

COURS D'APPUI

ANNEE SCOLAIRE 2020-2021

Classe : 1^{le}C

Date : Vendredi 11 JUIN 2021

Prof : M.NASSA

Durée : 4h

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE1(4pts)

On pose $a = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, $b = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $c = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

Partie A

- 1) Exprimer a^6 , b^6 et c^6 sous forme algébrique.
- 2) En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^6 = -8i$
- 3) Soit $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - a) Vérifier que $j^3 = 1$
 - b) Démontrer que jb et j^2b sont aussi des solutions de (E).
 - c) En déduire toutes les solutions de (E). Les écrire sous forme algébrique.

Partie B

- 1) Résoudre dans \mathbb{Z} le système :
$$\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$$
- 2) Déterminer tous les entiers naturels n vérifiant les deux propositions suivantes :
 - a^n est un nombre réel
 - b^n est un nombre imaginaire pur.

EXERCICE2(4pts)

L'unité de longueur est le centimètre.

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$.

G_1 est le barycentre des points pondérés ($A ; 1$) et ($B ; 3$)

G_2 est le barycentre des points pondérés ($A ; 1$) et ($B ; -3$).

1. a) Construire les points G_1 et G_2
 - b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$
 - c) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\text{Mes}(\widehat{MA}; \overline{MB}) = \frac{\pi}{3}$
2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$

S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D

a) Construire les points C et D

b) Calculer le rapport de S .

c) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$

. On note Ω le centre de S .

a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et à (E) . Placer Ω .

b) Démontrer que $\text{Mes}(\widehat{AC}; \overrightarrow{AD}) = \frac{-2\pi}{3}$.

c) En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle (C) .

Construire (C) .

PROBLEME(12pts)

Soit, pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_k(x) = x - k - \frac{k \ln x}{x}$.

La représentation graphique de f_k dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormal est notée (C_k) .

Unité graphique : 2 cm.

Partie A

1. Soit pour tout entier naturel k , la fonction g_k définie par : $g_k(x) = x^2 - k + k \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g_k ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet une solution unique notée α_k et que cette solution appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

2. Établir que, pour x élément de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'_k(x) = \frac{g_k(x)}{x^2}$.

Étudier le signe de $g_k(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k .

3. a) Étudier les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D_k) d'équation $y = x - k$ est asymptote à la courbe (C_k) .

c) Étudier la position de (C_k) par rapport à (D_k) .

Partie B

Étude des cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$.

1- α_k étant le nombre défini en **A-1**, montrer que : $\alpha_1 = 1$ et $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2. a) Montrer que : $f_2(\alpha_2) = 2\alpha_2 - 2 - \frac{2}{\alpha_2}$.

b) Utiliser l'encadrement de α_2 pour donner un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

3. Donner les tableaux de variation de f_1 et f_2 .

4. Représenter dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes (C_1) et (C_2) .

5. Calculer en cm^2 , la valeur exacte de l'aire S_1 de la partie du plan comprise entre (C_1) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = x - 1$.

Partie C

1. Pour tout entier k non nul et pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, calculer $f_{k+1}(x) - f_k(x)$.
Calculer la limite de cette différence lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.
 - a) Étudier le sens de variation de h ; préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
 - b) Dédire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0 ; 1[$.
 - c) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $f_k(\beta) = \beta$.
3. a) A l'aide des résultats obtenus dans les questions 1 et 2 de cette partie C, établir que toutes les courbes (C_k) se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.
b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, préciser les positions relatives de (C_{k+1}) et (C_k) .

FIN !