

Suites numériques

Exercice 1:

Exercice 1 :

Déterminer la limite de la suite (U_n) dans les cas suivants :

$$U_n = \frac{2n-5}{n+1}; U_n = \frac{5n^2+3n+2}{n^2+n+1}; U_n = \frac{5n^2+1}{4n^2+n+3}; U_n = \frac{2^n-5^n}{2^n+5^n}; U_n = \frac{4^n+2^n}{3^n-7^n}$$

$$U_n = \frac{\sin(n\pi)}{n^2+1}; U_n = \sqrt{n}-\sqrt{n+1}; U_n = \sqrt{\frac{9n+7}{n+5}}; U_n = \frac{2\sqrt{n}}{n-2}; U_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n+7}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-5}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2-\frac{5}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2 \quad ; \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+3n+2}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 5.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+1}{4n^2+n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(5+\frac{1}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n-5^n}{2^n+5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n(-1+\frac{2^n}{5^n})}{5^n(1+\frac{2^n}{5^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1+(\frac{2}{5})^n}{1+(\frac{2}{5})^n} = -1 \quad / \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2}{5})^n = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n+2^n}{3^n-7^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n(1+\frac{2^n}{4^n})}{7^n(-1+\frac{3^n}{7^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n \times \frac{1+(\frac{2}{4})^n}{-1+(\frac{3}{7})^n} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n^2+1} : \text{ On utilise l'encadrement}$$

$$\text{On a : } |\sin(n\pi)| < 1 \text{ donc : } \frac{\sin(n\pi)}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

$$\text{Puis que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 \text{ Alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n^2+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9n+7}{n+5}} : \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n+7}{n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(9+\frac{7}{n})}{n(1+\frac{5}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9+\frac{7}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 9.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{9n+7}{n+5}} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}} = 0 \quad / \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3n+7}$$

Puisque la limite de la suite $(-1)^n$ n'existe pas alors (U_n) n'admet pas de limite

Exercice 2 :

(U_n) est une suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{U_n}{7} + \frac{6}{7}$

- 1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 1$
- 2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n = U_n - 1$
 - a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique
 - b) Exprimer V_n en fonction de n
 - c) En déduire U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

1) Montrons que : " $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$ " $P(n)$

Pour $n = 0$; On a : $U_0 = 2 > 1$; donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $U_n > 1$ et Montrons que : $U_{n+1} > 1$.

$$\begin{aligned} \text{D'après la supposition on a : } U_n > 1 &\Rightarrow \frac{U_n}{7} > \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{U_n}{7} + \frac{6}{7} > \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \\ &\Rightarrow U_{n+1} > 1. \end{aligned}$$

D'où d'après P.R on a : $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$.

$$2) \text{ On a : } U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{7} + \frac{6}{7} - U_n = \frac{U_n + 6 - 7U_n}{7} = \frac{-6U_n + 6}{7} = \frac{-6(U_n - 1)}{7}$$

On a d'après (1) ; $U_n > 1$ donc $U_n - 1 > 0$

$$\text{donc : } -6(U_n - 1) < 0$$

$$\text{donc : } \frac{-6(U_n - 1)}{7} < 0$$

$$\text{d'où } U_{n+1} - U_n < 0$$

Ainsi (U_n) est décroissante.

De plus (U_n) est minorée par 1 ;

Alors (U_n) est convergente.

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = U_n - 1$

$$\begin{aligned} \text{a) On a : } V_{n+1} &= U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{7} + \frac{6}{7} - 1 = \frac{U_n + 6 - 7U_n}{7} = \frac{-6U_n + 6}{7} \\ &= \frac{-6(U_n - 1)}{7} = \frac{-6}{7} (U_n - 1) = \frac{-6}{7} V_n. \end{aligned}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-6}{7}$.

$$\text{d. de premier terme } V_0 = U_0 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

b) On a : (V_n) est une suite géométrique

$$\text{Donc : } V_n = V_0 \times q^{n-0} = 1 \times \left(\frac{-6}{7}\right)^n = \left(\frac{-6}{7}\right)^n.$$

$$\text{c) Puisque } V_n = U_n - 1 \text{ alors } U_n = V_n + 1 = \left(\frac{-6}{7}\right)^n + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-6}{7} \right)^x + 1 = 1 \quad \text{Car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-6}{7} \right)^x = 0 \quad / \quad -1 < \frac{-6}{7} < 1.$$

Exercice 3 :

(U_n) est une suite numérique définie par : $U_0 = 13$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7$

1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < 14$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad V_n = 14 - U_n$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$

a) Calculer S_n en fonction de n .

b) Montrer que $S'_n = 14n - S_n$.

1). Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n < 14$ " P(n).

