MATHEMATIQUES

SERIE C

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations ci-dessous, mets le numéro de l'affirmation suivi de la mention « VRAI » ou « FAUX ». Exemple : 5−$\boldsymbol{VRAI}$

N°	AFFIRMATIONS	Réponses
1	Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ tel que $a<b$. On appelle valeur moyenne de la fonction f, le nombre réel $\frac{1}{b+a}\int_a^b f(x)dx$.	
2	Si $a\ et\ a'$ désignent respectivement les coefficients directeurs des droites de régression de $y\ en\ x\ et\ de\ x\ en\ y$ alors le coefficient de corrélation est $r^2=aa'$	
3	La ligne de niveau k de l'application $M\longmapsto \frac{MA}{MB}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.	
4	Une isométrie du plan qui laisse invariant deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identique est la symétrie orthogonale d'axe (AB).	

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Recopie le numéro de chaque affirmation en y ajoutant la lettre qui convient. Exemple : 5- B.

N°	AFFIRMATIONS	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'écriture complexe associée à l'homothétie de centre $A(1+i)$ et de rapport $-\frac{1}{2}$ est :	$z'=-\frac{1}{2}z+1+i$	$z'=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$	$z'=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
2	:La suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_{n+1}=v_n-{v_n}^2-2n^2-5$ est	constante	décroissante	croissante
3	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=acos(3x)+bsin(3x)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle	$y''-9y=0$	$y''+9y=0$	$9y''+y=0$
4	$\overline{11111100100}^2$ est l'écriture en base 2 de	2015	2000	2020

EXERCICE 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,I,J)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=2, z_B=2+2i$ et $z_C=2i$.

On note (D) la médiatrice de $[AB]$ et (D) coupe (AC) en Ω.

1. Fais une figure.
2. a. Ecris le nombre complexe $\frac{z_C}{z_A}$ sous forme trigonométrique.

   b. Démontre que le quadrilatère ABCO est un carré.
3. Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe (AC), s_2 la symétrie orthogonale d'axe (AO) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

a. Détermine l'image du point B par la transformation s_2os_1.

b. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de s_2os_1.

4. Soit la transformation $f = tos_2os_1$.
   a. Démontre que $f = sos_1$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (D).
   b. Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de f.
   c. Détermine l'image par f du carré ABCO.

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la famille de fonctions f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(lnx)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal direct (0,I,J) L'unité graphique est : OI=1 cm et OJ= 10 cm. On admet que pour tout réel α strictement positif, la limite de $\frac{lnx}{x^\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$ est égal à 0.

Partie A

1) a) Détermine la limite de f_n à droite en 0 suivant les valeurs de n puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   b) Calcule la limite de f_n en $+\infty$ puis interpréte graphiquement le résultat.

2) Démontre que :$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(n-2lnx)(lnx)^{n-1}}{x^3}$.

3) Etudie le signe de $f'_n(x)$ puis dresse le tableau de variation de f_n pour :
   a) n pair .
   b) n impair.

4) Vérifie que la valeur maximale de f_n sur $]1;+\infty[$ est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

5) a) Etudie les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$et $(\mathcal{C}_2)$.
   b) Dresse les tableaux de variation de f_1 et f_2 .
   c) Construis $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sur le même graphique.

6) a) Calcule pour tout x élément de $]1;+\infty[$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.
   b) Justifie que pour tout entier naturel non nul n, $y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ puis démontrer que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n$.
   c) Déduis-en que pour tout entier naturel non nul n, $y_n \leq \frac{1}{2^n e}$ puis détermine la limite de la suite (y_n).

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction F_n définie sur $[1;+\infty[$ par : $F_n(x)=\int_1^x f_n(t)\,dt$.

1) a) Calcule la dérivée $F'_n(x)$ pour tout $x$élément de$[1;+\infty[$.
   b) En déduis le sens de variation de la fonction F_n.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que pour tout x élément de$]1;+\infty[$, $F_1(x) = 1 - \frac{1+lnx}{x}$.
   b) Calcule puis interpréter graphiquement $F_1(e)$.

3) a) Démontre à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel non nul n,
   $F_{n+1}(x) = F_n(x) - xf_{n+1}(x)$.
   b) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel non nul, la limite de F_n en $+\infty$ est égale à 1.
   c) Dresse le tableau de variation de F_n.

4) Soit α un nombre réel élément de l'intervalle$[1;+\infty[$.
   a) Démonte que pour tout entier naturel non nul n, 0$\leq F_n(\alpha) \leq (\alpha-1)y_n$.

b) En déduis en utilisant la question 6)c) de la partie A la limite de $F_n(\alpha)$ lorsque n tend vers +∞.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique :1 cm.

1) On considère le polynôme P défini par :$P(z) = z^3 - z^2 - (5+4i)z + 3(7-4i)$
   a) Calcule $P(-3)$.
   b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2) On désigne par $A, B\ et\ I$ les points d'affixes respectives $z_A = 3+2i$; $z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.
   a) Place les points $A, B\ et\ I$.
   b) Ecris sous forme algébrique le nombre complexe Z=$\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ .En déduis la nature du triangle IAB.
   c) Calcule l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et rapport 2.
   d) Soit D =bar$\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.Calcule l'affixe z_D du point D.
   e) Démontre que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
3) Détermine et construis l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|$.
4) On considère l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}$.
   a) Justifie que B ∈ à (Γ_2).
   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2).

EXERCICE 6

Ton cousin souhaite inviter entre 150 et 180 personnes à son repas de noce. Il te demande de chercher une salle pouvant accueillir tous ses invités. A l'issue de ta recherche, deux salles de réception lui sont proposées :

- ✓ Dans la salle de l'hôtel Akparo, il est possible de placer les invités par table de 7 personnes et un seul invité n'aura pas de siège.
- ✓ Dans celle de la résidence N'Da, il est possible de placer les invités par table de 5 personnes et cette fois, 4 invités n'auront pas de siège.

Franck, un ami du couple a trouvé une salle, mais le couple préoccupé par l'organisation du mariage, a oublié le nombre exact d'invités. Pour cela Franck te sollicite afin de l'aider à trouver le nombre de personnes invitées.
A partir d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, aide Franck à déterminer le nombre exact d'invités au repas de noce de ton cousin.