Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2cm.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 + (i - 3\sqrt{3})Z^2 + 12Z - 12i - 12\sqrt{3} = 0$.

a. Justifier que $2\sqrt{3}$ est solution de (E).

b. On pose $P(Z) = Z^3 + (i - 3\sqrt{3})Z^2 + 12Z - 12i - 12\sqrt{3}$.

Déterminer $Q(Z)$ tel que $P(Z) = (Z - 2\sqrt{3})Q(Z)$ pour tout Z appartenant à $\mathbb{C}$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $P(Z) = 0$.

2) Soit les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

a. Ecrire a, b et c sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

b. Placer dans le plan $\mathcal{P}$, les points A, B et C.

3) On désigne par M le barycentre du système $\{(A;1);(C;3)\}$ et N le barycentre du système $\{(A;2);(B;1)\}$.

a. Justifier que l'affixe m du point M est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

b. Déterminer l'affixe n du point N. Placer, en le justifiant, le point N dans le plan $\mathcal{P}$.

4) a. Donner en justifiant la positon relative des droites (BM) et (AC).

b. Que représente le point M pour le triangle ABC ? justifier la réponse. Placer le point M sur la figure ci-dessus.

5) On désigne par K le barycentre du système $\{(A;2);(B;1);(C;6)\}$.

a. Déterminer Z_K l'affixe du point K.

b. Démontrer que le point K est le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

Qu'en déduit-on pour le point K ?

6) On pose $Z_0 = \frac{Z - \sqrt{3} + 3i}{Z - 2i}$.

a. Déterminer l'ensemble (E_1) des points du plan d'affixe Z tel que $|Z_0| = 2$.

b. Déterminer et construire dans le plan $\mathcal{P}$ l'ensemble (E_2) des points M du plan tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = \frac{5\pi}{3}$

EXERCICE 2

On considère EFGH un parallélogramme indirect tel que $EF = 6$ cm , $FG = 3$ cm et

$mes\,\widehat{(\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF})} = \frac{2\pi}{3}$. Soit r_1 la rotation de centre E et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre F et d'angle $\widehat{\alpha} = \widehat{(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG})}$

1) a. Faire une figure .

b. Justifier que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2) a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

3) Soit $r_3 = r(G, \widehat{(\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH})})$ et $r_4 = r(H, \widehat{(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HE})})$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_4 \circ r_3$.

4) Utiliser ce qui précède pour caractériser la transformation $r_4 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$.

5) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH si $r_4 \circ r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est l'identité du plan ?

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions f_n , $n \in \mathbb{N}^*$ définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = x - n - \frac{n\ln x}{x}$.

La représentation graphique de f_n dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est appelée C_n
On prendra 2 cm pour unité graphique .

PARTIE A : Etude des variations de f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1)Soit , pour tout entier naturel n non nul , la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$g_n(x) = x^2 - n + n\ln x$.

a. Calculer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $g'_n(x)$ la dérivée de $g_n(x)$. Etudier le signe de $g'_n(x)$ et en déduire le sens de variation de g_n .

c. Etablir le tableau de variation de g_n .

2)a. Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique notée α_n . Puis justifier que $\alpha_n \in [1\,;3]$.

b. Justifier que $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ appartenant à }]0\,;\alpha_n[\,,\ g_n(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \text{ appartenant à }]\alpha_n\,;+\infty[\,,\ g_n(x) > 0 \end{cases}$

3)a. Etudier les limites de f_n en 0 et en $+\infty$. Donner si possible une interprétation graphique de ces résultats.

b. Démontrer que la droite (D_n) d'équation $y = x - n$ est asymptote à la courbe C_n.

c. Etudier la position de C_n et (D_n) lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.

4)a. Etablir que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b. Etudier le signe de $f'_n(x)$ et en déduire le sens de variation de f_n.

PARTIE B : Etude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

1)Justifier que $\alpha_1 = 1$ et $1,2 < \alpha_2 < 1,3$.

2)a. Démontrer que $f_2(\alpha_2) > -1,24$.

b. Démontrer que $f_2(\alpha_2) < -1,10$.

3)Etablir les tableaux de variations de f_1 et f_2.

4)Représenter dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les droites (D_1) et (D_2) puis les courbes C_1 et C_2.

PARTIE C : Etude des positions relatives des courbes C_n.

1)Soit d la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $d(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de d en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $d'(x)$ et étudier le sens de variation de d. Puis établir le tableau de variation de d.

2)a. Démontrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique β et que $\beta \in]0;1[$.

b. Démontrer que $f_n(\beta) = \beta$ pour tout entier naturel n non nul.

c. Etudier le signe de $d(x)$ suivant les valeurs de x.

3)Démontrer que toutes les courbes C_n se coupent en un point A que l'on placera sur la figure.

4)Etudier les positions relatives de C_n et C_{n+1}.