• Pour $n=0$; $U_0 = 13 < 14$ donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n < 14$ et Montrons que : $U_{n+1} < 14$.

$$\text{On a : } U_n < 14 \Rightarrow \frac{1}{2}U_n < \frac{1}{2} \times 14 \Rightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < 7 + 7 \Rightarrow U_{n+1} < 14$$

D'où d'après le P.R on a. $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n < 14$.

$$2). \text{ On a : } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 7 - U_n = -\frac{1}{2}U_n + 7.$$

$$\text{Puisque } U_n < 14 \Rightarrow -\frac{1}{2}U_n > -\frac{1}{2} \times 14 \Rightarrow -\frac{1}{2}U_n + 7 > -7 + 7 \\ \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0.$$

Donc (U_n) est croissante.

et de plus (U_n) est majorée par 14

Alors (U_n) est convergente.

$$3/. \text{ Soit : } V_n = 14 - U_n ; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a/. \text{ On a : } V_{n+1} &= 14 - U_{n+1} = 14 - \left(\frac{1}{2}U_n + 7\right) \\ &= 7 - \frac{1}{2}U_n = \frac{1}{2} \left(-U_n + \frac{7}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(-U_n + 14) = \frac{1}{2}(14 - U_n) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

D'où (V_n) est une s. géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$$V_0 = 14 - U_0 = 14 - 13 = 1$$

b/. (V_n) est une suite géométrique ;

$$\text{Donc : } V_n = V_0 \times q^{n-0} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c): On a: $U_n = 14 - u_n$ donc: $U_n + u_n = 14$ donc: $u_n = 14 - U_n$.

Donc: $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 14$ Car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ / $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

4): $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$; $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

a): On a: (U_n) est une suite géométrique.

Donc: $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = U_0 \times \frac{1 - q^{(n-1)-0+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$
 $= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Pour calculer la somme S'_n on n'a pas la nature de la suite (u_n) ; mais il faut remarquer que $U_n = 14 - u_n \Leftrightarrow u_n = 14 - U_n$.

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 14 - U_0 \\ u_1 = 14 - U_1 \\ u_2 = 14 - U_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} = 14 - U_{n-1} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\ &= (14 - U_0) + (14 - U_1) + \dots + (14 - U_{n-1}) \\ &= 14 - U_0 + 14 - U_1 + \dots + 14 - U_{n-1} \\ &= 14 \times (n - 1 - 0 + 1) - U_0 - U_1 - \dots - U_{n-1} \\ &= 14 \times n - (U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}) \\ &= 14n - S_n. \end{aligned}$$

Exercice 4 :

On considère la suite numérique (u_n) définie par: $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer par récurrence que $u_n > 5$ pour tout entier naturel n

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4}(u_n - 5)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que: $v_n = u_n - 5$ pour tout entier naturel n

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ puis écrire v_n en fonction de n

b) Montrer que $u_n = 5 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n , puis déterminer la limite de la suite (u_n)

c) Déduire la limite de la suite (w_n) définie par: $w_n = \ln(u_n - 4)$ pour tout entier naturel n

d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 5,001$

1). Montrons que: " $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 5$." $P(n)$

• Pour $n = 0$: On a: $u_0 = 7 > 5$; donc $P(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$; On suppose que $u_n > 5$ et montrons que: $u_{n+1} > 5$.

$$\text{On a: } u_n > 5 \Rightarrow \frac{3}{4} u_n > 5 \times \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} u_n + \frac{5}{4} > \frac{15}{4} + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > \frac{20}{4} \Rightarrow u_{n+1} > 5.$$

Donc d'après le P.R ; on a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 5$.

$$\text{b) : On a: } u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4} u_n + \frac{5}{4} - u_n = \frac{3u_n + 5 - 4u_n}{4} = \frac{-u_n + 5}{4} = \frac{-(u_n - 5)}{4}$$

$$\text{Donc: } u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4} (u_n - 5).$$

$$\text{Or a: } u_n > 5 \text{ donc: } u_n - 5 > 0 \Rightarrow \frac{-1}{4} (u_n - 5) < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Donc (u_n) est décroissante ;

c) : on a : (u_n) est décroissante ;

et de plus (u_n) est minorée par 5 ; Alors (u_n) est convergente.

$$2^\circ : v_n = u_n - 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) : On a: } v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 = \frac{3}{4} u_n + \frac{5}{4} - 5 \\ &= \frac{3}{4} u_n - \frac{5-20}{4} = \frac{3}{4} u_n + \frac{15}{4} \\ &= \frac{3}{4} u_n + \frac{3 \times 5}{4} = \frac{3}{4} (u_n + 5) = \frac{3}{4} v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - 5 = 7 - 5 = 2.$$

$$\text{Donc: } v_n = v_0 \times q^{n-0} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\begin{aligned} \text{b) : On a: } v_n &= u_n - 5 \text{ donc: } u_n = v_n + 5 \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5. \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5 = 5 \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad / \quad -1 < \frac{3}{4} < 1.$$

$$\text{c) : On pose: } f(x) = \ln(x-4).$$

$$\text{et Alors } w_n = \ln(u_n - 4) = f(u_n).$$

$$\text{On a } (u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5.$$

Puisque f est continue en 5 (Car f est continue sur $]4; +\infty[$).

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = f(5) = \ln(5-4) = \ln(1) = 0.$$

$$\text{d) : } u_n < 5,001 \Rightarrow 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5 < 5,001$$

$$\Rightarrow 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,001 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{0,001}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,0005$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0005) \Rightarrow n \times \ln\left(\frac{3}{4}\right) < -7,6$$

$$\Rightarrow n > \frac{-7,6}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow n > \frac{-7,6}{-0,28} \Rightarrow n > 27,14.$$

$$\text{Donc } n = 28$$

Exercice 5 :

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 3 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{3U_n + 5}$$

1) a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < U_n \leq 3$.

c) Montrer que (U_n) est convergente.

2) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et déterminer ses éléments caractéristiques

b) Calculer V_n en fonction de n .

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} U_n = \frac{V_n + 1}{-V_n + 1}$ en déduire U_n en fonction n .

