J'intègre

Bernard Myers
Dominique Souder

LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES

Concours écoles de commerce post-bac

ACCÈS • BACHELOR-EGC • SESAME • PASS • PRISM • TEAM • IPAG • TAGE-MAGE • TAGE 2...

Tout pour réussir vos concours d'entrée

- Les méthodes détaillées en logique, des rappels de cours en mathématiques
- De nombreux extraits d'annales de concours
- Tous les corrigés détaillés
- Tous les renseignements utiles sur les écoles recrutant au niveau Bac

l'Etudiant

DUNOD

LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES

Concours écoles de commerce post-bac

ACCÈS • BACHELOR-EGC • SESAME • PASS • PRISM
TEAM • IPAG • TAGE-MAGE • TAGE 2...

Bernard Myers
Dominique Souder

l'Etudiant

DUNOD

ISBN 978-2-10-054589-6

Table des matières

Les écoles de commerce en quatre ou cinq ans v

Chapitre 1 Les séries 1

Chapitre 2 Les ensembles et les intrus 31

Chapitre 3 Les séries doubles 50

Chapitre 4 Autres démarches logiques 81

Chapitre 5 QCM de maths : comment être performant ? 118

Chapitre 6 Nombres relatifs 123

Chapitre 7 Pourcentages 129

Chapitre 8 Calculs, priorités et sens des opérations 137

Chapitre 9 Puissances 148

Chapitre 10 Règle de trois – Proportionnalité 158

Chapitre 11 Conversions 170

Chapitre 12 Racines carrées 178

Chapitre 13 Aires 186

Chapitre 14 Périmètres et aires : comparons… 195

Chapitre 15 Volumes 203

Chapitre 16 Distances, vitesses, temps, débits… 214

Chapitre 17 Dénombrement 223

Chapitre 18 Équations 233

Chapitre 19 Arithmétique 242

Chapitre 20 Calculs approchés, ordre de grandeur… 251

Chapitre 21 Inclassables… 258

Chapitre 22 Calcul mental rapide 268

Chapitre 23 Supplément mathématique pour les concours ACCÈS et PRISM 284

Chapitre 24 Supplément mathématique pour le concours PRISM 310

Chapitre 25 Conditions minimales (Supplément pour le test Tage Mage) 326

Concours blanc 337

Index 355

Les écoles de commerce en quatre ou cinq ans

En 1986, 16 écoles recrutaient après le bac ou au niveau bac pour quatre ou cinq années d'études. Elles sont près de 70 aujourd'hui ! C'est dire s'il devient de plus en plus difficile, pour un candidat, de choisir son établissement. Privilégiez les écoles anciennes (qui ont, par exemple, diplômé plus de trois promotions, qui existent donc depuis au moins sept ans), celles ayant des labels officiels (voir page vi). Seuls cinq établissements dans cette catégorie sont habilités actuellement à délivrer le grade de master qui est le plus haut label dont peut bénéficier à ce jour une école de commerce : il s'agit de l'ESSCA, de l'IESEG, de l'ESDES, de l'École de management de Normandie et de l'ESG. Plusieurs concours communs vous permettent de multiplier les candidatures en vous concentrant dans le temps.

Le concours ACCÈS

Depuis 1998, trois écoles en cinq ans, membres de la Conférence des grandes écoles, reconnues par l'État et qui délivrent un diplôme visé par le ministère de l'Éducation nationale, ont regroupé leurs épreuves d'admission en créant le concours Accès (www.concours-acces.com). Il s'agit de l'ESSCA (présente à Angers et à Paris), de l'IESEG (Lille et Paris) et de l'ESDES (Lyon). Ces trois écoles délivrent le grade de master.

L'ESSCA. Accrédité EPAS (European Partnership Agreements) par l'EFMD, l'ESSCA propose d'abord un premier cycle de trois ans destiné à vous faire acquérir les savoirs fondamentaux, notamment en gestion et dans deux langues étrangères. La première et la seconde année se passent à Paris ou à Angers, mais la troisième année ne se déroule qu'à Angers où un nouveau bâtiment de 4 400 m^2 a été inauguré à la rentrée 2009. Le deuxième cycle de deux ans comporte un semestre en entreprise et un semestre à l'étranger sur les sites de l'école situés à Budapest et Shangai ou dans l'une des 88 universités partenaires de l'école. L'école propose 22 semestres spécialisés en master.

L'IESEG fait partie de la FUPL (Fédération universitaire et polytechnique de Lille), dite la Catho. Ses frais de scolarité sont moins élevés que dans les autres écoles. L'IESEG se donne pour objectif de former des managers opérationnels de dimension internationale. Son cursus, organisé désormais en 3 ans + 2 ans, fait la part belle au développement personnel, à l'apprentissage de spécialités. Elle est très bien placée dans notre palmarès 2008 des écoles de commerce délivrant un master. Depuis la rentrée 2009, l'IESEG a ouvert un campus à Paris-La Défense qui, à terme, accueillera les cinq années de son programme grande école.

L'ESDES Lyon fait partie de la Catho de Lyon. Le cursus de l'ESDES dure également cinq ans. Ses trois premières années vous feront acquérir les fondamentaux des métiers de l'entreprise. La quatrième année comporte un semestre d'études en université étrangère ou un stage dans un environnement international, et la cinquième vous permettra de choisir une option d'approfondissement. Depuis 2003, l'école délivre un diplôme visé par le ministère de l'Éducation nationale, depuis 2006, le grade de master et, depuis 2007, elle fait partie du Chapitre des grandes écoles de management… ce qui devrait lui attirer des candidats supplémentaires.

