LEÇON 16 : PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

1. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour l'organisation de la kermesse de leur Lycée, les élèves d'une classe de terminale désirent proposer le jeu suivant à un stand :
« Une urne contient trois boules rouges numérotées 100, 200 et 300 et deux boules noires numérotées 2 et 5, toutes indiscernables au toucher ».
Les règles du jeu sont les suivantes :
Le joueur mise X francs CFA et tire successivement avec remise deux boules de l'urne. Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue. Sinon, le joueur remporte le montant en francs CFA égal au produit des numéros apparus sur les boules tirées.
On appelle gain algébrique du joueur la différence entre ce qu'il obtient à l'issu du jeu et sa mise.
Le joueur est perdant si son gain algébrique est négatif.
Pour ne pas être perdant, ces élèves souhaitent déterminer la mise minimale du joueur pour que le jeu leur soit avantageux. Ensemble, ils s'organisent pour calculer des probabilités, étudier des notions de variables aléatoires et déterminer des lois de probabilités.

Plan du cours

Motivation
En classe de première vous avez étudié la probabilité simple. En terminale, nous allons voir la probabilité conditionnelle et les variables aléatoires.
La probabilité conditionnelle, est une notion qui s'applique dans plusieurs domaines tels que : la Médecine, la génétique, la finance, l'économétrie ou l'assurance.
En assurance et en actuariat, la probabilité permet de calculer des primes de cotisation en fonction des risques que cours une population donnée.
A l'université la probabilité se poursuit avec la notion de la théorie de la mesure.

Exercice d'introduction

Dans une urne, il y a 3 boules bleues, 2 boules vertes et 2 boules jaunes, indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Justifie que le nombre de tirages possibles est 42.
2) Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a) E : « Tirer une boule jaune au premier tirage et une verte au deuxième ».
   b) F : « Tirer une boule jaune au premier tirage ».
   c) G : « Tirer une boule bleue au deuxième ».

Solution

1) Le nombre total de boules est 7
   Pour le premier tirage nous avons 7 possibilités de tirer une boule et pour le deuxième tirage nous avons 6 possibilités.
   Comme nous avons un premier tirage puis un deuxième, cela se traduit par une multiplication.
   Donc le nombre total de tirage possible est 7×6 soit 42.

2) L'univers des éventualités Ω est l'ensemble de tous les tirages possibles. Donc $card(\Omega) = 42$.
   a) Nous avons 2 boules jaunes donc 2 possibilités de tirer une boule jaune au premier tirage, puis au deuxième tirage, ayant également 2 boules vertes, nous avons 2 possibilités. On a donc $card(E) = 2\times2 = 4$.
   Comme $P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)}$, donc $P(E) = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.
   b) Nous avons 2 boules jaunes donc 2 possibilités de tirer une boule jaune au premier tirage, puis au deuxième tirage, nous n'avons aucune contrainte de couleur et comme nous disposons de 6 boules désormais alors nous avons 6 possibilités de tirage. On a donc $card(F) = 2\times6 = 12$.
   $P(F) = \frac{card(F)}{card(\Omega)} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.
   G : « Tirer une boule bleue au deuxième ».

   c) Première méthode :
   On sait que la deuxième boule tirée est bleue. La première est soit bleue soit ne l'est pas.
   • Si la première boule tirée est bleue, on a 3 possibilités pour le premier tirage et 2 possibilités pour le deuxième tirage. Ce qui fait : $3\times2 = 6$.
   • Si la première boule tirée n'est pas bleue, on 4 possibilités pour le premier tirage et 3 possibilités pour le deuxième tirage. Ce qui fait : $4\times3 = 12$.
   Comme nous avons une première situation ou bien une deuxième situation, cela se traduit par une addition.
   On a donc $card(G) = 6 + 12 = 18$.
   $P(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega)} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21}$.

   Deuxième méthode :
   Nous avons une contrainte de couleur seulement au deuxième tirage, il est donc préférable de commencer à dénombrer par le deuxième tirage.
   Pour le deuxième tirage, nous avons 3 boules bleues ce qui nous donne 3 possibilités de tirer une boule bleue au deuxième tirage puis au premier tirage comme nous disposons désormais de 6 boules on a donc 6 possibilités au premier tirage. On a donc $card(G) = 6\times3 = 18$.
   $P(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega)} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21}$.

MOTIVATION

En classe de première vous avez étudié la probabilité simple. En terminale, nous allons voir la probabilité conditionnelle et les variables aléatoires.
La probabilité conditionnelle, est une notion qui s'applique dans plusieurs domaines tels que : la Médecine, la génétique, la finance, l'économétrie ou l'assurance.
En assurance et en actuariat, la probabilité permet de calculer des primes de cotisation en fonction des risques que cours une population donnée.
A l'université la probabilité se poursuit avec la notion de la théorie de la mesure.

2. RÉSUMÉ DE COURS

I. Probabilités conditionnelles

1. Définition

Soit B un évènement d'un univers Ω tel que $P(B) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé**, l'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ et se lit probabilité de A sachant que B est réalisé ou simplement probabilité de A sachant B ou encore probabilité de A si B.
Ainsi on a : $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice
Trois candidats A, B et C se présentent à une élection.
La répartition des votes selon le candidat et le sexe du votant est donnée par le tableau ci-dessous:

Sexe \ Candidats	A	B	C	Total
Femme (F)	42%	13%	5%	60%
Homme (H)	28%	7%	5%	40%
Total	70%	20%	10%	100%

On choisit au hasard un des votants.
1) Détermine $P(A \cap F)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ et $P(F)$
2) Calcule $P\left({}^{A}/_{F}\right)$ et $P\left({}^{H}/_{C}\right)$

Solution

1. $P(A \cap F) = \frac{42}{100} = 0{,}42$
$P(A) = \frac{70}{100} = 0{,}7$
$P(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2;$
$P(C) = \frac{10}{100} = 0{,}1$
$P(F) = \frac{60}{100} = 0{,}6$

Sexe \ Candidats	A	B	C	Total
Femme (F)	42%	13%	5%	60%
Homme (H)	28%	7%	5%	40%
Total	70%	20%	10%	100%

2. $P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,42}{0,6} = 0,7$; $P(H/C) = \frac{P(C \cap H)}{P(C)}$ Or $P(C \cap H) = \frac{5}{100} = 0,05$ Donc $P(H/C) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$	

2. Conséquence de la définition

Soit A et B deux évènements de Ω tels que : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$

Exercice

Une enquête réalisée auprès d'un groupe d'étudiants d'un campus universitaire a donné les résultats suivants :

- Les filles représentent 48% de ce groupe d'étudiants ;
- 40% des étudiants de ce groupe savent jouer à un instrument de musique ;
- 45% des étudiants de ce groupe qui savent jouer à un instrument de musique sont des filles.