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) ; W_n = \frac{U_n + 2}{U_n + 1}$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

17: $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{3U_n + 5}$

a7. Mq: $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$; P(n).

Pour $n=0$ on a: $U_0 = 3 > 1$; donc P(0) est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n > 1$ et Montrons que $U_{n+1} > 1$.

Pour cela il suffit de montrer que $U_{n+1} - 1 > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{5U_n + 3}{3U_n + 5} - 1 = \frac{5U_n + 3 - 3U_n - 5}{3U_n + 5} = \frac{2U_n - 2}{3U_n + 5} = \frac{2(U_n - 1)}{3U_n + 5}$$

D'après la supposition on a: $U_n > 1$ donc $U_n - 1 > 0$ donc $2(U_n - 1) > 0$

et $3U_n > 3$ donc $3U_n + 5 > 8$.

D'où $\frac{2(U_n - 1)}{3U_n + 5} > 0 \Rightarrow U_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 1$.

D'où d'après le P.R on $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n > 1$

$$\begin{aligned} \text{b7: On a: } U_{n+1} - U_n &= \frac{5U_n + 3}{3U_n + 5} - U_n = \frac{5U_n + 3 - U_n(3U_n + 5)}{3U_n + 5} \\ &= \frac{5U_n + 3 - 3U_n^2 - 5U_n}{3U_n + 5} = \frac{3 - 3U_n^2}{3U_n + 5} = \frac{-3(U_n^2 - 1)}{3U_n + 5} \end{aligned}$$

On a déjà montré que $3U_n + 5 > 8$

et: $U_n > 1 \Rightarrow U_n^2 > 1 \Rightarrow U_n^2 - 1 > 0 \Rightarrow -3(U_n^2 - 1) < 0$.

Donc: $\frac{-3(U_n^2 - 1)}{3U_n + 5} < 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

D'où (U_n) est une suite décroissante.

⚠ (u_n) est décroissante donc (u_n) est majorée par son premier terme } à retenir.
 " " croissante " " minorée " " " " " "

On a (u_n) est décroissante ; donc (u_n) est minorée par son premier terme u₀ = 3
 donc : u_n ≤ 3.

et on a : d'après Qa : u_n > 1.

D'où 1 < u_n ≤ 3

c/ : On a (u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc (u_n) est convergente.

2/ : ∀ n ∈ ℕ ; v_n = $\frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

$$\begin{aligned} \text{a/ : } v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3}{3u_n + 5} - 1}{\frac{5u_n + 3}{3u_n + 5} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3 - 3u_n - 5}{3u_n + 5}}{\frac{5u_n + 3 + 3u_n + 5}{3u_n + 5}} \\ &= \frac{2u_n - 2}{8u_n + 8} = \frac{2(u_n - 1)}{8(u_n + 1)} = \frac{1}{4} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison q = 1/4

et de premier terme v₀ = $\frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b/ : } v_n &= v_0 \times q^{n-0} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

$$\text{c/ : On a : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n \times v_n + v_n - u_n + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} = \frac{-(v_n + 1)}{-(-v_n + 1)} = \frac{v_n + 1}{-v_n + 1}$$

$$\text{On a : } u_n = \frac{v_n + 1}{-v_n + 1} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

$$\text{d/ : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = -1 \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 / -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{3/ : On a : } w_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 1}.$$

$$\text{On pose : } f(x) = \frac{x + 2}{x - 1} ; \text{ donc } w_n = f(u_n).$$

Puis que (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Exercice 6 :

(U_n) est une suite numérique définie par : $U_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{8(U_n-1)}{U_n+2}$

1) a) Calculer U_1 et U_2 .

b) Vérifier $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - 4 = \frac{4(U_n-4)}{U_n+2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - 2 = \frac{6(U_n-2)}{U_n+2}$.

c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < U_n < 4$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 \leq U_n < 4$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n)$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = \frac{U_n-4}{U_n-2}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ puis écrire V_n en fonction de n .

b) En déduire U_n en fonction de n .

c) Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

5) On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$

a) Calculer S_n en fonction de n .

1) On a : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{8(U_n-1)}{U_n+2}$.

car : $U_1 = U_{0+1} = \frac{8(U_0-1)}{U_0+2} = \frac{8(0-1)}{0+2} = \frac{-8}{2} = -4$

$U_2 = U_{1+1} = \frac{8(U_1-1)}{U_1+2} = \frac{8(-4-1)}{-4+2} = \frac{8(-5)}{-2} = \frac{40}{2} = 20$

car : $U_{n+1} - 4 = \frac{8(U_n-1)}{U_n+2} - 4 = \frac{8U_n - 8 - 4U_n - 8}{U_n+2} = \frac{4U_n - 16}{U_n+2} = \frac{4(U_n-4)}{U_n+2}$

$U_{n+1} - 2 = \frac{8(U_n-1)}{U_n+2} - 2 = \frac{8U_n - 8 - 2U_n - 4}{U_n+2} = \frac{6U_n - 12}{U_n+2} = \frac{6(U_n-2)}{U_n+2}$

c) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 2 < U_n < 4$ P(n).

Pour $n=0$; $U_0 = 0$ et $2 < U_0 = 0 < 4$ donc P(0) est

soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $2 < U_n < 4$ et Montrons que : $2 < U_{n+1}$

c-à-d : Montrons que : $2 < U_{n+1}$ et $U_{n+1} < 4$.

où encore : $U_{n+1} - 2 > 0$ et $U_{n+1} - 4 < 0$.