REPÈRES **Écoles en quatre ou cinq ans : les labels en un coup d'œil**

Voici les labels que possèdent les écoles en quatre ou cinq ans (juin 2009) : l'habilitation à délivrer le grade de master, le diplôme visé par l'État et la reconnaissance par le ministère de l'Éducation nationale. Les écoles sont classées par ordre alphabétique. Le statut indique si l'école est privée (Pr) ou consulaire (Co).

École	Statut	Master	Visa	Reconnaissance	Durée
Académie Mercure Montpellier	Pr				bac + 4
American Business School Paris	Pr				bac + 4
AUP Paris	Pr				bac + 4
CEFAM Lyon	Pr				bac + 4
CERAM Bachelors – EAI Sophia-Antipolis	Co			R	bac + 4
CESEM Reims	Co		V	R	bac + 4
CeseMed Euromed Marseille	Co		V	R	bac + 4
EBP International, Talence	Co		V		bac + 5
EBS Paris	Pr		V	R	bac + 5
ECE Bordeaux	Pr		V	R	bac + 4
ECE Lyon	Pr		V	R	bac + 4
EDC Paris	Pr	M	V	R	bac + 5
EICD 3A Lyon	Pr			R	bac + 4
EIM Montpellier	Co			R	bac + 4
EM Normandie Le Havre Caen	Pr	M	V	R	bac + 5
EMLV Paris	Pr		V	R	bac + 5
EMP Paris	Pr				bac + 4
ENSIATE Bois-Colombe	Pr				bac + 5
EPSCI Cergy-Pontoise	Pr		V	R	bac + 4
ESA 3 Paris	Pr				bac + 4
ESAM Lyon, Paris, Toulouse	Pr				bac + 5
ESC Chambéry	Co		V	R	bac + 4
ESC Compiègne	Pr			R	bac + 5

ESC Saint-Étienne	Co		V	R	bac + 4
ESCE Lyon, Paris	Pr	M	V	R	bac + 5
ESCG Paris	Pr				bac + 5
ESCIP Longuenesse	Pr			R	bac + 5
ESDES Lyon	Pr	M	V	R	bac + 5
ESG Paris	Pr	M	V	R	bac + 5
ESGCI Paris	Pr				bac + 5
ESGF Paris	Pr				bac + 5
ESIAE Paris	Pr				bac + 4
ESPEME Lille, Nice	Pr		V	R	bac + 4
ESSCA Angers, Paris	Pr	M	V	R	bac + 5
ESTA Belfort	Co		V	R	bac + 4
ICD Paris	Pr		V	R	bac + 5
ICD Toulouse	Pr				bac + 4
IDRAC Lyon	Pr		V	R	bac + 4
IDRAC (1)	Pr				bac + 4
IECG La Rochelle	Co		V	R	bac + 4
IESEG Lille, Paris	Pr	M	V	R	bac + 5
IFI Mont Saint Aignan	Co		V	R	bac + 4
INBA Troyes	Co		V	R	bac + 4
IPAG Nice, Paris	Pr		V	R	bac + 5
ISCID Dunkerque	Pu		V	R	bac + 5
ISEE	Pr				bac + 5
ISEG (2)	Pr				bac + 5
ISTEC Paris	Pr		V	R	bac + 5
MBAI Paris	Pr				bac + 4
MIP Paris	Pr			R	bac + 5
SIU Paris	Pr				bac + 4
Tema Reims	Co			R	bac + 5
Weller Paris	Pr				bac + 4

(1) Montpellier, Nantes, Nice, Paris, Toulouse
(2) Bordeaux, Lille, Lyon, Nantes, Paris, Strasbourg, Toulouse. Titre de l'ISEG Executive, option marketing communication et titre de l'ISEG Sup option management.

Le concours SÉSAME

Depuis 1992, sept des meilleures écoles à vocation internationale ont décidé d'effectuer leur recrutement en commun. Le CeseMed, le CESEM Reims, l'EBP Bordeaux, l'EPSCI Cergy-Pontoise, l'ESCE Paris et Lyon, l'IFI Rouen et l'École de management de Normandie sélectionnent les bacheliers sur une banque commune d'épreuves baptisée SÉSAME (session d'épreuves spécifiques à l'admission au management européen et international). Le but de l'opération :

distinguer, aux yeux du public, des écoles de qualité reconnue, au moment où les formations internationales de niveaux très divers inondent le marché. Bien entendu, chaque école peut faire varier le nombre d'épreuves ainsi que leur coefficient. Le tronc commun obligatoire comporte des tests d'analyse et de synthèse de texte, de logique et de langues. Toutes ces écoles sont reconnues par le ministère de l'Éducation nationale et leur diplôme est visé par l'État.

Le CESEM, qui appartient au groupe Reims Management School, offre à ses étudiants 10 programmes au choix : franco-allemand, franco-américain, franco-australien, franco-britannique, franco-chinois, franco-espagnol, franco-irlandais, franco-italien, franco-mexicain, franco-néerlandais. Pour chacun d'eux, vous passerez deux ans en France et deux ans, selon votre choix, à l'étranger ! À l'inverse, la moitié de la promotion restée sur place est composée d'élèves étrangers. Les cours se font dans la langue des pays d'accueil et deux diplômes – l'un français, l'autre étranger – sont délivrés en fin de cycle, avec une cinquième année optionnelle. Cette formule réellement multinationale vaut au CESEM (à juste titre) une réputation qui le classe parmi les meilleures écoles recrutant au bac et le hisse au niveau des écoles citées dans les chapitres précédents.

