CORRECTION IO SESSION 2012
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

1- Résolvons l'équation

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$$

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

$$S/R = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$$

2- Déduisons de la résolution

$$E) : X \in \mathbb{R}, 2^{2x} + 7^{e^x} + 3 = 0$$

$$2^{2x} + 7^{e^x} + 3$$

$$2(e^x)^2 + 7^{e^x} + 3 \text{ posons } X = e^x$$

$$2^{2x} + 7^{e^x} + 3 = 0$$

De (1), on a : $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3$ or $X = X = e^x$ ainsi donc

$$e^x = \frac{1}{2} \text{ ou } e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } x \ln e^x = \ln 3$$

$$X = -\ln 2 \text{ ou } x = \ln 3$$

$$S/R = (-\ln 2; \ln 3)$$

EXERCICE 2

PARTIE A

1- Les chiffres sont répétés donc on a :

$$N = 10^4 = 10.000$$

2- Le nombre de codes PIN commençant par 24

les éléments sont non distincts, les 2 chiffres restants peuvent être répétés :

$$N = 10^2 = 100$$

3- Le nombre de code PIN composé à la fois de 0 ; 2 ; 4 et 8

Ici, nous avons une permutation car, il s'agit de ranger 4 chiffres dans 4

$$N = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

4- Le nombre de code PIN ; composés de chiffres distincts

Ici, nous avons un arrangement de 4 dans 10

$$N = A = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

PARTIE B

- 1- Soit le code PIN formé par Angèle commençant par 24 Card
 $A = 100$ et card $\Omega = 10.000$
 $P(A) = \text{Card } A / \text{Card } \Omega = 21/10.000 = 0,0021$

EXERCICE 3

PARTIE A

- 1- A travers la lecture graphique

$\lim f(x) = -8$

$T : Y = f(1) = (x-1) + f(1)$

$= x-1+1$

$T = y = x$

- 2- Déterminons graphiquement le signe de $f(x)$ pour $x \in (0 ; 10)$

$\forall x \in]0, 1/e[, f(x) < 0;$

$\forall x \in]0, 1/e[, f > 0$

$\forall x \in]0, 1/e[, f = 0$

$\forall x \in]0; \infty[, f(x) < 0$

$\forall x \in]0; \infty[, h'(x)$ est donc h est strictement décroissante $]1 ; \infty[$

3 - a - Etude du signe de $f(x) - h(x)$ sur $[0; \infty]$

$f(x) - h(x) = 1 + \ln x = x$

$\forall x \in]0; \infty[, x > 0$ donc $f(x) - h(x) > 0$

- c- Position relatives de G et T

$\forall x \in]0; \infty[, f(x) - h(x) > 0$ ainsi G est au dessus de T

4 - Construction T (voir le tracé)

Soit $F : F :]1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$X \rightarrow x \ln x - x$

- a- Vérifions

$\forall x \in]1; \infty[, f'(x) = x \cdot \ln x - x)' = nx + 1 - 1 = \ln x$

Ainsi donc F est primitive de $\ln x$

- b- Justification de $\alpha = e$

$= \int (1 + \ln x) dx$

$= x + x \cdot \ln x - x$

$= e + e \cdot \ln e - e - 1 + 1 \ln 1 + 1$

4- Nous avons la fonction $f(x) = ax + b + \ln x$

a- Vérifions que :

$$\forall x \in]1; \infty[; f(x) = ax + b + \ln x$$

$$= 4 + \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in]1; \infty[; f'(x) = (ax+1)/x$$

b- Démontrons que $a=0$ et $b=1$

$$f(1) = 1 \quad a \cdot 1 = 1 \quad a = 0$$

$$f'(x) = a+1 = 1 \quad b = 1 \Delta$$

Ainsi donc $f(x) = 1 + \ln x$

PARTIE B

Nous avons les fonctions suivantes

$$G(x) = \frac{1-x}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = -x+1+\ln x$$

1- Justifions que $\Delta : x = 0$ est asymptote à T

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x+1+\ln x) = \infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x+1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \infty$$

Ainsi donc $\Delta : x = 0$ est asymptote verticale à T

2- A-Démontrons

$$\forall x \in]1; \infty[\quad h'(x) = (-x+1+\ln x)'$$

$$h'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x} = g(x)$$

$$\forall x \in]1; \infty[; h'(x) = g(x)$$

c- Déduisons en le sens de variation de h

$\forall x \in]0; \infty[; x > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $1-x$ ainsi donc

$\forall x \in]0; 1[; h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante] 0 ; 1[