$\boxed{1}$ On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3\,U_{n+1} = U_n + 4$

1° Calculer U_1 et U_2 .

2° Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 2$

3° Montrer que (U_n) est une suite décroissante.

4° Montrer que la suite (U_n) est convergente.

5° On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - 2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

c) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$\boxed{2}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{\cos x + 3}{x} - 2$.

a) Les opérations classiques sur les limites permettent-elles de calculer la limite en $+\infty$?

b) Donner un encadrement de f(x) pour x positif

c) En déduire la limite de f(x) en $+\infty$

$\boxed{3}$ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{(x-1)^2}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1° Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2° Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

On admettra que pour tout réel $x \neq 1$: $f(x) = 2\,x + 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

En déduire que $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote oblique Δ dont on déterminera une équation.

Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ

3° On admet que le tableau de variation de f est le suivant.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f		↗	‖	↘	6	↗	

Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 , 0]$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-3}.

$\boxed{4}$ 1° Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement)

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$ | $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}$ | $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2 - 4}$

2° On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$.

3° Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Démontrer que la droite d'équation "y = 2 x" est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

$\boxed{1}$ 1° $U_1 = \boxed{3}$ $U_2 = \boxed{\dfrac{7}{3}}$

2° Initialisation. Si n = 0, $U_0 = 5 \geq 2$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Si la propriété est vraie au rang p alors $U_p \geq 2 \Rightarrow U_p + 4 \geq 6 \Rightarrow \dfrac{U_p + 4}{3} \geq 2 \Rightarrow U_{p+1} \geq 2$. La propriété est alors vraie au rang p + 1.

Conclusion. pour tout entier n , $U_n \geq 2$.

3° $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n + 4}{3} - U_n = \dfrac{U_n + 4 - 3U_n}{3} = \boxed{\dfrac{4 - 2U_n}{3}} \leq 0$ car pour tout entier n $U_n \geq 2$.

4° (U_n) est décroissante et minorée par 2 elle est donc convergente et sa limite est ≥ 2.

5° a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \dfrac{U_n + 4}{3} - 2 = \dfrac{U_n + 4 - 6}{3} = \dfrac{U_n - 2}{3} = \boxed{\dfrac{V_n}{3}}$

La suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

b) $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times V_0 = \boxed{\dfrac{1}{3^{n-1}}}$

c) $V_n = U_n - 2$ donc $U_n = V_n + 2 = \boxed{2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2 + 0 = 2$.

$\boxed{2}$ a) la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq \cos x + 3 \leq 1 + 3$

$\Rightarrow \dfrac{2}{x} \leq \dfrac{\cos x + 3}{x} \leq \dfrac{4}{x}$ (car x > 0) $\Rightarrow \boxed{\dfrac{2}{x} - 2 \leq \dfrac{\cos x + 3}{x} - 2 \leq \dfrac{4}{x} - 2.}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - 2 = -2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} - 2$. D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x + 3}{x} - 2 = \boxed{-2.}$

$\boxed{3}$ 1° $\lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - 3x^2 + 2 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \boxed{+\infty .}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-\infty .}$

2° $f(x) = \boxed{2x + 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}.}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

La droite d'équation y = 2 x + 1 est asymptote à C

pour tout réel $x \neq 1$ $\dfrac{1}{(x-1)^2} > 0$ donc C est au dessus de Δ.

$2x^3 - 3x^2 + 1$	$x^2 - 2x + 1$
$-2x^3 + 4x^2 - 2x$	$2x + 1$
$x^2 - 2x + 1$	
1	

D'après le tableu de variation de f pour tout réel $x > 1$, $f(x) \geq 6$.
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]1 , + \infty [$
Pour tout réel $x \in [0 , 1 [$, $f(x) \geq f(0) > 0$ et pour tout réel $x \in] - \infty , - 1]$, $f(x) \leq f(-1) < 0$ donc
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]- \infty \ , - 1 [\cup] 0 ; 1]$
f est continue et strictement croissante sur $[- 1 ; 0]$, $f(- 1) < 0 < f(0)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[- 1 ; 0]$. $\boxed{\alpha \approx - 0,677}$ car $f(- 0,678) < 0 < f(-0,677)$.

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - 5 x + 6 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} (2 - x)^2 = 0$. On a une FI "$\frac{0}{0}$"

$x^2 - 5 x + 6 = (x - 2) (x - 3)$ donc pour tout réel $x \neq 2$, $\dfrac{x^2 - 5 x + 6}{(2 - x)^2} = \dfrac{(x - 3) (x - 2)}{(x - 2)^2} = \boxed{\dfrac{x - 3}{x - 2}}$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} x - 3 = - 1$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} x - 2 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 5 x + 6}{(2 - x)^2} = \boxed{+ \infty .}$

$\lim\limits_{x \to 1} 2 - \sqrt{3 x^2 + 1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$. On a une FI "$\frac{0}{0}$"

$$\frac{2 - \sqrt{3 x^2 + 1}}{x - 1} = \frac{(2 - \sqrt{3 x^2 + 1}) (2 + \sqrt{3 x^2 + 1})}{(x - 1) (2 + \sqrt{3 x^2 + 1})} = \frac{4 - (3 x^2 + 1)}{(x - 1) (2 + \sqrt{3 x^2 + 1})} = \frac{3 - 3 x^2}{(x - 1) (2 + \sqrt{3 x^2 + 1})} =$$
$$\frac{3 (1 - x^2)}{(x - 1) (2 + \sqrt{3 x^2 + 1})} = \boxed{- \frac{3 (1 + x)}{(2 + \sqrt{3 x^2 + 1})}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2 - \sqrt{3 x^2 + 1}}{x - 1} = \frac{- 3 (1 + 1)}{(2 + \sqrt{3 + 1})} = \boxed{- \frac{3}{2}}.$$

x	$- \infty$		$- 2$		$+ 2$		$+ \infty$
$x^2 - 4$		+	0	–	0	–	
$x - 2$		–		–	0	+	

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x - 2} = - \infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x^2 - 4} = - \infty$ On a une Fi du type $\infty - \infty$

$\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{(x - 2) (x + 2)} = \dfrac{x + 2 - 1}{(x - 2) (x + 2)} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ $\lim\limits_{x \to 2^-} x^2 - 4 = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} x + 1 = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x^2 - 4} = - \infty$

2° $X = 3 x$. $\dfrac{\sin (3 x)}{x} = 3 \times \dfrac{\sin (3 x)}{3 x} = 3 \times \dfrac{\sin X}{X}$. $\lim\limits_{x \to 0} 3 x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin (3 x)}{x} = \lim\limits_{X \to 0} 3 \times \dfrac{\sin X}{X} = 3$.

3° Si $x > 0$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{4 x^2 + 1}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \dfrac{| x | \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \dfrac{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \boxed{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}$

$\lim\limits_{x \to + \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \boxed{2}$

b) $f(x) - 2 x = \dfrac{(\sqrt{4 x^2 + 1} - 2 x) (\sqrt{4 x^2 + 1} + 2 x)}{\sqrt{4 x^2 + 1} + 2 x} = \dfrac{4 x^2 + 1 - 4 x^2}{\sqrt{4 x^2 + 1} + 2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{4 x^2 + 1} + 2 x}$

$\lim\limits_{x \to + \infty} f(x) - 2 x = \boxed{0}$