Une fille de ce groupe est interrogée au hasard.
Calcule la probabilité pour que cette fille sache jouer à un instrument de musique.

Solution

On note F : « l'étudiant interrogé est une fille », I : « l'étudiant interrogé sait jouer d'un instrument de musique ».
On a : $P(F) = 0,48$ et $P(I)= 0,4$.
Chez les étudiants sachant jouer d'un instrument de musique, 45% sont des filles, donc $P(F/I)=0,45$.

On cherche P(I/F).

On sait que $P(I/F) = \frac{P(F \cap I)}{P(F)}$

On sait aussi que $p(F/I) = 0,45$. Donc $\frac{P(F \cap I)}{P(I)} = 0,45$.

On en déduit que : $P(F \cap I)=0,45 \times P(I) =0,45 \times 0,4 =0,18$

$P(I/F) = \frac{P(F \cap I)}{P(F)} = \frac{0,18}{0,48} = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$ en divisant chaque membre par 6

Propriété

Soit B un évènement d'un univers Ω tel que $P(B) \neq 0$.
L'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω.

3. Evènements indépendants

a. Définition

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Deux évènements A et B sont indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

b. Conséquence de la définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que A et B soient de probabilités non nulles
A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$

Interprétation

Les évènements A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants alors :
$\overline{A}$ et B sont indépendants
A et $\overline{B}$ sont indépendants.
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Remarque :

Ne pas confondre évènements incompatibles et événements indépendants.
Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants.

Exercice

On lance deux fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le chiffre apparu sur la face supérieure du dé à chaque lancé.
Soit les événements A : « le 5 sort en premier » et B : « la somme des chiffres apparus est 7 ».
Justifie que A et B sont deux évènements indépendants.

Solution

L'univers Ω est l'ensemble de tous les couples de deux chiffres pris entre 1 et 6.
Card $\Omega = 6^2 = 36$

A = {(5 ; 1) ; (5 ; 2) ; (5 ; 3) ; (5 ; 4) ; (5 ; 5) ; (5 ; 6)}, d'où $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

B = {(6 ; 1) ; (1 ; 6) ; (5 ; 2) ; (2 ; 5) ; (4 ; 3) ; (3 ; 4)}, d'où $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

A∩B= {(5 ; 2)}, donc $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

On a : $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$ et $p(A) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$,

Soit $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Les événements A et B sont donc indépendants.

4. Formule de probabilité totale

a) Partition d'un ensemble

Définition

Soit Ω un ensemble non vide et $B_1, B_2, \dots, B_n$ des parties de Ω tel que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de l'univers Ω signifie que $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$

Exercice

Soit l'ensemble A tel que : $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
Justifie que les ensembles B, C, D et E ci-dessous forment une partition de l'ensemble A.
$B = \{1; 2\}$, $C = \{3; 4; 5\}$, $D = \{7\}$ et $E = \{8\}$.

Solution

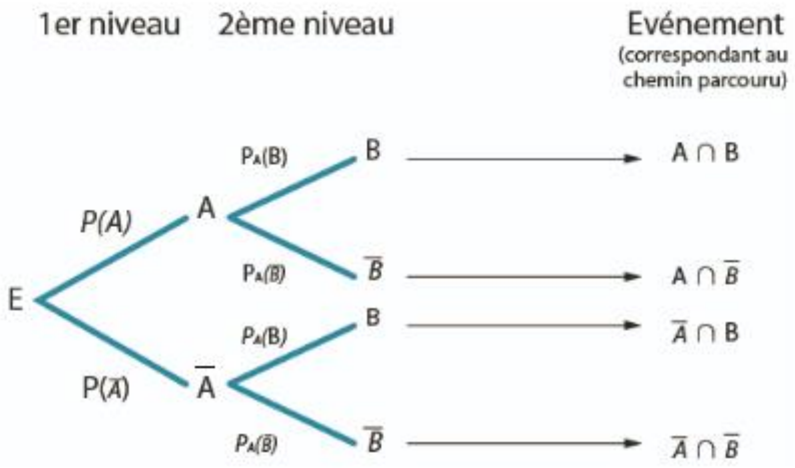
$B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $B \cap E = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, $C \cap E = \emptyset$, $D \cap E = \emptyset$ et $B \cup C \cup D \cup E = A$.
Donc B, C, D et E forment une partition de l'ensemble A.

b) Formule de probabilité totale

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition d'un univers Ω telle que la probabilité de chaque événement B_i $(1 \leq i \leq n)$ soit non nulle.
- Pour tout évènement A de Ω, $P(A) = P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n)$.
- Pour tout i $(1 \leq i \leq n)$, $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A) \times P(B_i)$

c) Arbre de probabilité ou arbre pondéré

Un arbre de probabilité (ou arbre pondéré) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.
En voici une présentation :



Methode

Un arbre se construit de gauche à droite ou de haut en bas.
La racine ici notée E est l'univers, c'est le premier nœud.
De ce nœud partent des branches qui mènent à des évènements, ici A et $\overline{A}$.
Sur chaque branche se note la probabilité de l'évènement auquel elle conduit, ici $P(A)$ et $P(\overline{A})$.
La somme des probabilités des évènements accrochés à un nœud est égale à 1,
donc $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

De chacun de ces évènements ici A et $\overline{\mathrm{A}}$, qui sont des nouveaux nœuds, peuvent partir de nouvelles branches qui mènent à de nouveaux évènements ici B et $\bar{B}$. Sur chaque nouvelle branche se note une probabilité conditionnelle, ici à partir du nœud A on a $P_A(\mathrm{B})$ et $P_A(\bar{B})$ et à partir du nœud $\overline{\mathrm{A}}$ on a $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$ et $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\bar{B})$.
La somme des probabilités des évènements accrochés à chaque nouveau nœud est égale à 1, ici $P_A(\mathrm{B}) + P_A(\bar{B}) = 1$ et $P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) + P_{\overline{\mathrm{A}}}(\bar{B}) = 1$. Ainsi de suite.
Le chemin de E à B en passant par A donne l'évènement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P_A}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}(\mathrm{A})$.
On a aussi : $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.