Le CeseMed, qui dépend d'Euromed, a diplômé sa première promotion en 1993. L'école fonctionne sur le même principe que le CESEM Reims (deux ans en France et deux ans à l'étranger) et propose cinq programmes : hispanique, anglo-saxon, « Grande Europe », Asie et méditerranéen.

L'EBP International, créée en 1987 par l'École de management de Bordeaux, s'est inspirée de la formule du CESEM Reims. Son cursus comprend quatre semestres de cours à l'étranger, à choisir parmi deux destinations (dont l'Allemagne, l'Espagne et la Grande-Bretagne), ainsi que deux semestres de stage en entreprise hors de France. L'EBP dure cinq ans et, comme les deux écoles précédentes, elle est consulaire.

L'EPSCI appartient au groupe ESSEC, gage de qualité. Elle annonce des accords de partenariat avec 65 universités, dans 25 pays, un an d'études à l'étranger en seconde année et sept accords de doubles diplômes internationaux. Le cursus dure quatre ans, et il est possible d'effectuer les deux dernières années en apprentissage.

L'ESCE propose une scolarité très solide et vous permettra de passer plusieurs semestres d'études à l'étranger, en bénéficiant de ses 94 universités étrangères partenaires et de ses 17 accords, dont certains sont assortis d'un double diplôme. Son cursus dure cinq ans, le deuxième cycle pouvant être suivi en apprentissage. L'école a intégré, depuis la rentrée 1995, le pôle universitaire Léonard-de-Vinci et possède un établissement à Lyon, dans les locaux de l'université Jean-Moulin (Lyon 3), lieu où les élèves peuvent passer les trois premières années avant de revenir à Paris.

L'IFI (Institut de formation internationale de Rouen) est un établissement consulaire qui dépend de l'ESC Rouen. L'IFI propose 70 accords de partenariat dans 26 pays. Les étudiants ont droit à un séjour universitaire d'un an en deuxième année, un stage de 6 mois en fin de troisième année et un parcours à la carte en quatrième année.

L'École de management de Normandie a la particularité de recruter à la fois au bac, sur concours SÉSAME, et sur prépa, via les concours de la banque commune CCIP. Les bacheliers passent leur troisième année intégralement à l'étranger dans une université partenaire (à choisir parmi 18 pays). Entre le master 1 et le master 2, l'école donne aussi la possibilité de partir un an en césure, que ce soit à l'étranger ou en France, en échange académique ou en stage. Enfin, en master 2, chaque étudiant bénéficie d'une année de professionnalisation, fondée sur 14 parcours personnalisés, au choix. L'école délivre le grade de master.

À SAVOIR **SÉSAME en détail**

À l'écrit, les épreuves du concours SÉSAME varient en fonction du programme auquel vous postulez, mais elles comprennent une analyse et une synthèse de dossier, un test de logique et une épreuve de langues. Chaque école fait ensuite passer son propre oral.
Le concours SÉSAME a généralement lieu à la mi-avril.
Inscriptions par Internet : www.concours-sesame.net
En 2009, le CeseMed a offert 200 places, le CESEM Reims 200, l'EBP Bordeaux 110, l'EPSCI Cergy 200, l'ESCE 400, l'IFI Rouen 150 et l'École de management de Normandie 160.
• Secrétariat : SÉSAME, BP 49, 33024 Bordeaux cedex, tél. 05.56.79.44.88.
Internet : www.concours-sesame.net

À SAVOIR **Le concours PRISM**

L'ISEG est un réseau d'écoles – dépendant du groupe IONIS – implantées dans sept villes de France : Bordeaux, Lille, Lyon, Nantes, Paris, Strasbourg et Toulouse. Chaque établissement propose deux filières en cinq ans. La première, ISEG Sup, recrute à l'issue d'un concours commun baptisé PRISM (www.concours-prism.com). Elle met en avant son orientation internationale avec ses cours partiellement en anglais, la possibilité de stage hors de l'Hexagone, de séjour d'étude en université étrangère et de double diplôme. La deuxième, ISEG Executive, plus centrée marketing-communication, recrute par établissement. Les ISEG proposent aussi un programme finance-conseil, en cinq ans.

À SAVOIR **La banque d'épreuves TEAM**

Ce concours permet d'accéder à quatre écoles, réparties sur 10 sites : l'ISTEC (Paris), l'ICD (Paris, Toulouse), l'ESAM (Paris, Lyon et Toulouse) et l'IDRAC (Paris, Montpellier, Lyon, Nice, Nantes et Toulouse). L'ISTEC Paris, l'ICD Paris et l'IDRAC Lyon délivrent un diplôme visé par l'État. Ces établissements ont pour vocation de former d'abord des généralistes de l'entreprise en quatre ou cinq ans, chaque élève ayant la possibilité de se spécialiser et d'effectuer des séjours d'études à l'étranger.
Contact : www.concours-team.net

Le concours PASS

Ce concours réunit trois écoles : l'ESPEME, l'ECE et le MBA Institute.

L'ESPEME, qui existe à Lille et à Nice, dépend du groupe EDHEC et délivre un diplôme visé. Elle forme des cadres généralistes avec un cursus centré à la fois sur l'adaptabilité et sur l'opérationnalité, à travers une spécialisation en finance, marketing ou ressources humaines en troisième année. Ainsi, en troisième année, les élèves ont la possibilité de passer un semestre d'études à l'étranger (voire deux…), ou de faire un stage de longue durée.

