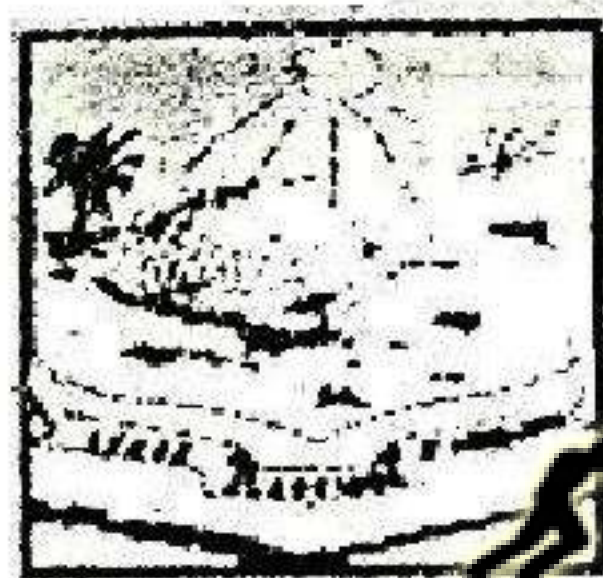




Fomesoutra.com
ça soutra !

MATHEMATIQUES

Durée : 4H

Série : C

Coef. : 5

EXERCICE-1 (4 points) SIMILI BAC 2012

Lycée Classique d'Abidjan

Partie -A

Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, les systèmes suivants : a) $\begin{cases} x^2 y = 123480 \\ PGCD(x, y) = 14 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 y = 25725 \\ PPCM(x, y) = 105 \end{cases}$

Partie-B

1. Soit B une boîte en carton, en forme de pavé droit de hauteur L , à base carrée de côté l , où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir le carton B avec des morceaux de savons cubiques tous identiques dont l'arête α est un entier naturel non nul (les savons devant remplir complètement le carton B sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, $l = 111$ et $L = 2121$.

i) Quelle la plus grande valeur possible pour α ?

ii) Quelles sont les valeurs possibles pour α ?

b) Dans cette question le volume de le carton B est $v = 123480$. On sait que, pour remplir le carton B, la plus grande valeur possible de α est 14. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes en carton B possibles dont on précisera les dimensions.

2. On veut remplir une grande caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes en carton B toutes identiques telles que décrites dans la question 1. (les boîtes B, empilées verticalement dans le sens de la hauteur L , doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a) Dans cette question, $l = 111$ et $L = 2121$.

i) Quelle est la plus petite valeur de c pour la caisse C ?

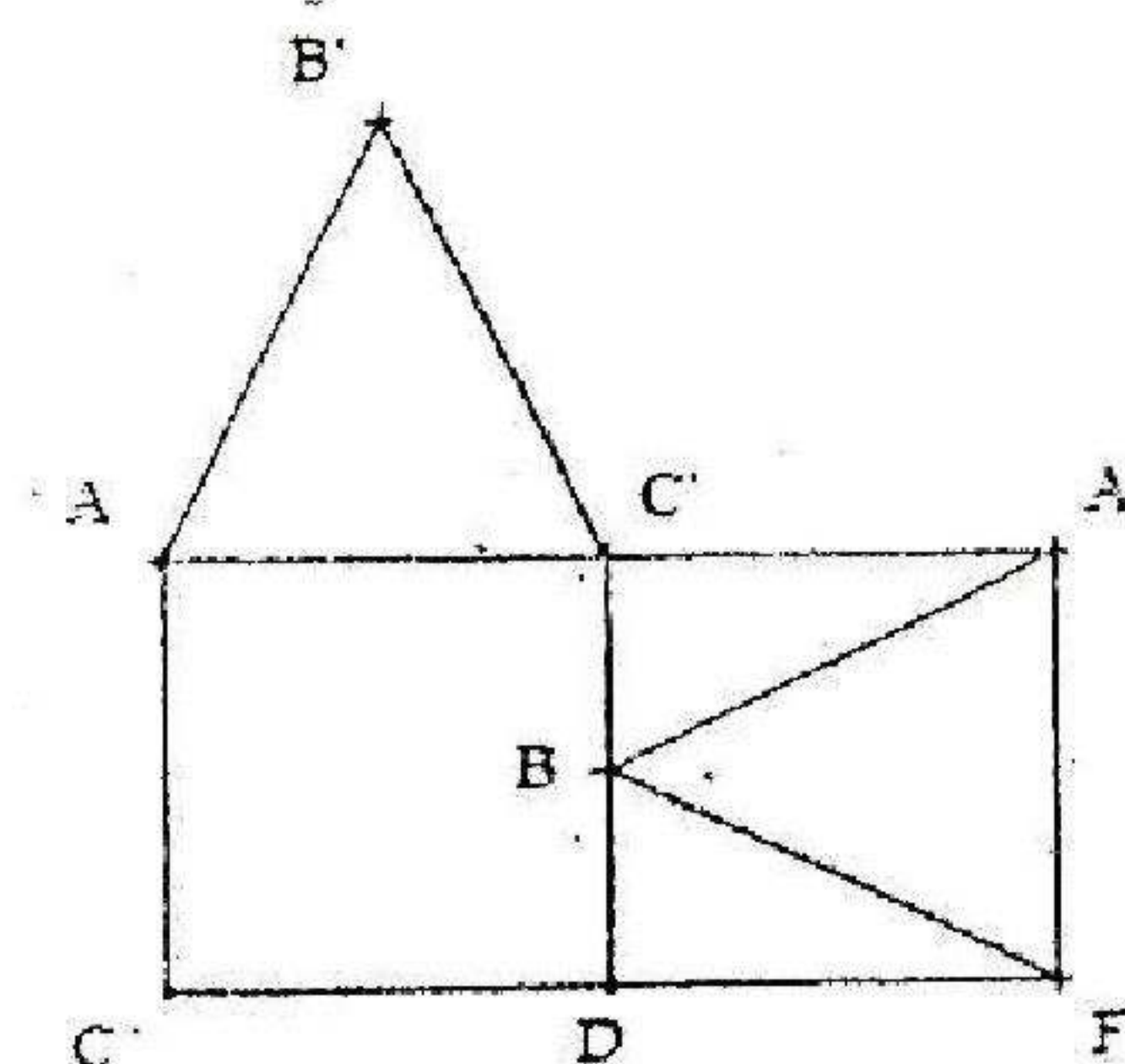
ii) Quelle est l'ensemble des valeurs possibles pour l'arête c ?