Exercice

Un magasin propose des réductions sur les trois marques d'ordinateurs qu'il distribue. La marque A représente 64 % des ordinateurs vendus ; la marque N, 28 % ; la marque O en représente 8 %.
30 % des ordinateurs de la marque A, 60 % de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés.
On interroge au hasard un client ayant acheté un ordinateurs de ce magasin.
1) Construis un arbre pondéré décrivant la situation.
2) Détermine la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque A et soldé.
3) Détermine la probabilité qu'il ait acheté un ordinateur non soldé.

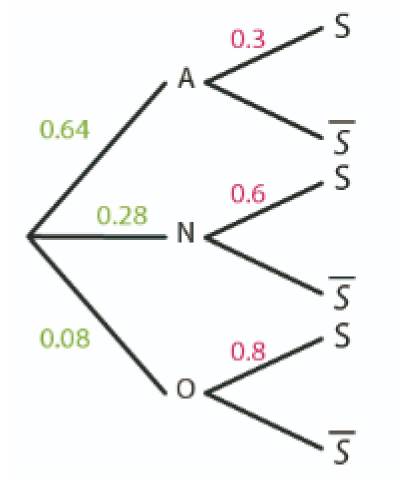
Solution

1) Considérons les événements suivants.
A : « L'ordinateur est de la marque A »
N : « L'ordinateur est de la marque N »
O : « L'ordinateur est de la marque O »
S : « L'ordinateur est soldé ».

2) La probabilité qu'il ait acheté un ordinateur de la marque A et soldé est :
$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{S}) = 0{,}64 \times 0{,}3 = 0{,}192$.

3) La probabilité qu'il ait acheté un ordinateur non soldé est : $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}})$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}}) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{S}}) + \mathrm{P}(\mathrm{N} \cap \overline{\mathrm{S}}) + \mathrm{P}(\mathrm{O} \cap \overline{\mathrm{S}})$$
$$= 0{,}64 \times (1-0{,}3) + 0{,}28 \times (1-0{,}6) + 0{,}08 \times (1-0{,}8)$$
$$= 0{,}576$$



Exercices de maison

<u>Exercice 1</u>

A la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que : 65% de la population concernée est contre la construction du barrage et parmi ces opposants, 70% sont des écologistes. Parmi les personnes non opposées à la construction, 20% sont des écologistes.
On interroge une personne au hasard
1) Calcule la probabilité que cette personne interrogée soit opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
2) Calcule la probabilité qu'elle ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.
3) Déduis-en la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

NB : Pour faciliter les réponses aux différentes questions, on pourra noter les évènements

Exercice 2

Un opérateur téléphonique propose à ses abonnés deux types d'accès internet à haut débit :
• un accès internet sur ligne fixe ;
• un accès 4G sur téléphone portable.
Aujourd'hui, l'entreprise fait les constats suivants sur les accès internet à haut débit de ses abonnés :
• 58 % des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe. Parmi ceux-là, 24 % ont également un accès 3G sur téléphone portable ;
• parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 4G sur téléphone portable.
Pour une enquête de satisfaction, la fiche d'un abonné est prélevée au hasard. Dans cet exercice on note :
• F l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe » ;
• G l'évènement : « la fiche est celle d'un abonné qui a un accès 3G sur téléphone portable » 1) En utilisant les données de l'énoncé, précise les valeurs de $p(\mathrm{F})$, de $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{G})$ et de $p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{G})$.
2) Construis un arbre de probabilité traduisant la situation.
3) Calcule $p(\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{G}})$. Interprète ce résultat.
4) a) Vérifie que la probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 4G sur téléphone portable est de 0,8062.
b) Peut-on affirmer qu'au moins 25 % des abonnés ont un accès 3G sur téléphone portable?

II -Variable aléatoire

1. Définitions

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
■ On appelle variable aléatoire, toute application X de Ω dans IR.
■ Soit X une variable aléatoire qui à chaque éventualité e_i de Ω, associe un nombre réel x_i .
L'ensemble $\{x_1\ ;\ x_2\ ; \dots ;\ x_n\}$ se note X(Ω) et s'appelle l'ensemble des valeurs prises par X ou l'univers image de Ω par X.
■ Soit P une probabilité sur Ω.
La loi de probabilité de X est l'application qui à toute valeur x_i, prise par X, associe $\mathrm{P}(X = x_i)$ où $(X = x_i)$ est l'ensemble $\{\omega \in\ \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) = x_i\}$.

NB : Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau du type :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dans ce tableau les éléments x_i sont rangés dans l'ordre croissant.
Remarque : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Exercice

Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont deux sont blanches et quatre sont rouges.
On tire simultanément trois boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
1) Détermine les valeurs prises par la variable aléatoire X.
2) Etablis la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Solution

1) Dans ce tirage simultané de trois boules nous pouvons avoir soit aucune boule blanche, soit une boule blanche, soit deux boules blanches. Donc les valeurs prise par la variable aléatoire X sont : 0 ;1 ou 2. Ainsi $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

2) L'univers Ω est l'ensemble de tous les tirages simultanés de trois boules parmi six ; donc Card $\Omega = C_6^3 = 20$.