On a : $U_{n+1} - 2 = \frac{6(U_n-2)}{U_n+2}$

Puisque : $U_n > 2 \Rightarrow U_n - 2 > 0 \Rightarrow 6(U_n - 2) > 0$.

$$\text{et : } u_n + 2 > 4$$

$$\text{Donc : } \frac{6(u_n - 2)}{u_n + 2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - 2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 2$$

$$\text{On a : } u_{n+1} - 4 = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

$$\text{On a : } u_n < 4 \Rightarrow u_n - 4 < 0 \Rightarrow 4(u_n - 4) < 0$$

$$\text{et : } u_n + 2 > 4$$

$$\text{Donc : } \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - 4 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 4$$

$$\text{D'où : } 2 < u_{n+1} < 4$$

$$\text{D'où d'après le P.R. ; on a : } 2 < u_n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$27. a) : u_{n+1} - u_n = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - \frac{u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{8u_n - 8 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n^2 - 6u_n + 8)}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

$$\text{On a : } 2 < u_n < 4 \Rightarrow 4 < u_n + 2 < 8 \quad \text{Donc : } u_n + 2 > 0$$

$$\text{Puisque : } 2 < u_n < 4$$

$$\text{Donc : } 0 < u_n - 2 < 2 \quad \text{et} \quad -2 < u_n - 4 < 0$$

$$\text{Donc : } (u_n - 2)(u_n - 4) < 0$$

$$\text{Donc : } -(u_n - 2)(u_n - 4) > 0$$

$$\text{D'où : } \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$

Donc : (u_n) est croissante.

b) : On a : (u_n) est croissante ; donc (u_n) est minorée par son premier terme $u_0 = 3$.

$$\text{Ainsi } u_n \geq 3 \quad ; \quad \text{D'où } 3 \leq u_n < 4$$

c) : On a : (u_n) est croissante et majorée par 4.

Donc (u_n) est convergente.

$$37. a) : \text{Montrons que : } 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$\text{On a déjà montré que } u_{n+1} - 4 < 0 \Rightarrow 4 - u_{n+1} > 0$$

$$\text{Donc il reste de montrer que } 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

$$\text{c-à-d : } 4 - u_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a: } 4 - U_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - U_n) &= -\frac{4(U_n - 4)}{U_n + 2} - \frac{4}{5}(4 - U_n) \\
 &= -\frac{4(U_n - 4)}{U_n + 2} + \frac{4}{5}(U_n - 4) = \frac{-20(U_n - 4) + 4(U_n - 4)(U_n + 2)}{5(U_n + 2)} \\
 &= \frac{(U_n - 4)(-20 + 4(U_n + 2))}{5(U_n + 2)} = \frac{(U_n - 2)(4U_n - 12)}{5(U_n + 2)} \\
 &= \frac{4(U_n - 2)(U_n - 3)}{5(U_n + 2)}.
 \end{aligned}$$

$$\text{On a: } 2 < U_n \leq 3 \Rightarrow 0 < U_n - 2 \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 < U_n - 3 \leq 0$$

$$\text{donc: } (U_n - 2)(U_n - 3) \leq 0$$

$$\text{donc: } 4(U_n - 2)(U_n - 3) \leq 0$$

$$\text{et on a déjà montré que: } 5(U_n + 2) > 0$$

$$\text{D'où: } \frac{4(U_n - 2)(U_n - 3)}{5(U_n + 2)} \leq 0$$

$$\text{Donc: } 4 - U_{n+1} - \frac{4}{5}(4 - U_n) \leq 0 \Rightarrow 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n).$$

$$\text{D'où: } 0 < 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n)$$

$$\text{b/: En déduire que: } \forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 < 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n; \quad \Phi(n)$$

Par récurrence;

$$\text{Pour } n=0 \quad \text{on a: } 0 < 4 - U_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \Rightarrow 0 < 1 \leq 1$$

Donc $\Phi(0)$ est vraie.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; \quad \text{Supposons que: } 0 < 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{et Montrons que: } 0 < 4 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'après a/:} \quad \text{On a: } 0 < 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n)$$

$$\text{Donc: } 0 < 4 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - U_n) \leq \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{Donc: } 0 < 4 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'où d'après le P.R on a:} \quad \text{on a: } \forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 < 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{c/: On a: } 0 < 4 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\text{et Puisque } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad / \quad -1 < \frac{4}{5} < 1.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - U_n = 0 \quad \text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 4.$$

4). On a: $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 2}$.

a). On a: $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} - 2} = \frac{\frac{3(U_n - 1)}{U_n + 2} - 4}{\frac{3(U_n - 1)}{U_n + 2} - 2}$

$$= \frac{\frac{3U_n - 3 - 4U_n - 8}{U_n + 2}}{\frac{3U_n - 3 - 2U_n - 4}{U_n + 2}} = \frac{4U_n - 16}{6U_n - 12} = \frac{4(U_n - 4)}{6(U_n - 2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{U_n - 4}{U_n - 2} = \frac{2}{3} V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier

terme $V_0 = \frac{U_0 - 4}{U_0 - 2} = \frac{3 - 4}{3 - 2} = \frac{-1}{1} = -1$

Donc: $V_n = V_0 \times q^{n-0} = -1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b). On a: $V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 2} \Leftrightarrow U_n \times V_n - 2V_n = U_n - 4$

$$\Leftrightarrow U_n \times V_n - U_n = 2V_n - 4$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = 2V_n - 4$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2V_n - 4}{V_n - 1}$$

Donc: $U_n = \frac{-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$

c). $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = 4$ Car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

5). $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$
 $= V_0 \times \frac{1 - q^{n-1-0+1}}{1 - q} = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$
 $= -3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 7 :

(U_n) est une suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{9U_n - 6}{2U_n + 1}$

1) a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < U_n < 3$

b) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.

2) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 3 - U_{n+1} \leq \frac{3}{5}(3 - U_n)$ puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} ; 3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

3) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

1). Pq: $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 < U_n < 3 \quad P(n)$.

Pour $n=0$ on a: $1 < U_0 = 2 < 3$ donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $1 < U_n < 3$ et Pq: $1 < U_{n+1} < 3$

c-à-d. $U_{n+1} > 1$ et $U_{n+1} < 3$

$$\text{On a : } U_{n+1} - 1 = \frac{9U_n - 6}{2U_n + 1} - 1 = \frac{9U_n - 6 - 2U_n - 1}{2U_n + 1} = \frac{7U_n - 7}{2U_n + 1} = \frac{7(U_n - 1)}{2U_n + 1}$$

$$\text{Puisque : } 1 < U_n < 3 \Rightarrow 0 < U_n - 1 < 2 \Rightarrow 0 < 7(U_n - 1) < 14$$

$$\text{et } 3 < 2U_n + 1 < 7 ; \text{ Donc : } \frac{7(U_n - 1)}{2U_n + 1} > 0$$

$$\text{Donc : } U_{n+1} - 1 > 0$$

$$\text{D'où } U_{n+1} > 1.$$

$$\text{On a : } U_{n+1} - 3 = \frac{9U_n - 6}{2U_n + 1} - 3 = \frac{9U_n - 6 - 6U_n - 3}{2U_n + 1} = \frac{3U_n - 9}{2U_n + 1} = \frac{3(U_n - 3)}{2U_n + 1}$$

$$\text{Puisque : } 1 < U_n < 3 \Rightarrow -2 < U_n - 3 < 0 \Rightarrow -6 < 3(U_n - 3) < 0$$

$$\text{et } 3 < 2U_n + 1 < 7 \text{ donc : } \frac{3(U_n - 3)}{2U_n + 1} < 0$$

$$\text{donc : } U_{n+1} - 3 < 0$$

$$\text{donc : } U_{n+1} < 3$$

$$\text{D'où : } 1 < U_{n+1} < 3$$

$$\text{D'où : d'après la P.R on a : } \forall n \in \mathbb{N} ; 1 < U_n < 3$$

$$\begin{aligned} 27. \text{ On a : } U_{n+1} - U_n &= \frac{9U_n - 6}{2U_n + 1} - U_n = \frac{9U_n - 6 - 2U_n^2 - U_n}{2U_n + 1} \\ &= \frac{-2U_n^2 + 8U_n - 6}{2U_n + 1} = \frac{-2(U_n^2 - 4U_n + 3)}{2U_n + 1} = \frac{-2(U_n - 1)(U_n - 3)}{2U_n + 1} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } 2U_n + 1 > 0$$

$$\text{et } 1 < U_n < 3 \text{ donc } 0 < U_n - 1 < 2 \text{ et } -2 < U_n - 3 < 0$$

$$\text{donc : } (U_n - 1)(U_n - 3) < 0$$

$$\text{donc : } -2(U_n - 1)(U_n - 3) > 0$$

$$\text{D'où : } \frac{-2(U_n - 1)(U_n - 3)}{2U_n + 1} > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$

Ainsi (U_n) est strictement croissante.

$$2). \text{ Montrons que : } \forall n \in \mathbb{N} : 3 - U_{n+1} \leq \frac{3}{5}(3 - U_n). \quad (\text{par différence})$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 3 - U_{n+1} - \frac{3}{5}(3 - U_n) &= -\frac{3(U_n - 3)}{2U_n + 1} - \frac{3}{5}(3 - U_n) \\ &= \frac{-3(U_n - 3)}{2U_n + 1} + \frac{3}{5}(U_n - 3) = 3(U_n - 3) \left(\frac{-1}{2U_n + 1} + \frac{1}{5} \right) \\ &= 3(U_n - 3) \left(\frac{-5 + 2U_n + 1}{5(2U_n + 1)} \right) = \frac{3(U_n - 3)(2U_n - 4)}{5(2U_n + 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3(U_n - 3)(U_n - 2) \times 2}{5(2U_n + 1)} = \frac{6(U_n - 3)(U_n - 2)}{5(2U_n + 1)}$$

❓ Pour déterminer le signe de cette différence ; on a : $2 < U_n < 3$
mais c'est pas un encadrement précis.