Avec l'**ECE**, qui appartient au groupe INSEEC, vous aurez droit à un cursus comportant plusieurs stages, dont deux obligatoirement à l'étranger et un à deux semestres dans une université étrangère. L'ECE, dont le diplôme est visé par l'État, est basé à Bordeaux et à Lyon.

Pendant quatre ans, le **MBA Institute** permet à ses élèves d'acquérir un niveau bilingue en anglais et les entraîne au GMAT (test anglo-saxon utilisé à l'entrée des MBA, afin d'évaluer les aptitudes à la gestion et au management). Son ambition est de conjuguer l'enseignement des grandes écoles françaises et des programmes « undergraduate » américains. Elle aide ses anciens qui le désirent à postuler dans les meilleurs MBA mondiaux.

Pour ces trois écoles, il est possible d'effectuer une cinquième année dans l'un des programmes masters des groupes EDHEC et INSEEC.

Les écoles à recrutement spécifique

En dehors des établissements recrutant par le biais d'un concours commun, plusieurs dizaines d'écoles continuent à avoir un recrutement indépendant. Certes, il est plus difficile – en termes d'organisation – de concourir à un grand nombre d'entre elles. Mais ce n'est pas une raison pour les oublier ! Nous détaillons ci-dessous celles qui sont reconnues par l'État et qui délivrent un diplôme visé.

L'ESG est un établissement qui recrute au niveau du bac, pour cinq ans. L'ESG, qui est l'une des rares écoles dans cette famille à délivrer un grade de master (en plus d'un diplôme visé), forme des cadres dirigeants d'entreprises nationales et internationales. Son programme, qui s'articule sur une durée 3 ans + 2 ans, permet de partir en stage chaque année, et propose, à partir de la quatrième année des spécialisations dans des domaines allant de l'audit et de l'expertise comptable au management financier en passant par le management du luxe ou la production audiovisuelle.

L'IPAG, à Paris et à Nice, dure cinq ans et délivre un diplôme visé. Les trois premières années, généralistes, sont consacrées aux enseignements fondamentaux du commerce et de la gestion. En deuxième cycle, l'élève choisit son orientation internationale et sa spécialisation selon son projet professionnel. Au total, chaque élève passe au minimum deux semestres à l'étranger, en entreprise ou dans une ou plusieurs des 92 écoles ou universités partenaires. Certains de ces échanges permettent d'obtenir une bourse Socrates ou bien un double diplôme.

L'EBS est une école multinationale, en cinq ans, implantée dans dix villes (Dublin, Kaliningrad, Londres, Madrid, Munich, New York, Paris, Riga, Shanghai et l'île Maurice). Chaque établissement propose le même cursus, ce qui permet à tous ses étudiants de passer la troisième année dans deux sites étrangers (ou dans un établissement partenaire) et le deuxième semestre de la cinquième année soit en stage, soit dans l'une des 65 universités partenaires. L'école est membre d'Erasmus.

L'EDC Paris, qui existe depuis 1950, a été rachetée en 1995 par 270 de ses anciens élèves, tous patrons, pour en faire une école à « vocation entrepreneuriale forte ». Sa spécificité consiste à la fois à apporter les bases nécessaires à ses élèves tout en développant leur potentiel de créateur d'entreprise. Durant son cursus de cinq ans, l'école sollicite l'esprit d'initiative et de responsabilité de ses élèves au travers de stages annuels, mais également de missions qui permettent à chaque étudiant de mener à bien des projets, encadrés par des professionnels.

L'EMLV est l'école de management du pôle universitaire privé Léonard-de-Vinci. Son premier objectif est de former des cadres polyvalents en insistant sur leur culture générale. Les étudiants ont également la possibilité d'effectuer, durant le cursus, six mois à un an dans une des 50 universités partenaires. L'école, financée par le Conseil général des Hauts-de-Seine, possède des moyens importants et accorde notamment aux étudiants aux revenus modestes, ainsi qu'à ceux des Hauts-de-Seine, des réductions sur les frais de scolarité. L'EMLV propose plusieurs masters aboutissant à un double diplôme, notamment avec le CERAM et l'université Paris-Dauphine.

Bachelor International de l'ESC La Rochelle, l'IECG oblige ses étudiants à passer 24 mois d'expatriation à l'étranger : un séjour d'études de douze mois et douze mois de stage. Au final, tous les étudiants obtiennent un double diplôme français et étranger. Signalons que ce programme existe aussi au sein de l'ESC Chambéry depuis la rentrée 2008.

L'ESTA de Belfort a un projet original, puisque son but est de former des cadres technico-commerciaux préparés à la vente de produits et de services industriels. Durant quatre ans, vous y serez sensibilisé à la culture des affaires, aux technologies et au marketing industriel. Le cursus, qui comporte vingt mois de stage, se termine par un diplôme visé par l'État. L'ESTA ne recrute en admissions normales que des bacheliers scientifiques (S, STI, STL) mais ses admissions parallèles sont aussi accessibles aux bac + 2 technologiques et scientifique. Consulaire, elle a fixé des frais de scolarité assez peu élevés.

Le Bachelor CMI de l'ESC Saint-Étienne est un programme en quatre ans qui prépare aux métiers du management international. Il est sanctionné par un double diplôme : d'une part celui, visé, de l'école, d'autre part un Bachelor of Arts in Business délivré par l'une de ses universités étrangères partenaires. La troisième année se déroule obligatoirement dans une Businness school étrangère, mais les élèves peuvent y ajouter cinq mois en immersion dans une Business School dès la seconde année.