• Lorsque $X = 0$, le tirage contient trois boules rouges donc $P(X = 0) = \frac{C_4^3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

• Lorsque $X = 1$, le tirage contient une boule blanche et deux boules rouges donc $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

• Lorsque $X = 2$, le tirage contient deux boules blanches et une boule rouge donc $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Nous avons le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Espérance mathématique, variance et écart type.

Définitions

Soit X une variable aléatoire prenant n valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités respectives p_1 ; p_2 ; … ; p_n.

■ On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre réel noté E(X) tel que :
$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

■ On appelle variance de X le nombre réel positif noté V(X) tel que :
$V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2p_n$

■ On appelle écart type de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ tel que : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

La variance d'une variable aléatoire X peut être donnée par :
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = {x_1}^2p_1 + {x_2}^2p_2 + \cdots + {x_n}^2p_n - [E(X)]^2$

Interprétation de l'espérance mathématique en termes de jeu :

Soit E(X) l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X mesurant le gain algébrique (différence entre la somme perçue et la mise).
E(X) est le gain moyen d'un joueur.

♦ Lorsque $E(X) > 0$, le jeu est **avantageux pour le joueur**.
♦ Lorsque $E(X) < 0$, le jeu est **désavantageux pour le joueur**.
♦ Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est **équitable.**

Exercice (10 min)

Un joueur lance successivement trois fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Il gagne 600 francs s'il obtient 3 fois « FACE », gagne 300 francs s'il obtient exactement 2 fois « FACE », gagne 100 francs s'il obtient exactement une fois « FACE », mais paye 1000 francs s'il n'obtient que des « PILE ». On désigne par X la variable aléatoire représentant en francs le gain du joueur (un gain est positif ou négatif).

1) Détermine la loi de probabilité de la variable X.

2) Calcule la probabilité de gagner strictement moins de 300 francs.
3) a. Calcule l'espérance mathématique de la variable X.
 b. Que représente ce résultat pour le joueur ?
 c. Interprète ce résultat pour le joueur.
4) Calcule le montant que le joueur devrait payer lorsqu'il obtient que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

Solution

1. Les résultats possibles sont : (F;F;F) ; (F;F;P) ; (F;P;F) ; (P;F;F) ; (P;P;F) ; (P;F;P) ; (F;P;P) ; (P;P;P).
Les différents résultats possibles donnent les gains suivants : -1000 ; 100 ; 300 ; 600.
L'ensemble des valeurs prises par X sont $\{-1000\ ;\ 100\ ;\ 300\ ;\ 600.\}$
P(X= -1000) = P({(P ; P ; P)}) $= \frac{1}{8}$; P(X= 100) = P({(P; P; F) ; (P; F; P) ; (F; P; P)}) $= \frac{3}{8}$;
P(X= 300) = P ({(F; F; P) ; (F; P; F) ; (P; F; F) })$= \frac{3}{8}$; P(X= 600) = P({(F ; F ; F)}) $= \frac{1}{8}$

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Soit A l'événement « Gagner moins de 300F ».
Donc P(A)= P(X= -1000) + P(X= 100) $= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.
3. a. E(X) = $(-1000)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = 100$.
 b. 100 F représente le gain moyen du joueur.
 c. $E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur.

Calcule le montant que le joueur devrait payer lorsqu'il obtient que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

4. Soit S le montant que le joueur devrait payer s'il n'obtenait que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.
$E(X) = (-S)\left(\frac{1}{8}\right) + 100\left(\frac{3}{8}\right) + 300\left(\frac{3}{8}\right) + 600\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1800-S}{8}$.
Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$.
$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1800-S}{8} = 0 \Leftrightarrow S = 1800$.
Le joueur doit payer 1800F lorsqu'il n'obtient que des « PILE » pour que le jeu soit équitable.

3. Schéma de Bernoulli

Définitions

■Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités exclusives : l'une est appelée **succès** notée S et l'autre **échec** notée $\overline{S}$.

■Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de suite ($n \geq 2$) de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli.

Remarque
Lorsqu'on a une épreuve de Bernoulli, si on note p la probabilité du succès, celle de l'échec est 1-p.

Exemple
Le lancer d'une pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli car ce lancer conduit à deux résultats exclusifs : pile et face.
Si nous nous intéressons à l'évènement obtenir face, cet évènement est appelé succès et a pour probabilité 0,5.

Exercice (3 min)
On lance une fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On s'intéresse à l'apparition du chiffre 6 sur la face supérieure.
Justifie qu'on a une épreuve de Bernoulli dont tu préciseras la probabilité de succès.

Solution
Le lancer de ce dé cubique conduit à deux éventuellement exclusives : obtenir 6 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ et ne pas obtenir 6 avec une probabilité de $\frac{5}{6}$.
On a une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $\frac{1}{6}$.

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves et p la probabilité du succès
(celle de l'échec est 1-p).
La probabilité d'obtenir exactement k succès au cours des n épreuves est :
$\boldsymbol{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ **où** $\boldsymbol{0 \leq k \leq n}$**.**

Exercice
On lance 5 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de1 à 6 et on note après chaque lancer le chiffre apparu sur la face supérieure.
Calcule la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le chiffre 2.

Solution
Considérons l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer le dé et à s'intéresser au chiffre 2.
Le succès S « Obtenir 2 » a pour probabilité $P(S) = \frac{1}{6}$.
L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, on a un schéma de Bernoulli.
L'événement « Obtenir exactement 4 fois le chiffre 2 au cours des 5 lancers » a pour probabilité :
$C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 = \frac{25}{7776}$.

4. Loi binomiale
Définition

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves identiques, p la probabilité du succès et X la variable aléatoire désignant le nombre k de succès au cours des n épreuves ($0 \leq k \leq n$)
La loi de probabilité de X est définie par : $\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$
Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$.
Elle est notée B(n;p)**.**

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
L'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X sont données par les formules :
E(X) = np et V(X) = np(1-p)

Exercice

Sur une route, deux carrefours sont munis de feux tricolores A et B. On supposera que ces feux ne sont pas synchronisés et que pour un automobiliste circulant sur cette route, l'apparition d'une couleur donnée est un pur hasard. On admet que la probabilité pour que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$. Les feux A et B fonctionnent de manière indépendante.