Donc il faut remarquer que (U_n) est croissante ; donc
 (U_n) est minorée par son premier terme $U_0 = 2$; $U_n \geq 2$

D'où : $2 \leq U_n < 3$

$2 < U_n < 3$ donc : $-1 \leq U_n - 3 < 0$ et $0 \leq U_n - 2 < 1$

donc : $(U_n - 3)(U_n - 2) \leq 0$

donc : $6(U_n - 3)(U_n - 2) \leq 0$

et $5(2U_n + 1) > 0$

Donc : $\frac{6(U_n - 3)(U_n - 2)}{5(2U_n + 1)} \leq 0 \Rightarrow 3 - U_{n+1} - \frac{3}{5}(3 - U_n) \leq 0$
 $\Rightarrow 3 - U_{n+1} \leq \frac{3}{5}(3 - U_n)$

On utilise le principe de récurrence pour déduire que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$ P(n)

Pour $n=0$, On a $3 - U_0 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^0$

Donc : $1 \leq 1$ Donc : P(0) est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$

et montrons que : $3 - U_{n+1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

On a : $3 - U_{n+1} \leq \frac{3}{5}(3 - U_n) \leq \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$

Donc : $3 - U_{n+1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

D'où d'après P.R on a : $3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$

37 : On a : $3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$

Il faut signaler que $0 \leq 3 - U_n$ (d'après Q1)

Donc : $0 \leq 3 - U_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n$

Or : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - U_n = 0$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 3$

Exercice 18 :

(U_n) est une suite numérique définie par :

$$U_0 = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{-1}{4U_n + 4}$$

On pose $V_n = \frac{2}{2U_n + 1}$

1) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

2) Exprimer V_n en fonction de n .

3) En déduire U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$\begin{aligned} 1): \text{ On a : } V_{n+1} - V_n &= \frac{2}{2U_{n+1} + 1} - \frac{2}{2U_n + 1} = \frac{2}{2 \times \frac{-1}{4U_n + 4} + 1} - \frac{2}{2U_n + 1} \\ &= \frac{2}{\frac{-1}{2U_n + 2} + 1} - \frac{2}{2U_n + 1} = \frac{2}{\frac{-1 + 2U_n + 2}{2U_n + 2}} - \frac{2}{2U_n + 1} \\ &= \frac{2}{\frac{2U_n + 1}{2U_n + 2}} - \frac{2}{2U_n + 1} = \frac{2(2U_n + 2)}{2U_n + 1} - \frac{2}{2U_n + 1} = \frac{4U_n + 2}{2U_n + 1} \\ &= \frac{2(2U_n + 1)}{2U_n + 1} = 2 \end{aligned}$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$

et de premier terme $V_0 = \frac{2}{2U_0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$

2): $V_n = V_0 + (n-0) \times r = 2 + n \times 2 = 2n + 2$.

3): On a : $V_n = \frac{2}{2U_n + 1} \Leftrightarrow 2U_n + 1 = \frac{2}{V_n}$

$$\Leftrightarrow 2U_n = \frac{2}{V_n} - 1$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2}{2V_n} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{2n + 2} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n + 2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 2 = +\infty$;

Exercice 9 :

(U_n) est une suite numérique définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{3U_n - 2}$$

On pose $V_n = \frac{U_n - 2}{1 - U_n}$

1) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

2) Exprimer V_n en fonction de n .

3) En déduire U_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$\begin{aligned} 1) : V_{n+1} - V_n &= \frac{U_{n+1} - 2}{1 - U_{n+1}} - \frac{U_n - 2}{1 - U_n} = \frac{\frac{4U_n - 3}{3U_n - 2} - 2}{1 - \frac{4U_n - 3}{3U_n - 2}} - \frac{U_n - 2}{1 - U_n} \\ &= \frac{\frac{4U_n - 3 - 6U_n + 4}{3U_n - 2}}{\frac{3U_n - 2 - 4U_n + 3}{3U_n - 2}} - \frac{U_n - 2}{1 - U_n} = \frac{-2U_n + 1}{-U_n + 1} - \frac{U_n - 2}{1 - U_n} = \frac{-2U_n + 1 - U_n + 2}{1 - U_n} \\ &= \frac{3 - 3U_n}{1 - U_n} = \frac{3(1 - U_n)}{1 - U_n} = 3 \end{aligned}$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier

terme $V_0 = \frac{U_0 - 2}{1 - U_0} = \frac{2 - 2}{1 - 2} = 0$.

2) : $V_n = V_0 + (n - 0) \times r = 3n$.

$$\begin{aligned} 3) : V_n &= \frac{U_n - 2}{1 - U_n} \Leftrightarrow V_n(1 - U_n) = U_n - 2 \\ &\Leftrightarrow V_n - U_n \times V_n = U_n - 2 \\ &\Leftrightarrow U_n(-V_n - 1) = -2 - V_n \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{-2 - V_n}{-V_n - 1} = \frac{2 + V_n}{V_n + 1} \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{3n + 2}{3n + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + 2}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3 + \frac{2}{n})}{n(3 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{3} = 1$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exercice 10 :

(U_n) est une suite numérique définie par

$$U_0 = 2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n}$$

1) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n > 1$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}) V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = 1$

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n = \frac{n+2}{n+1}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

17: Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n > 1$; $P(n)$

Pour $n=0$; on a: $U_0 = 2 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $U_n > 1$ et montrons que: $U_{n+1} > 1$

$$\text{On a: } U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n - 1}{U_n} - 1 = \frac{2U_n - 1 - U_n}{U_n} = \frac{U_n - 1}{U_n}$$

On a: $U_n > 1$ donc: $U_n - 1 > 0$.

$$\text{Donc: } \frac{U_n - 1}{U_n} > 0 \Rightarrow U_{n+1} - 1 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 1$$

D'où d'après le P.R on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$

$$\begin{aligned} 27: \text{On a: } U_{n+1} - U_n &= \frac{2U_n - 1}{U_n} - U_n = \frac{2U_n - 1 - U_n^2}{U_n} \\ &= \frac{-(U_n^2 - 2U_n + 1)}{U_n} = \frac{-(U_n - 1)^2}{U_n} \end{aligned}$$

$$\text{On } U_n > 1 \text{ et } -(U_n - 1)^2 < 0 \text{ Alors } \frac{-(U_n - 1)^2}{U_n} < 0$$

$$\text{Donc: } U_{n+1} - U_n < 0$$

D'où (U_n) est décroissante.