L'INBA, qui dépend de l'ESC Troyes, forme des professionnels du management international. Le cursus en quatre ans comprend six mois de stages à l'étranger et deux semestres en université étrangère partenaire, avec double diplôme à la clef (et une cinquième année optionnelle). L'INBA propose 11 accords de double diplôme en Allemagne, Espagne, Italie, Mexique, Royaume-Uni, aux Émirats Arabes Unis, en Chine, Irlande, au Chili…

L'ISCID Dunkerque. Dépendant de l'Université du Littoral Côte d'Opale, il recrute désormais dès le bac, pour cinq ans. Le premier cycle mène à un Bachelor in International Management & Business Studies (IMBS) en trois ans, avec une prépa intégrée de deux ans. À partir de la quatrième année, l'école forme à un Postgraduate Degree in International Management & Business Studies ainsi qu'à plusieurs masters en affaires internationales (bac + 5). À signaler les frais de scolarité plus faibles que dans les autres écoles, l'établissement étant universitaire.

On peut ranger les autres écoles en trois familles :

- les « internationales », qui proposent des séjours d'études et des stages à l'étranger, voire des doubles diplômes, et sont pour la plupart des programmes « bachelor » dispensé par des ESC (Bachelor CERAM, EIM/ESC Montpellier), ou des groupes privés (Académie Mercure, CEFAM, American Business School, Weller…) ;
- les « spécialisées », qui mettent en avant une dominante de façon plus ou moins forte (Téma – management et nouvelles technologies –, ESGF – expertise comptable –, EICD – aide au développement –, ESGCI – commerce international) ;
- et les « généralistes », dont l'objectif est de faire de vous un manager complet. Parmi ce groupe, citons le MIP (Management Institute of Paris), fondé en 2000 par un groupe de patrons influents (Claude Bébéar, Martin Bouygues) et qui est déjà reconnu par l'État, ou encore ESCIP, ESA3, ESIAE, etc.

Enfin, The American University of Paris et SIU accueillent essentiellement des étudiants de nationalité étrangère.

Ces informations sont extraites du guide *Bien choisir son école de commerce* édition 2010 publié par L'Etudiant et disponible en librairie.

Les séries 1

Les tests des écoles de commerce, les tests de sélection des entreprises ou les tests de QI proposent tous des questions basées sur le principe de la série. La plupart du temps, celles-ci se présentent à visage découvert. Cependant, un certain nombre d'entre elles fonctionnent comme des séries sans en avoir l'aspect. Tout candidat à une épreuve de tests se doit donc de connaître les principes et les conventions des séries.

Dans les exercices de logique, on entend par « série » (on dit également « séquence » ou « suite ») un nombre de figures qui changent de façon régulière, selon un même principe. Dans la série classique, les questions se présentent sous la forme d'une séquence dont le candidat doit trouver la suite parmi plusieurs propositions. La première démarche consiste donc à trouver la règle qui gouverne la série et, dans un deuxième temps, d'appliquer cette règle pour trouver la figure qui la continue.

Selon les épreuves, ce principe de base est ensuite conjugué de diverses manières, avec des chiffres, des lettres, des figures géométriques ou même des objets de la vie quotidienne comme les dominos. La série peut être présentée de façon linéaire, mais aussi sous la forme d'une grille (les matrices) ou même camouflée dans une énigme. La série graphique linéaire reste la plus courante et celle qu'il faut maîtriser en premier.

Les séries graphiques

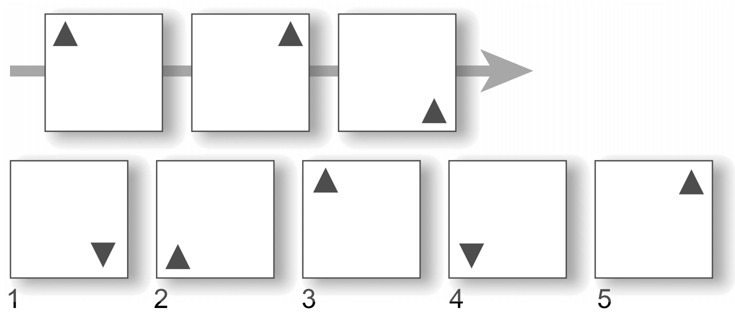
Des figures disparates ne forment pas une série. Ce qui crée une série est le fait qu'un aspect des figures change de façon régulière. Pour résoudre une série, il faut donc trouver ce qui change et de quelle façon. Ces changements peuvent être regroupés en deux grandes catégories : les déplacements et les transformations.

Les déplacements

Dans cette catégorie, les figures successives d'une série présentent les mêmes éléments, mais dans des positions différentes, comme la représentation de plusieurs stades successifs d'un mouvement.

Exemple 1

Quelle figure continue la série ?



Si on considère les trois premières cases comme les stades successifs d'un mouvement, on voit que le triangle tourne autour de la case dans le sens des aiguilles d'une montre, passant d'un coin à un autre. Le triangle doit donc se trouver dans le coin inférieur gauche (choix 2 ou 4). Comme dans les trois premières figures, le triangle ne change pas d'orientation (la pointe reste vers le haut) ce sera le cas également pour la suivante.

