Ex I Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1° $\dfrac{2z+1}{2iz+1} = \dfrac{iz+3i}{1-z}$ 2° $z\bar{z} = 3(\bar{z} - z) + 13 + 18i$ 3° $z^2 + (1+\sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

Remarque : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

Ex II Soit le polynôme P défini dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + (-2-3i)z^2 + 3(1+2i)z - 9i$.

1° Montrer que P admet une racine imaginaire pure (c'estàdire de la forme i x où x est réel).
2° Factoriser P(z) .
3° En déduire les solutions de l'équation P(z) = 0.

Ex III Soit z un nombre complexe différent de – 1. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{z}{1+z}$.

1° Déterminer de deux façons différentes l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Re(Z) = 0
a) En posant $z = x + iy$, x et y réels.
b) En utilisant la propriété Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$.
2° Déterminer de deux façons différentes l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Im(Z) = 0
a) En posant $x + iy$, x et y réels
b) En utilisant la propriété : Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$.
3° Représenter les ensembles E et F dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal.

Ex IV On considère la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x-1}$ et on appelle ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1° Montrer que f est dérivable sur D et étudier les variations de f sur D
2° Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathcal{C}$) ?

3° a) Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que : pour tout réel x distinct de 1 : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) admet une asymptote oblique (Δ) que l'on précisera. Etudier la position de ($\mathcal{C}$) par rapport à Δ

4° Soit D la droite d'équation : $y = -3x + 2$. Montrer qu'il existe deux points A et B de la courbe ($\mathcal{C}$) où la tangente est parallèle à D. Préciser les coordonnées de A et B ainsi qu'une équation des tangentes Δ_1 et Δ_2 .
5° Montrer que le point I (l,–5) est centre de symétrie de la courbe ($\mathcal{C}$).
6° Construire la courbe ($\mathcal{C}$) ainsi que ses asymptotes et Δ_1 et Δ_2.

Ex V Calculer les limites suivantes au point x_0

1° $\dfrac{\cos 2x + 1}{\sin x - 1}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

2° $\sqrt{9x^2+4} + 3x$, $x_0 = +\infty$ et $x_0 = -\infty$

3° $\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}{x^2 - 4x + 3}$, $x_0 = 3$

4° $\sqrt{x^2+x+1} - x$, $x_0 = +\infty$

Ex VI 1° Fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 1, on a : $\sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x} + \cos x \leq 1 + \sqrt{x}$.
b) En déduire que, pour $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$
c) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.