De plus (U_n) est minorée par 1; Alors (U_n) est convergente.

$$37: \forall n \in \mathbb{N}; \quad U_n = \frac{1}{U_n - 1}.$$

$$\begin{aligned} a7: U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{U_{n+1} - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{1}{\frac{2U_n - 1}{U_n} - 1} - \frac{1}{U_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2U_n - 1 - U_n}{U_n}} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{1}{\frac{U_n - 1}{U_n}} - \frac{1}{U_n - 1} \\ &= \frac{U_n}{U_n - 1} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = 1 \end{aligned}$$

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $U_0 = \frac{1}{U_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$.

$$b7: U_n = U_0 + (n-0) \times r = 1 + (n) \times 1 = n+1.$$

$$c7: \text{On a: } U_n = \frac{1}{U_n - 1} \Leftrightarrow U_n - 1 = \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{U_n} + 1$$

$$\text{Donc: } U_n = \frac{1}{n+1} + 1 = \frac{1+n+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Exercice 11 : (U_n) est une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + 2^n U_n} \end{cases}$$

1) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$.2) Etudier la monotonie de la suite (U_n) puis en déduire que la suite (U_n) est convergente.3) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = \frac{1}{2^n U_n}$ a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = \frac{1}{(n+2)2^{n-1}}$ c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.17. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}; U_n > 0 \quad P(n)$.Pour $n=0$ on a : $U_0 = 1 > 0$ Donc $P(0)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 21. U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n}{2 + 2^n U_n} - U_n = \frac{U_n - U_n(2 + 2^n U_n)}{2 + 2^n U_n} \\ &= \frac{U_n - 2U_n - 2^n U_n^2}{2 + 2^n U_n} = \frac{-U_n - 2^n U_n^2}{2 + 2^n U_n} = \frac{-U_n(1 + 2^n U_n)}{2 + 2^n U_n} \end{aligned}$$

On a : $U_n > 0$ et $2^n > 0$ donc : $2^n U_n > 0$ donc : $1 + 2^n U_n > 1$ et $2 + 2^n U_n > 2$ et : $-U_n < 0$.Donc : $-U_n(1 + 2^n U_n) < 0$ et $2 + 2^n U_n > 0$ Donc : $\frac{-U_n(1 + 2^n U_n)}{2 + 2^n U_n} < 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$.Donc (U_n) est décroissante ; et de plus (U_n) est minorée par 0.D'où (U_n) est convergente.37. $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = \frac{1}{2^n U_n}$.

$$\begin{aligned} 47. V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{2^{n+1} \times U_{n+1}} - \frac{1}{2^n U_n} = \frac{1}{2^{n+1} \times \frac{U_n}{2 + 2^n U_n}} - \frac{1}{2^n U_n} \\ &= \frac{2 + 2^n U_n}{2^{n+1} \times U_n} - \frac{1}{2^n U_n} = \frac{2 + 2^n U_n - 2}{2^{n+1} \times U_n} = \frac{2^n U_n}{2^{n+1} \times U_n} = \frac{2^n U_n}{2 \times 2^n U_n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$, et depremier terme $V_0 = \frac{1}{2^0 U_0} = \frac{1}{1 \times 1} = 1$.

$$67. \text{ On a : } V_n = V_0 + (n-0) \times r = 1 + n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 1 = \frac{n+2}{2}$$

$$\text{Or, } U_n = \frac{1}{2^n U_n} \Rightarrow 2^n U_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{2^n U_n}$$

$$\text{Donc, } U_n = \frac{1}{2^n \times \frac{n+2}{2}} = \frac{1}{2^{n-1} (n+2)}$$

$$\text{c'q, } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1} (n+2)}$$

$$\text{On a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n+2 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2} = +\infty \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2)^n = +\infty \quad "2 > 1"$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-1} (n+2) = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1} (n+2)} = 0.$$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$

1) a) Montrer que f est croissante sur $I = [0; 1]$

b) En déduire que : $f(I) \subset I$

2) Soit (U_n) est une suite numérique définie par : $U_0 = \frac{4}{9}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{4}{9} \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

$$\text{On a: } f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2$$

17. a7. On a f est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{et } f'(x) = (4x\sqrt{x} - 3x^2)' = (4x)' \sqrt{x} + 4x(\sqrt{x})' - 6x$$

$$= 4\sqrt{x} + \frac{4x}{2\sqrt{x}} - 6x = 4\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt{x}} - 6x$$

$$= 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6x = 6\sqrt{x} - 6x = 6\sqrt{x} - 6\sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

$$= 6\sqrt{x} (1 - \sqrt{x}).$$

x	0	1	$+\infty$
$1-\sqrt{x}$		+	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Donc f est croissante sur $[0;1]$.

b°: On a: $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [0;1]$.

Donc: $f([0;1]) \subset [0;1]$.