Solution exemple 1

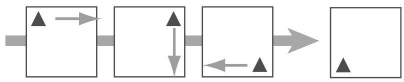
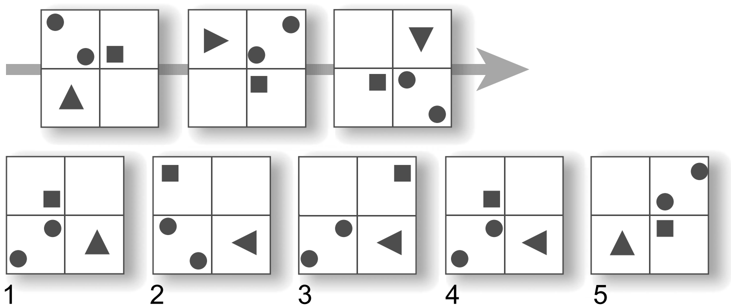


Figure 2. Le triangle passe d'un coin à l'autre dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exemple 2



La multiplication des éléments rend la visualisation du mouvement plus difficile. Si on ne le perçoit pas avec une vue d'ensemble, il faut considérer chaque partie. Le triangle est probablement la figure la plus parlante. On constate en effet que le triangle passe d'une section à une autre en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, mais qu'en plus il tourne sur lui-même dans le même sens. On s'aperçoit alors que les autres formes suivent le même mouvement. Les personnes ayant une bonne vision dans l'espace auront peut-être remarqué qu'en fait, c'était la figure entière qui tournait sur elle-même ; mais que l'on prenne la série quart par quart, soit en considérant la figure entière, on peut trouver la solution en analysant les mouvements.

Solution exemple 2

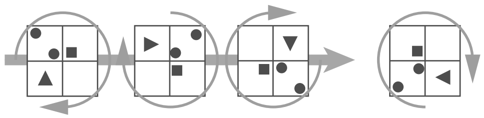
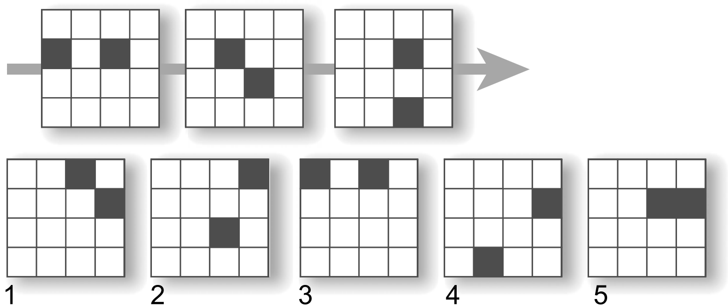


Figure 4. La case entière avec tous ses éléments, tourne de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les séries de cases noircies dans des grilles forment toutes une sous-catégorie, régie par un nombre de conventions qu'il est utile de connaître. Les cases noircies sont comme les figures qui se déplacent dans les séries ci-dessus, sauf qu'elles sont toutes identiques. On risque ainsi de les confondre et il faut analyser leur mouvement avec soin. Il est généralement convenu que si les cases avancent de façon linéaire, elles ne se déplacent que d'une case à la fois (horizontalement, verticalement et en diagonale, dans un sens comme dans l'autre). Quand deux cases se retrouvent au même emplacement, l'une masque l'autre et on peut avoir l'impression qu'une case a disparu. Si une case arrive à un bord de la figure, dans la figure suivante, elle réapparaîtra de l'autre côté sur le même alignement (si elle sort par le bord droit, elle apparaît au bord gauche ; par le haut, elle réapparaît en bas, etc.).

Exemple 3



En se fiant à la convention du déplacement d'une seule case à la fois, on voit que la case à gauche de la première figure ne peut se déplacer que horizontalement vers la droite. Par conséquent, l'autre case doit se déplacer vers le bas et, comme dans la dernière figure elle a atteint le bord inférieur, dans la figure suivante (celle à trouver) elle apparaîtra en haut du même alignement.

Solution exemple 3

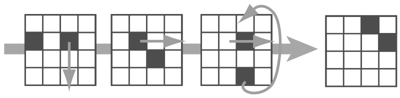
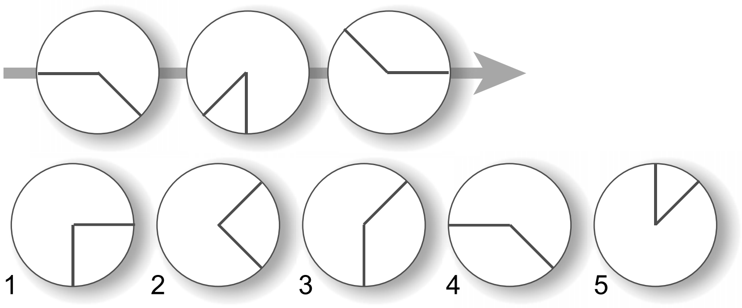


Figure 1. Une case se déplace vers la droite, l'autre vers le bas, avec sortie en bas et entrée en haut.

Les séries dans des cercles ont des conventions légèrement différentes. Les éléments qui se déplacent (souvent des traits ou flèches qui rappellent les aiguilles d'une montre) n'ont que deux directions possibles (dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse), en revanche la distance parcourue peut être de 30°, 45°, 90° ou d'autres distances. Un même élément se déplacera toujours de la même distance. C'est d'ailleurs grâce à cette régularité que l'on peut trouver le principe de la série et distinguer un élément d'un autre quand il y en a plusieurs.

