En déduire que le triangle AFG est équilatéral. **0,5pt**

4) On suppose qu'il existe une position du point D, pour laquelle la longueur du côté du triangle AFG est minimale.

a) Démontrer que $AF^2 = 4 - 3Cos\theta - \sqrt{3}Sin\theta$. **0.75pt**

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle la longueur du côté AF est minimale. **075pt**