2°: $U_0 = \frac{4}{9}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a°: Montrons que: $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{4}{9} \leq U_n \leq 1$. $P(n)$

Pour $n=0$; on a: $U_0 = \frac{4}{9}$ et $\frac{4}{9} \leq \frac{4}{9} \leq 1$

Donc: $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que: $\frac{4}{9} \leq U_n \leq 1$

et montrons que: $\frac{4}{9} \leq U_{n+1} \leq 1$.

On a: $\frac{4}{9} \leq U_n \leq 1$

Donc: $f(\frac{4}{9}) \leq f(U_n) \leq f(1)$ Car f est croissante sur $[0;1]$

Donc: $0,59 \leq U_{n+1} \leq 1$

Donc: $\frac{4}{9} \leq U_{n+1} \leq 1$ Car $\frac{4}{9} \leq 0,59$.

D'où d'après le P.R on a: $\frac{4}{9} \leq U_n \leq 1$.

b°: $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = 4U_n\sqrt{U_n} - 3U_n^2 - U_n$
 $= -(-4U_n\sqrt{U_n} + 3U_n^2 + U_n) = -(4U_n^2 - 2 \times 2U_n \times \sqrt{U_n} + U_n - U_n^2)$ *Id. remarquable.*
 $= -(2U_n - \sqrt{U_n})^2 + U_n^2 = U_n^2 - (2U_n - \sqrt{U_n})^2$
 $= (U_n - 2U_n + \sqrt{U_n})(U_n + 2U_n - \sqrt{U_n})$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 $= (-U_n + \sqrt{U_n})(3U_n - \sqrt{U_n})$
 $= \sqrt{U_n}(-\sqrt{U_n} + 1) \cdot (3\sqrt{U_n} - 1) \cdot \sqrt{U_n}$ *factorisation par $\sqrt{U_n}$*
 $= U_n(1 - \sqrt{U_n})(3\sqrt{U_n} - 1)$.

On a: $\frac{4}{9} \leq U_n < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \sqrt{U_n} < 1$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sqrt{U_n} \leq -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{U_n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{9} \leq U_n \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \sqrt{U_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow 2 \leq 3\sqrt{U_n} \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3\sqrt{U_n} - 1 \leq 2$$

Donc: $U_n(1 - \sqrt{U_n})(3\sqrt{U_n} - 1) > 0$.

Donc (u_n) est croissante

c) On a (u_n) est croissante et majorée par 1

Donc (u_n) est convergente.

d) On a: $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{4}{9} \in [0; 1]$.

On a f est continue sur $[0; 1]$ et $f([0; 1]) \subset [0; 1]$

De plus on a (u_n) est convergente.

Donc la limite de (u_n) est la solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0; 1]$

On a: $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(1 - \sqrt{x})(3\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 - \sqrt{x} = 0 \text{ ou } 3\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{9}.$$

Puis que (u_n) est croissante ; donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I qu'on déterminera.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \leq x$.

3) Calculer $f([0; 1])$.

4) Soit (u_n) est une suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq u_n \leq 1$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) .

c) En déduire que (u_n) est convergente.

d) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1) On a: f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \left(\frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}} \right)'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x)'(1 + \sqrt[3]{x}) - x(1 + \sqrt[3]{x})'}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{1 + \sqrt[3]{x} - x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt[3]{x}^2 + x - x}{\sqrt[3]{x}^2}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{\sqrt[3]{x}^2}{\sqrt[3]{x}^2 (1 + \sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}^2} > 0 \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Donc f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle

$$J = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0; +\infty[.$$

$$2^{\circ}: \text{On a: } f(x) - x = \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}} - x = \frac{x - x - x\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{-x\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \leq 0$$

$$\text{Car } \forall x \in \mathbb{R}^+; -x\sqrt[3]{x} \leq 0 \text{ et } 1 + \sqrt[3]{x} > 0$$

$$\text{Donc } f(x) - x \leq 0; \text{ D'où } f(x) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

$$3^{\circ}: f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [0; \frac{1}{2}]$$

$$4^{\circ}: U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = f(U_n).$$

$$a^{\circ}: \text{Montrons que } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1 \quad P(n)$$

$$\text{On a: pour } n=0; U_0 = \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \text{ donc } P(0) \text{ est vraie}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}; \text{ Supposons que: } 0 \leq U_n \leq 1 \text{ et montrons que: } 0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

$$\text{On a: } 0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(1) \quad \text{Car } f \text{ est } \nearrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$\text{D'où d'après le P.R; } 0 \leq U_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b^{\circ}: \text{On a: } \forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) \leq x.$$

$$\text{et on a: } 0 \leq U_n \leq 1.$$

$$\text{Donc: } f(U_n) \leq U_n$$

$$\text{Donc: } U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0.$$

$$\text{Donc } (U_n) \text{ est décroissante.}$$

$$c^{\circ}: \text{On a: } (U_n) \text{ est décroissante et minorée par } 0$$

$$\text{donc } (U_n) \text{ est convergente.}$$

$$d^{\circ}: \text{On a: } U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_0 = \frac{1}{2} \in [0; 1].$$

$$\text{On a: } f \text{ est continue sur } [0; 1].$$

$$\text{et } f([0; 1]) = [0; \frac{1}{2}] \subset [0; 1]$$

$$\text{De plus } (U_n) \text{ est convergente;}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \text{ est la solution de l'équation } f(x) = x.$$

On a: $-f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{-x\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = 0$
 $\Leftrightarrow -x\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc: $\lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0.$

Bon Courage.

PYTHAGORE