1. Un automobiliste passe successivement aux deux carrefours.
   a) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre deux feux verts.
   b) Calcule la probabilité pour qu'il rencontre au moins un feu vert.
2. Un autre automobiliste passe 5 fois au carrefour muni du feu A.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de fois où l'automobiliste rencontre le feu vert
   a) Calcule la probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert.
   b) Calcule l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.
   Donne l'arrondi d'ordre zéro de l'espérance mathématique de X et interprète ce résultat.

Solution

1. a) Soit l'événement A « le feu A est vert » et l'événement B « Le feu B est vert ».
Les événements A et B sont indépendants.
On a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

b) Soit l'événement C « l'automobiliste rencontre au moins un feu vert » et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.
On a : $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$, et comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants alors :
$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
D'où $\mathbf{P(C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}}$

2.

a) Lorsque l'automobiliste se présente au carrefour A, on s'intéresse à deux résultats : S « il rencontre le feu vert » et $\overline{S}$ « il ne rencontre pas le feu vert ». Cette expérience est une épreuve de Bernoulli. On a $P(S) = \frac{3}{4}$

L'épreuve étant répétée 5 fois de suite et de façon indépendante, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p tels que : $n = 5$ et $p = \frac{3}{4}$.
La probabilité pour que l'automobiliste rencontre exactement 3 fois le feu vert est :
$P(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} \approx 0,26$

b) Ici, il est préférable d'utiliser les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi, $E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ et $V(X) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$
$E(X) \approx 4$. L'automobiliste rencontre en moyenne 4 feux verts en passant 5 fois au carrefour muni du feu A.

5. Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et P une probabilité sur Ω.
La fonction de répartition de X est l'application F de IR dans [0; 1] définie par :
$F(x) = P(X \leq x)$.

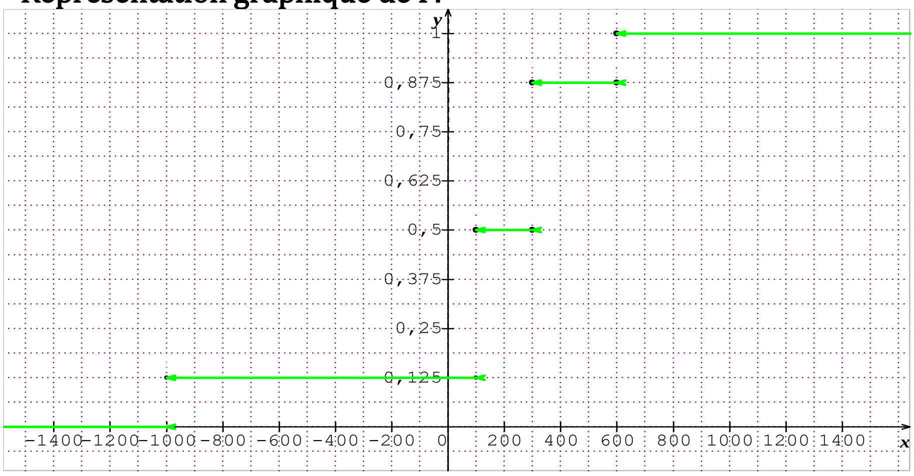
Exercice
Détermine et représente graphiquement la fonction de répartition F de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	-1000	100	300	600
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Solution
• Détermination de F.

La fonction de répartition F de X est définie sur IR par :
Pour tout $x \in]-\infty; -1000[\quad F(x) = 0$
Pour tout $x \in [-1000;\ 100[\quad F(x) = \frac{1}{8}$
Pour tout $x \in [100;\ 300[\quad F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$
Pour tout $x \in [300;\ 600[\quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$
Pour tout $x \in [600;\ +\infty[\quad F(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1.$

• Représentation graphique de F.



Remarque
La fonction de répartition est une fonction définie par intervalles.
La fonction de répartition est une fonction en escalier, croissante.

Exercice de maison

Exercice 1

Un jeu consiste à faire tourner une roue autour de son axe, roue sur laquelle on a marqué un secteur angulaire de 50°. On déclare qu'il y a succès si la roue s'arrête de telle sorte que la flèche (fixe) soit en face du secteur angulaire de 50°, sinon il y a échec. On tourne 7 fois la roue.
Calcule la probabilité des événements suivants :
A « Obtenir exactement trois succès ». B « Obtenir au moins un succès » (On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats)

Exercice 2

Dans une foire, on propose le jeu suivant.
Le joueur mise 500 F sur l'un des numéros 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Puis on lance deux dés réguliers à six faces :
- si le numéro sort deux fois, le joueur remporte deux fois sa mise ;
- s'il sort une fois, le joueur récupère sa mise ;
- s'il ne sort pas, le joueur perd sa mise.

1) Détermine la loi de X
2) Calcule l'espérance mathématique de X.
3) a) Détermine la fonction de répartition de X.
   b) Représente graphiquement cette fonction.

Exercice de synthèse

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que pour un jour donné :
- La probabilité qu'il ait une affluence de clients est de 0,6.
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,7.
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,4.