Exemple 4



Comme les « aiguilles » sont indifférenciées, il faut répéter le mouvement sur trois figures pour pouvoir l'établir. L'aiguille à moins le quart dans la première figure peut s'être déplacée de 45° dans la seconde, mais ce mouvement ne se poursuit pas dans la troisième. On établit donc qu'elle s'est déplacée de 90° (dans le sens anti-horaire), ce qui est possible avec la troisième figure.

Solution exemple 4

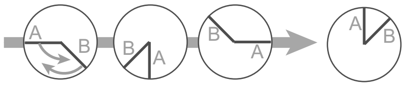
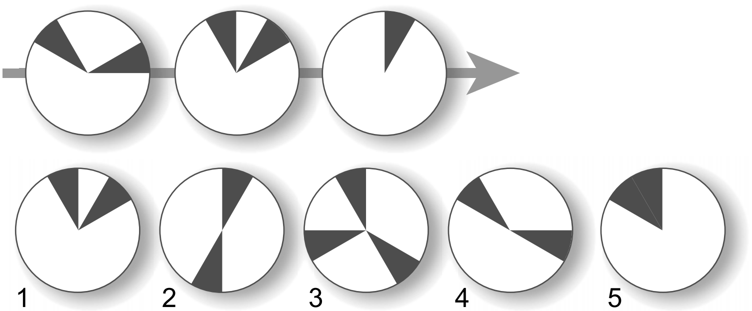


Figure 5. L'aiguille A tourne de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, l'aiguille B de 90° également, mais dans le sens des aiguilles d'une montre.

Comme avec les déplacements dans les grilles, deux éléments peuvent se retrouver au même endroit, il y a donc superposition. Au début, celles-ci sont déconcertantes, car on a l'impression que des éléments disparaissent. Avec un peu d'entraînement, cependant, elles ne représentent qu'une petite complication supplémentaire.

Exemple 5



Solution exemple 5

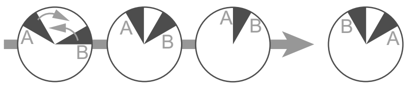
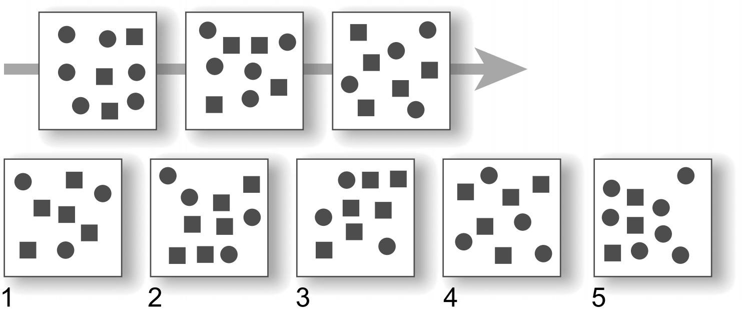


Figure 1. La section A tourne de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre, la section B d'autant mais en sens inverse. Dans la troisième figure de la série, les deux sections A et B sont superposées.

Les transformations

Les séries de cette catégorie sont établies, non par des déplacements, mais par la transformation régulière, étape par étape d'un aspect bien particulier. Cela peut être les quantités, les formes, les couleurs, les dimensions ou même des séries connues comme l'alphabet, ou les mois de l'année. Avec ces séries, comme avec toutes les autres, s'il y a ambiguïté d'interprétation, il faut toujours choisir la solution la plus simple.

Exemple 6



Dans une série comme celle-ci, avec une multitude de petites formes disposées sans organisation apparente, il faut s'intéresser en premier lieu au nombre d'objets. On les compte et on constate que dans la série, il y a toujours 9 petites formes : il faudra donc détailler le comptage pour établir une régularité, une progression.

Solution exemple 6

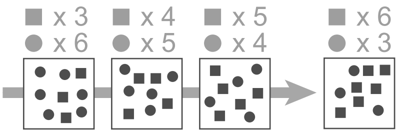
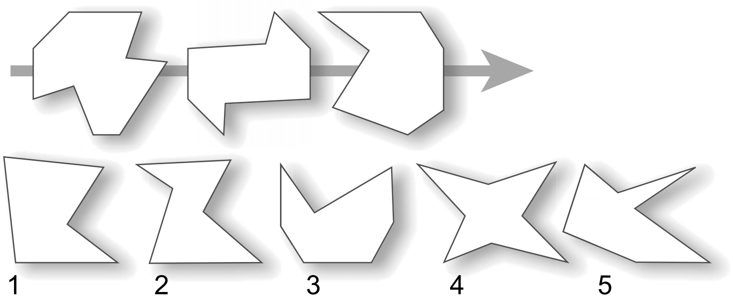


Figure 3. À chaque fois, un rond de moins et un carré de plus.

Une autre série avec un raisonnement analogue :

Exemple 7



Le seul élément qui change est la forme. Il faut donc considérer les aspects qui en découlent : le nombre de côtés, le nombre d'angles droits, aigus, obtus…

Solution exemple 7

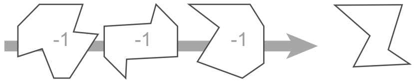
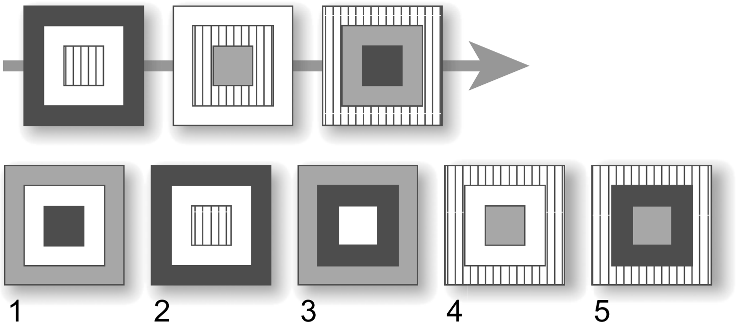


Figure 2. Ici une série toute simple, chaque forme ayant un côté de moins que la précédente.

