

CORRECTION DU SUJET DE MATHEMATIQUE (I.O)**1- Résolvons l'équation**

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 5}{4} = 1/2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

$$S/R = (1/2 ; 3)$$

2- déduction de la résolution

$$(E) : X \in \mathbb{R}, 2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$$

$$2e^{2x} - 7e^x + 3 = 0$$

$$2(e^x)^2 - 7e^x + 3 = 0$$

$$\text{Posons } X = e^x$$

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

De (1), on a : $X = 1/2$ ou $X = 3$ or $X = e^x$ ainsi donc :

$$e^x = 1/2 \text{ ou } e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln(1/2) \text{ ou } \ln e^x = \ln 3$$

$$X = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 3$$

$$S/R = (-\ln 2 ; \ln 3)$$

Exercice 2**PARTIE A**

1- Les chiffres sont répétés donc on a :

$$N = 10^4 = 10.000$$

2- Le nombre de codes PIN commençant par 24

Les éléments sont non distincts, les 2 chiffres restants peuvent être répétés :

$$N = 10^2 = 100$$

3- Le nombre de code PIN composés à la fois de 0 ; 2 ; 4 et 8.

Ici, nous avons une permutation car, il s'agit de ranger 4 chiffres dans 4 :
 $N = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

4- Le nombre de code PIN, composés de chiffres distincts

Ici, nous avons un arrangement de 4 dans 10

$$N = A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

PARTIE B

1- Soit le code Pin formé par Angèle commençant par 24. Card A = 100
 et Card $\Omega = 10.000$

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{21}{10.000} = 0,0021$$

Exercice 3

PARTIE A

1- A travers la lecture graphique :

$$\lim f(x) = -8$$

2- Vérifions

$$\begin{aligned} (T) : y = f'(1) &= (x-1) + f(1) \\ &= x - 1 + 1 \\ (T) &= y = x \end{aligned}$$

3- Déterminons graphiquement le signe de $f(x)$ pour $x \in]0;10]$

$$\forall x \in]0;1/e[, f(x) < 0 ;$$

$$\forall x \in]1/e;10[; f(x) > 0$$

$$\forall x \in (1/e), f(x) = 0$$

$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante $]1; +\infty[$

3- a- Etude du signe de $f(x) - h(x)$ sur $]0; +\infty[$

$$f(x) - h(x) = 1 + \ln x - (-x + 1 \ln x) = x$$

$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$ donc $f(x) - h(x) > 0$

b- Position relatives de (G) et (T)

$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - h(x) > 0$ Ainsi (G) est au dessus de (T)

4- Construction T (voir le tracé)

5- Soit $F : F : \begin{matrix} \xrightarrow{\infty} \\]1; +\infty[\end{matrix} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$
 $X \quad x \ln(x) - x$

a* Vérifions

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = (x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

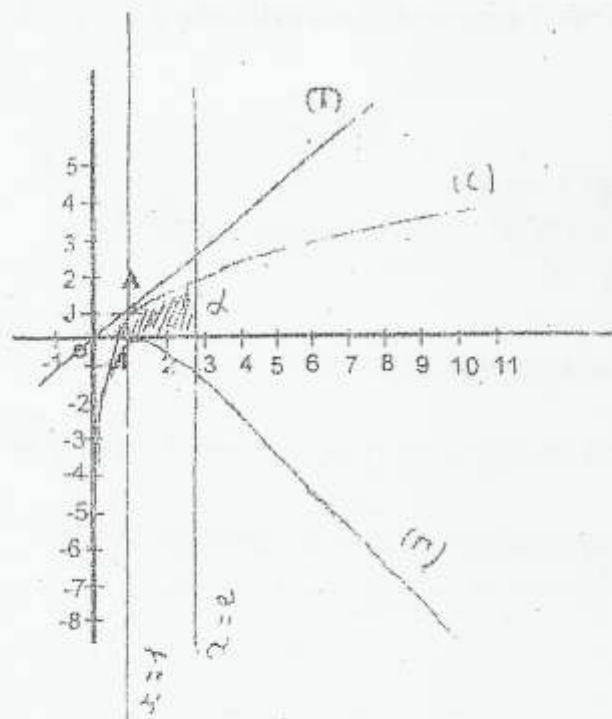
Ainsi donc F est primitive de $\ln x$

b- Justification de $\alpha = e$

$$= \int_1^e (1 + \ln x) dx$$

$$= (x + x \ln x - x) \Big|_1^e$$

$$= e + e \ln e - e - 1 + 1 \ln 1 + 1$$



4- Nous avons la fonction $f(x) = ax + b + \ln(x)$

a- vérifions que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (ax + b + \ln x)' \\ = a + 1/x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = (ax+1) / x$$

b- Démontrons que $a = 0$ et $b = 1$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = \Leftrightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow b = 1$$

Ainsi donc $f(x) = 1 + \ln x$

PARTIE B

Nous avons les fonctions suivantes

$$g(x) = \frac{1-x}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = -x + 1 + \ln(x)$$

1- Justifions que (Δ) : $x = 0$ est asymptote à (T)

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x + 1 + \ln x) = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} (-x+1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

Ainsi donc (Δ) ; $x = 0$ est asymptote verticale à (T)

2- a- Démontrons

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = (-x+1 + \ln x)' \\ h'(x) = -1 + 1/x = (1-x) / x = g(x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = g(x)$$

b- Déduisons en le sens de variation de h

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0 \text{ donc le signe de } h'(x) \text{ est celui de } 1-x \text{ ainsi donc :}$$

$$\forall x \in]0; 1[, h'(x) > 0 \text{ donc } h \text{ est strictement croissante }]0; 1[$$