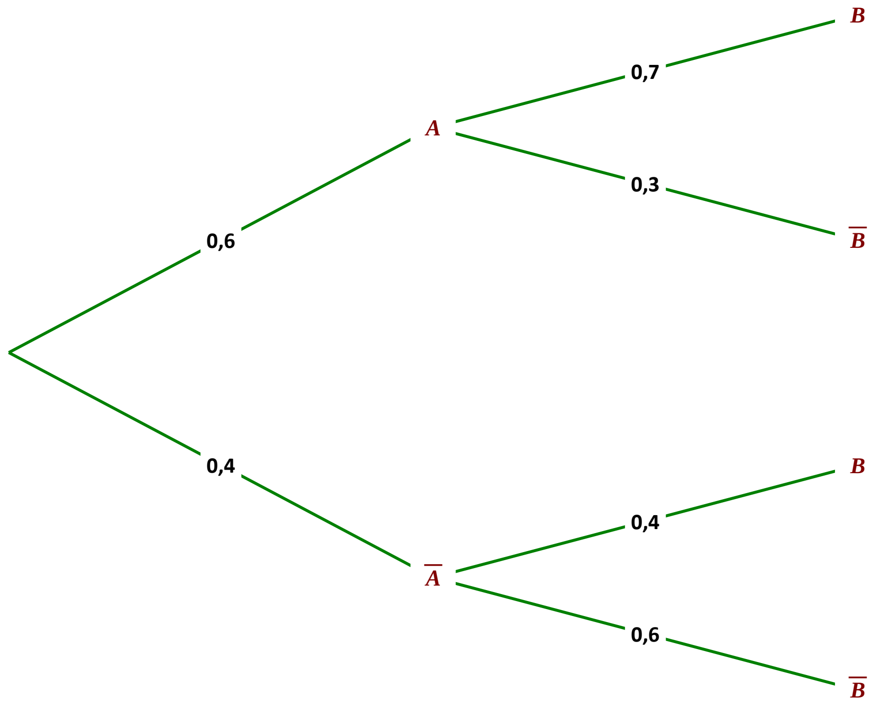
On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice »
1) On choisit un jour au hasard.
a) Calcule la probabilité de l'évènement E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »
b) Démontre que la probabilité P(B) de l'évènement B est égale à 0,58.
c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calcule la probabilité qu'il ait eu une affluence de clients ce jour-là. *(On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible)*

2) Mariam veut faire une prévision sur trois jours successifs donnés. On désigne par X le nombre de fois qu'elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
a) Détermine les valeurs prise par X.
b) Détermine la loi de probabilité de X. *(On donnera l'arrondi d'ordre 3 des résultats)*
c) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X.

3) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs.
a) Justifie que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0,42)^n$
b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$.

Solution

Etablissons un arbre pondéré



1) a. **Calcul de P(E)**

E « il y a affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »

Ainsi $E = A \cap B$. on a donc $P(E) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

$= 0{,}6 \times 0{,}7$

$= 0{,}42$

b) Calcul de P(B)

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= P(A) \times P(B/A) + P(\bar{A}) \times P(B/\bar{A})$

$= 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}4$

$= 0{,}42 + 0{,}16$

$= 0{,}58$

c) On sait que Mariam a réalisé un bénéfice. Calculer la probabilité qu'il ait eu une affluence de clients ce jour-là, revient à calculer la probabilité de l'évènement A sachant B.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0{,}42}{0{,}58}$$

$$= \frac{42}{58}$$

$$= \frac{21}{29}$$

2) a.

Sur les trois jours Mariam peut ne jamais réaliser un bénéfice donc X prendra la valeur 0, Sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice qu'un seul jour, X prendra la valeur 1, Sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice sur deux jours, X prendra la valeur 2 et enfin sur les trois jours elle peut réaliser un bénéfice tous les jours, X prendra donc la valeur 3.

On a donc $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

b). X est une variable qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $P = 0{,}58$.

$P(X=0) = C_3^0 \times (0{,}58)^0 \times (1-0{,}58)^3 = 0{,}074088 = 0{,}074$
$P(X=1) = C_3^1 \times (0{,}58)^1 \times (1-0{,}58)^2 = 0{,}306936 = 0{,}307$
$P(X=2) = C_3^2 \times (0{,}58)^2 \times (1-0{,}58)^1 = 0{,}423864 = 0{,}424$
$P(X=3) = C_3^3 \times (0{,}58)^3 \times (1-0{,}58)^0 = 0{,}195112 = 0{,}195$

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,074	0,307	0,424	0,195

c). **Calcul de E(X)**
$E(X) = n \times p = 3 \times 0{,}58 = 1{,}74$

3) a. **Calcul de P_n**
Soit l'évènement F : « Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs », l'évènement contraire de F est l'évènement $\bar{F}$ « Mariam ne réalise aucun bénéfice pendant n jours successifs ».
On a $P(\bar{F}) = C_n^0 \times (0{,}58)^0 \times (1-0{,}58)^n$
$= (1-0{,}58)^n$
$= (0{,}42)^n$
Donc $P_n = p(F)$
$= 1 - P(\bar{F})$
$= 1-(0{,}42)^n$
b) $P_n \geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0{,}42)^n \geq 0{,}9999$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq 0{,}9999-1$
$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq -0{,}0001$
$\Leftrightarrow (0{,}42)^n \leq 0{,}0001$
$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}42) \leq \ln(0{,}0001)$
$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)}$
$\Leftrightarrow n \approx 10{,}61$
La valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0{,}9999$ est donc 11.

3. EXERCICES

Exercice1

Sur un disque on a enregistré dix morceaux différents. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau :

Code du morceau enregistré	A	B	C	D
Temps d'écoute en secondes	280	200	240	280

E	F	G	H	I	J
260	240	280	200	240	280

Un appareil de lecture sélectionne au hasard un des dix morceaux et un seul.
Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionné.
1. Calcule la probabilité, pour chacun des morceaux soir sélectionné à cette lecture.
2.a) Calcule la probabilité de l'événement E_1 :
« Le morceau sélectionné à une durée d'écoute de 240 secondes ».
b) Calcule la probabilité de l'événement E_2 :

« Le morceau sélectionné à une durée d'écoute supérieure à 220 secondes ».
3. On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau.
a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calcule l'espérance mathématique de X et son écart-type.

