UP Mathématiques

BACCALAUREAT BLANC

Avril 2017

Lycée Sainte Marie

Epreuve de **MATHEMATIQUES**

SERIE C . **Durée** : 4 heures

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées :1/3 ;2/3 ;3/3.

Il sera remis 02 feuilles de papiers millimétrés à chaque élève.

EXERCICE 1: 3,25 points.

1) a. Justifier que 2017 est un nombre premier.

b. Justifier qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2017v = 1$.

c. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u_0 et v_0 *tels que :* $123u_0 + 2017v_0 = 1$

d. En déduire un entier relatif k tel que : $123k \equiv 1[2017]$

2) a. Démontrer que pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456[2017] \Leftrightarrow x \equiv 456k\ [2017]$

b. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $123x \equiv 456\ [2017]$

c. Démontrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que :

$1 \leq n \leq 2016$ et $123x \equiv 456\ [2017]$.

3) Soit a un entier tel que $1 \leq a \leq 2016$.

a. Déterminer PGCD(a ; 2017). En déduire qu'il existe un entier m tel que $am \equiv 1[2017]$.

b. Soient b *et* x deux entiers tels que $0 \leq x \leq 2016$ et $ax \equiv b[2017]$. Justifier que x est unique .

EXERCICE 2: 6,25 points.

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ les points C, B et A d'affixes respectives $Z_C = 3 + i\sqrt{3}$, $Z_B = -\sqrt{3} + 3i$ et $Z_A = Z_C + Z_B$

1) a. Déterminer une forme exponentielle de Z_C et Z_B. .

b. En déduire, en le justifiant, la construction des points C et B dans le plan muni du repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

c. Construire, en le justifiant, le point A dans le repère précédent.

d. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [BC] , [CA] et [AB]. On appelle **r** la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Soit $\mathbf{f} = \mathbf{r} \circ t$ et $\mathbf{g} = t \circ \mathbf{r}$

a. Déterminer les applications complexes associées à **r** et à t.

b. Déterminer l'image de K par **f**.

c. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de **f**.

d. Déterminer l'image de J par g. Puis préciser la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit $\mathbf{f}^{-1}$ l'application réciproque de **f**.

a. Déterminer l'image de A par $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}^{-1}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}^{-1}$.

4) Soit **h** l'homothétie de centre Ω d'affixe i et de rapport -2 .

a. Justifier que l'application $\mathbf{S} = \mathbf{h} \circ \mathbf{f}^{-1}$ est une similitude directe dont on déterminera le rapport et l'angle .

b. Sachant que $\mathbf{S}(\Omega) = \mathrm{B}$, justifier que l'application complexe associée à **S** est telle qu'à tout point M du plan d'affixe Z on associe le point M' d'affixe $Z' = -2iZ - 2 - \sqrt{3} + 3i$.

c. En déduire l'affixe du centre D de **S** .

5) Construire le triangle Ω'K'J', image du triangle ΩKJ par **S** .

PROBLEME : 10,50 points.

Le plan est muni du repère orthonormé (O ; I ; J).Unité graphique 1 cm.

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = ln\,(1 + e^{-x})$ et C_k sa courbe représentative dans le repère (O ; I ; J).

1) a. Calculer $\lim_{x \to -\infty} ln\,(1+e^{-x})$ et $\lim_{x \to +\infty} ln\,(1+e^{-x})$. En déduire si possible une interprétation graphique des résultats.

b. Calculer $k'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$. En déduire le sens de variations de k .

c. Etablir le tableau de variations de k .

d. Tracer C_k dans le repère (O ; I ; J)

2) a. Justifier que k est une bijection. Puis définir k^{-1}, la bijection réciproque de k .

b. Calculer $(k^{-1})'(1)$.

c. Construire dans le repère (O ; I ; J) précédent, la courbe représentative de k^{-1}.

3) Démontrer que, pour tout nombre réel t strictement positif, $t - \frac{t^2}{2} \leq ln(1+t) \leq t$.

4) En déduire que, pour tout nombre réel x, $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq k(x) \leq e^{-x}$.

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 + \frac{1}{e} \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right) \end{cases}, \quad \forall n > 0$$

1) a. Etudier le sens de variations de la suite (u_n).

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$ln\,(u_n) = k\,(1) + k\,(2) + \cdots + k\,(n)\,.$$

2) On pose

$$S_1 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}\,.$$

Démontrer que $S_1 - \frac{1}{2}S_2 \leq ln\,u_n \leq S_1$

3) Soit a un nombre réel tel que $a > 1$.

a. Calculer $An = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} An$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est majorée et convergente. Soit l sa limite.

d. Démontrer que $ln\,l \leq \frac{1}{e-1}$.

e. Sachant que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq ln\,l$, déduire de ce qui précède, une valeur approchée de l à 0,1 près.