b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 25725. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

Rappel : le volume d'un cube est : $v = a^3$, le volume d'un pavé droit est :
 $v = B \times h$ B étant la surface de base

EXERCICE-2 (5 points)

On considère la figure ci-contre, ACFA' est un rectangle. B, C' et D sont les milieux respectifs des segments [DC'], [AA'] et [CF]. Les triangles AB'C' et A'BF sont superposables. Notre objectif est de déterminer l'antidépacement qui transforme AB'C' en A'BF.



1. a) Justifier simplement que les triangles ABC et AB'C' sont isométriques.
- b) Soit S l'antidépacement qui transforme le triangle ABC en A'BF. Caractériser S.
2. Soit R le déplacement qui transforme le triangle ABC en AB'C'.

a) Déterminer R.

- b) En déduire que $(BC) \perp (B'C')$.
3. On pose $\varphi = R \circ S_{(BD)}$, $S_{(BD)}$ étant la symétrie orthogonale d'axe la droite (BD)
- a) Quelle est la nature de la transformation φ .
- b) Déterminer l'image du triangle $A'BF$ par φ .
4. a) Déterminer la droite (Δ) telle que : $T_{\overline{CC'}} = S_{(AD)} \circ S_{(\Delta)}$.
- b) Déterminer la droite (Δ') telle que : $R = S_{(AD)} \circ S_{(\Delta')}$.
- c) Justifier que $T_{\overline{DC}} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$.
- d) Justifier que $R \circ S = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$. Retrouver la réponse de la question 3-a).
5. Démontrer que $\varphi = S_{(FC')} \circ T_{\overline{DA}}$ et caractériser l'isométrie φ

PROBLEME (11 points)

On se propose d'étudier la fonction f définie par :
$$\begin{cases} \text{si } x \neq 0, f(x) = e^{\frac{\ln|x+1|}{x}} \\ f(0) = e \end{cases}$$
. Soit (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm).

PARTIE-A (étude d'une fonction auxiliaire)

Soit la fonction h la fonction définie par $h(x) = \ln|x+1| - \frac{x}{x+1}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de h .
- b) Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ et en donner l'interprétation graphique.
2. a) Calculer $h'(x)$, et en déduire le sens de variation de h , ainsi que son tableau de variation.
- b) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -\infty; -1[$ et justifier que $-4,6 \leq \alpha \leq -4,5$.
6. Justifier que :
$$\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty; \alpha[\cup]-1; +\infty[, h(x) \geq 0 \\ \text{si } x \in [\alpha; -1[, h(x) \leq 0 \end{cases}$$

PARTIE- B (étude d'une autre fonction auxiliaire)

On considère une autre fonction g définie par : $\text{si } x \neq 0, g(x) = \frac{\ln|x+1|}{x}$ et $g(0) = 1$

1. En admettant que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g en 0 et interpréter le résultat.
2. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_g .
3. Démontrer que pour tout x élément de D_g , $g'(x) = -\frac{h(x)}{x^2}$. En déduire le tableau des variations de g .
4. Soit λ un paramètre réel, donner le nombre des solutions de l'équation $g(x) = \lambda$ suivant les valeurs de λ .

5. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$.

PARTIE-C (étude de la fonction f)

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 , et interpréter le résultat.
 c) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. Donner l'interprétation graphique de ces résultats.
2. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = -\frac{h(x)}{x^2} f(x)$.
 b) Etudier le sens des variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
 c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
 d) Etudier la position relative de la droite d'équation $y = 1$ et la courbe (C_f) .
3. Construire dans le repère (O,I,J), la droite (T), la courbe (C_f) et ses éventuelles asymptotes. (on prendra : $\alpha = -4,6$ et $f(\alpha) = 0,8$).