LYCEE SAINTE MARIE | **BAC BLANC SERIE C** | FEVRIER 2014

MATHEMATIQUES | **Durée : 4 h. Coef : 5**

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3

Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré .

EXERCICE 1

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel k non nul , et pour tout entier naturel n : $(x-1)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1$.

Dans toute la suite de l'exercice , on considère un nombre entier a tel que a ≥ 2.

2) a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n.

Démontrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. En déduire que $2^{2012} - 1$ est divisible par 15 , 5 et par 3 .

3) Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD .

a. Démontrer qu'il existe u et v deux entiers relatifs (on supposera que u > 0 et v > 0)

tel que $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.

b. En déduire que l'équation $(a^{mu} - 1)x + (a^{nv} - 1)y = a^d - 1$ admet au moins une solution (α ; β) avec α et β des entiers .

c. $a^d - 1$ est un multiple du PGCD de $(a^{mu} - 1)$ et $(a^{nv} - 1$.

Justifier en utilisant ce qui précède que le PGCD $[(a^{mu} - 1) ; (a^{nv} - 1)]$ $a^d - 1$

4) En déduire PGCD $(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$

EXERCICE 2

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ (unité : 4 cm) . On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i$ et $Z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. (C) désigne le cercle de centre O et de rayon 1 .

1) a. Donner une forme trigonométrique de Z_A et Z_B .

b. Placer dans le plan complexe les points A et B .

2) **Dans la suite de l' exercice, M désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0 ; 2\pi]$.**

On considère l'application f qui, à tout point M de (C), associe le nombre réel

$f(M) = MA \times MB$.

a. Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{i(2\alpha)} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha$.

b. Démontrer que $f(M) = \left| e^{2i\alpha} - 1 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)e^{i\alpha} \right|$.

c. Justifier que $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

3) Démontrer qu'il existe deux points M de (C), dont on donnera les affixes, pour lesquels f(M) est minimal.

4) a. Déterminer l'affixe du point M de (C) pour que le triangle MBA soit rectangle Isocèle en B et indirect.

b. Donner une équation de (δ) le cercle circonscrit au triangle MBA.

PROBLEME

Dans tout le problème, le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5cm).

PARTIE A

Soient la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et (C_1) sa courbe représentative.

1) Calculer la limite de f_1 en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a. Démontrer que, pour tout réel positif x : $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$.

b. En déduire le signe de $f_1'(x)$ et en déduire les variations de f_1.

c. Calculer $f_1(\frac{1}{\sqrt{2}})$, puis dresser le tableau de variations de f_1.

3) On appelle (Δ) la droite d'équation y = x. Déterminer la position de (C_1) par rapport à (Δ).

4) Tracer (C_1) et (Δ).

PARTIE B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle (C_3) sa courbe représentative.

1)a. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a le même signe que $(3 - 2x^2)$.

En déduire le sens de variation de f_3.

b. Calculer $f_3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ puis établir le tableau de variation de f_3.

2) Déterminer les positions relatives de (C_1) et (C_3).

3) Tracer (C_3) dans le même repère que (C_1).

PARTIE C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0 ;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^ne^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

1) a. Calculer f_n', la dérivée de la fonction f_n. Puis étudier le signe de $f_n'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f_n. Puis étabiir le tableau de variation de f_n.

2) a. On appelle S_n, le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.

b. Placer S_1, S_2 et S_3 sur la figure qui précède.

3) a. On considère la fonction f définie par $f(x) = xln(x) - x$. Calculer $f'(x)$.

b. Déterminer sur $]0 ; 2[$, la primitive de la fonction h définie par

$h(x) = xe^{-x^2} - \ln(x) - \frac{3}{x-2}$, prenant la valeur 0 en 1.