Exercice 2

Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles).
On admet que, dans une population donnée, les deux événements :D :«être atteint de surdité à l'oreille droite» et G :«être atteint de surdité à l'oreille gauche» sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05, ce que l'on note $p(D) = p(G) = 0{,}05$.
On considère les éléments suivants :
B : « Etre atteint de surdité bilatérale »
U : « Etre atteint de surdité unilatérale »
S : « Etre atteint de surdité (sur une oreille au moins) »
N.B. On donnera les valeurs numériques des probabilités sous forme décimale approchée à 10^{-4} près.
1. a) Exprime les événements B et S à l'aide de G et de D, puis calculer les probabilités p(B) de B et p(S) de S.
b) Dédui-en la probabilité de U.
2. Sachant qu'un sujet pris au hasard dans la population considérée est atteint de surdité, calcule la probabilité :
a) Pour qu'il soit atteint de surdité à droite.
b) Pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale.
3. On considère un échantillon de 10 personnes prises au hasard dans la population considérée, qui est suffisamment grande pour que les choix puissent être assimilés à des choix successifs indépendants.
a) Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement k personnes atteintes de surdité dans l'échantillon.
b) Calcule la probabilité pour qu'il n'y ait aucun sujet atteint de surdité dans l'échantillon.

Exercice 3

Un opérateur mobile de la place vend deux types de téléphones portables :
Type A : des téléphones grand format et le **Type B** : des téléphones miniatures
Il propose aussi deux types d'abonnements d'appels mensuels : **Abonnement A_1** : 1 heure et l'**Abonnement A_2** : 2 h 30.
Le service marketing de cette structure effectue une enquête sur un échantillon de 2 000 clients ayant acheté dans son service, pendant le mois en cours, un téléphone et un seul de l'un des types vendus et ayant opté pour un seul des abonnements proposés.

- Sur les 2 000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle de type A.
- Sur ces 2 000 clients, 960 ont choisi l'abonnement 1 heure.
- Parmi les clients qui ont acquis le modèle A, 32% ont pris l'abonnement de 1heure

Un client de cette population est pris au hasard. On note les événements :
A : « le client a acheté le modèle de type A »
A_1 : « le client a choisi l'abonnement 1 heure »
Les résultats seront donnés sous forme décimale avec 3 chiffres après la virgule.
1. a. Justifie que la probabilité de l'événement A est égale à 0,6.
   b. Déduis en la probabilité pour que le client ait acheté le modèle B.
2. Calcule la probabilité de l'événement A_1.

3. a. Traduis l'énoncé de cet exercice à l'aide d'un arbre pondéré de probabilité que l'on complètera par les probabilités manquantes au fur et à mesure.

b. Calcule la probabilité d'avoir acquis le modèle grand format et d'avoir opté pour l'abonnement A_1

c. Justifie que la probabilité d'avoir choisi le modèle miniature et l'abonnement A_1 est égale à 0,288.

4. Le prix d'un téléphone de type A est de 15000 frs CFA et celui de B est de 45000 frs CFA. L'abonnement A_1 revient à 2550 frs CFA par mois et l'abonnement A_2 revient à 6000 frs CFA par mois. On considère le coût mensuel X occasionné par l'achat d'un téléphone et l'abonnement choisi, pour un client pris au hasard dans l'échantillon.

a. Recopie et complète le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X

x_i	17550		47550	
$P(X = x_i)$	0,192	0,408		

b. Démontre que le coût total moyen mensuel occasionné par l'achat d'un téléphone et l'abonnement choisi est estimé à 31344 frs CFA.

Exercice 4

Dans un sac, il y a des grosses boules et des petites ; ces boules sont blanches ou noires.
On sait qu'il y a 5 grosses et 4petites parmi lesquelles 6 sont blanches et 3 noires.
1. Sachant qu'il y a 3 boules à la fois blanches et grosses, détermine le nombre de boules « petites et noires », « grosses et noires », « petites et blanches ».
(On pourra utiliser un tableau à double entrée)
2. On tire une boule au hasard. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, quelles sont les probabilités pour qu'elle soit :
a) Blanche et petite.
b) Blanche.
C) Petite.
d) Blanche ou petite.

Exercice 5

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
F l'évènement « le membre choisit est une femme", »
T l'évènement « !le membre choisit adhère à la section tennis". »
1) Justifie que la probabilité de l'évènement F est égale a $\frac{2}{5}$.
2) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Calcule la probabilité que ce membre soit une femme.

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.
1) Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
a) Détermine la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y a ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
b) Pour tout entier naturel n non nul, on note $p_n$la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Justifie que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - (\frac{7}{10})^n$

c) Détermine le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.
2) Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 2000francs chacun, les autres ne rapportent rien. Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 500francs puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 2000 francs par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 500francs) réalise par un joueur lors d'une partie de cette loterie.
a) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Calcule l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de douanes. Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.
A chacun de ces barrages, le contrôle obligatoire consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).
1. Le camion arrive à un barrage donné.
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).
a) Calcule la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.
b) Démontre que la probabilité pour que l'un au moins des sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égal à 0,6.
2. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de 10.000 francs (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec son chargement. Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.
i) On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert.
On note X la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Démontre que l'expérience mathématique de X est égale à 18 000.
ii) On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe. Calcule la probabilité pour que son chargement soit saisi.
(On donnera l'arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

Exercice 7

On dispose de neuf jetons indiscernables au toucher et portant respectivement les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
On place ces neufs jetons au hasard sur la grille ci-contre, en plaçant un jeton par case.
1. De combien de façons peut-on placer les neufs jetons sur la grille ?
2. a)Quelle est la probabilité de lire « 421 » sur la deuxième ligne ?
b) Calcule la probabilité de lire « 421 »sur la deuxième ligne et « 345 » sur la première colonne.
Maintenant, pour remplir les cases de la première ligne, on tire un jeton parmi les neuf, on écrit le chiffre dans la première case, on remet le jeton et on recommence l'expérience pour chacune des deux autres cases.
3. Calcule la probabilité d'avoir au moins un « 4 » sur la première ligne.

Exercice 8

Une entreprise de location de voiture relève dans sa comptabilité les frais de réparation des pannes d'origine mécanique et ceux de remise en état de la carrosserie.
Elle a observé que, pour une voiture louée une semaine :
- La probabilité de panne mécanique est 0,32
- La probabilité de dégâts à la carrosserie est 0,54

D'autre part la probabilité pour qu'une voiture présente des dégâts à la carrosserie sachant qu'elle est en panne mécanique est : 0,45.

1. Calcule les probabilités suivantes :
a) La probabilité P_1 pour qu'une voiture ait une panne mécanique et présente des dégâts à la carrosserie.
b) La probabilité P_2 pour qu'une voiture ait seulement une panne mécanique.
c) La probabilité P_3 pour qu'une voiture présente seulement des dégâts à la carrosserie.
d) La probabilité P_4 pour qu'une voiture n'ait ni panne mécanique ni dégâts à la carrosserie.
2. Calcule la probabilité pour qu'une voiture louée pendant 8 semaines de suite, n'ait ni panne mécanique, ni dégâts à la carrosserie pendant 4 semaines.
3. Pour une voiture louée une semaine, les frais s'élèvent en moyenne à :
• 30.000 Frs en cas de panne mécanique
• 50.000 Frs en cas de dégâts à la carrosserie
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant moyen en francs CFA des frais hebdomadaires pour une voiture.
a) Détermine la loi de probabilité de X
b) Calcule l'espérance mathématique de X. L'interpréter.

Exercice 9

Pour être plus proche de ses membres, une association de quartier a mis en place un projet de soutient appelé le **« OUKÊ »** qui consiste à faire cotiser chaque mois tous les membres qui ont souscrit, une somme de 10000frs chacun puis on remet 98% de la somme totale recueillie au membre ayant souscrit à ce projet en fonction de sa date souscription. Au mois suivant le membre bénéficiaire est sorti de la liste des bénéficiaires. Une étude statistique a montré qu'un quart des femmes et un tiers des hommes souscrivent au projet **« OUKÊ»**, 30% des membres de cette association souscrivent au projet **« OUKÊ »**

Partie A : On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
F : « le membre choisi est une femme »,
N : « le membre choisi a souscrit au projet **« OUKÊ »**

1) Démontre que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2) On choisit un membre parmi ceux qui ont souscrit au projet **« OUKÊ »**.
Calcule la probabilité que ce membre soit une femme.

Partie B : Pour financer une sortie détente pour le 24 décembre 2015, la direction de cette association organise une tombola. Tous les billets au nombre de 1000, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 65000 francs, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 10000 frs, 50 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 1000 frs, les autres sont perdants.
1) On choisit au hasard un billet. Tous les billets ont la même probabilité d'être choisis.
Détermine la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Le billet choisi gagne un lot d'une valeur de 10000 frs »

B : « Le billet choisi est perdant »
C : « Le billet gagne un lot »
2) Les billets sont vendus à 1000 frs. Donner la recette que fera la trésorerie de cette association après dépense.
3) On appelle gain d'un billet la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque billet choisi au hasard le gain de ce billet.
a) Donne les valeurs prises par X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Calcule le gain moyen d'un billet puis interpréter ce résultat, retrouver le résultat de la question partie B-2)
d) Cette tombola est-elle rentable pour l'association ? Justifie ta réponse.

Exercice 10

A la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun 1 billet dont :
♦ 7 pour la gare B (prix du billet 5000 francs)
♦ 5 pour la gare C (prix du billet 6000 francs)
♦ 4 pour la gare D (prix du billet 7500 francs)
1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet en franc.
a)Détermine la loi de probabilité de X.
b) Calcule l'espérance mathématique de X.
c) Calcule l'écart type de X.
d) Définis la fonction de répartition F de X puis la représenter dans un repère orthogonal
2. On choisit maintenant, au hasard, trois de ces voyageurs.
a)Calcule la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
b) Calcule la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
c) Calcule la probabilité pour que cette direction soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

Exercice 11

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O.
Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur il est dit de Rhésus positif (noté Rh+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh-).
Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.
1.a) Calcule la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O.
b) Calcule la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel.
c) Calcule la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif.

2. On choisit au hasard 5 individus de la population P et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels figurant parmi ces 5 individus.
a) Donne la loi de probabilité de X.
b) Détermine l'espérance mathématique de X.

Exercice 12

Un parking pour voitures comporte 10 places numérotées de 1 à 10 délimitées pour le stationnement des véhicules.
La probabilité d'occupation d'une place quelconque est égale à 70%. On admet de plus que chaque place a la même probabilité d'être occupée.
Un conducteur veut garer au hasard son véhicule sur ce parking.
1° Calcule la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 places libres quand il se présente à l'entrée du parking.
2° Calcule la probabilité pour que les places numérotées 3, 6 et 9 soient libres quand le conducteur se présente à l'entrée du parking.
3° Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places libres dont le numéro est un multiple de 3.
a) Donne la loi de probabilité de X.
b) Détermine l'espérance mathématique de X.
c) Représente la fonction de répartition de X.

4. SITUATION D'EVALUATION

Exercice 13

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal. Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.
Monsieur Koné, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code. Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7. Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique. Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leurs permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs. Monsieur Koné joue la prudence et s'impose deux essais au maximum. Soit les évènements suivants :
E : « Monsieur Koné réussit à retirer de l'argent au premier essai ».
F : « Monsieur Koné échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».
La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux. X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur Koné.
Calcule la taxe moyenne que payerait Monsieur Koné.

Exercice 14

Le carré ABCD représente une cible sur laquelle on lance des fléchettes.
Les longueurs des côtés des 4 carrés sont respectivement de 8 cm, 6cm, 4 cm et 2 cm. On suppose que :
- on ne rate jamais la cible
- la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à son aire.

1. Calcule les probabilités P1, P2, P3 et P4 d'atteindre les zones C1, C2, C3 et C4 (la zone C2 est en gris)
2. Doumbia lance une fléchette. S'il atteint :

- C1 il gagne 100 F
- C2 il gagne 50 F
- C3 il perd 20F
- C4 il perd 30F

On désigne par X le gain algébrique de Doumbia
On suppose que Pol lance 16 fléchettes, les unes après les autres, dans les mêmes conditions. Dis si Monsieur Doumbia peut espérer gagner de l'argent. Le jeu est-il équitable ? Justifie ta réponse.