Dans la série suivante, les formes au contraire ne changent pas du tout : il faut donc chercher une série avec les couleurs.

Exemple 8



Avec les couleurs, comme avec d'autres éléments, il ne faut pas oublier que les séries se répètent en boucle : A-B-C-A-B-C sans début ni fin. La difficulté ici est donc de trouver d'une part l'ordre dans lequel se suivent les couleurs et d'autre part comment cet ordre s'inscrit dans les figures (de gauche à droite, de l'intérieur vers l'extérieur, etc.). Notez que les « hachures » sont considérées comme une couleur et que certaines séries jouent sur le sens des petits traits.

Solution exemple 8

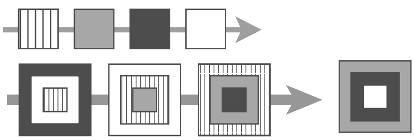


Figure 3. Les couleurs se suivent dans l'ordre : hachures – gris – noir – blanc. La série fonctionne aussi bien si on considère une même section

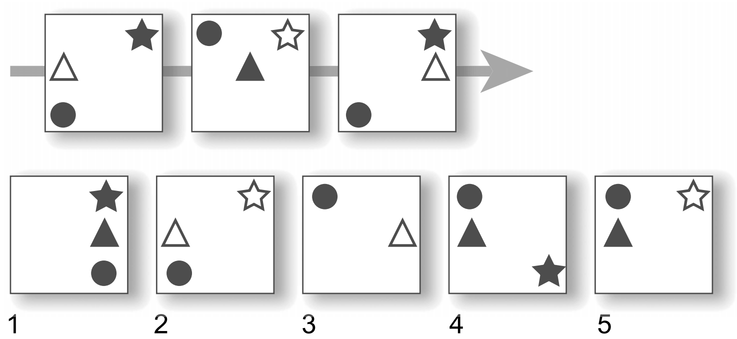
(centre, extérieur) de gauche à droite, que de l'intérieur vers l'extérieur (une même couleur passant successivement du centre, au milieu puis à l'extérieur).

Les séries mixtes

Dans les séries que nous avons vues jusqu'à présent, un seul aspect était considéré à la fois. Dans la très grande majorité des séries, cependant, plusieurs évolutions opèrent simultanément : certains objets se déplacent, d'autres se transforment et d'autres encore se transforment en se déplaçant.

Dans la série suivante, par exemple, nous avons chacun de ces cas :

Exemple 9



Ici il suffit de suivre chaque objet attentivement pour noter l'évolution. La situation peut être plus difficile s'il y a confusion entre des objets différents, ou si, comme dans l'exemple suivant, il y a interaction entre divers éléments de la série.

Solution exemple 9

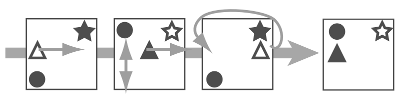
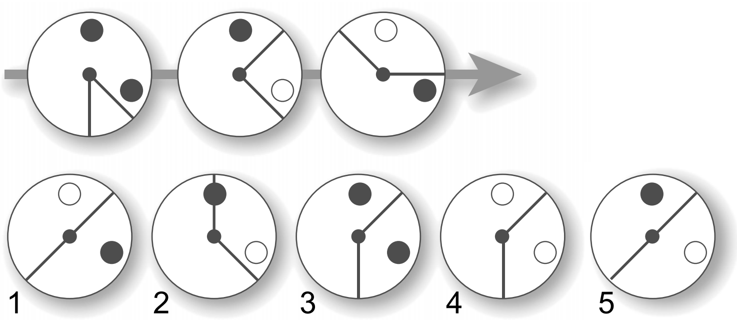


Figure 5. Le rond se déplace en passant alternativement de haut en bas à gauche. L'étoile se transforme en passant alternativement du noir au blanc mais en restant à la même place. Le triangle se déplace et se transforme : il passe alternativement du blanc au noir tout en progressant vers la droite, avec sortie à droite et entrée à gauche.

Exemple 10



Commencer par sérier les problèmes. D'abord analyser le mouvement des « aiguilles », puis dans un deuxième temps, chercher une explication pour l'évolution des ronds.

Solution exemple 10

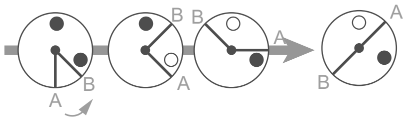


Figure 1. Les deux traits tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, A de 45°, B de 90°. Les ronds ne bougent pas, mais changent de couleur chaque fois qu'un trait passe dessus. On peut trouver d'autres explications pour les couleurs mais moins satisfaisantes : le rond du bas passe alternativement du noir au blanc, mais dans ce cas la solution est 5 et il faut trouver une explication pour que le rond du haut soit noir. On peut en trouver d'autres, mais elles seront complexes et il faut toujours privilégier les raisons simples et/ou uniques.

Les séries numériques et alphabétiques

Les chiffres

Le principe de la série, avant d'être graphique, était surtout numérique. Les concours se privent rarement de cet exercice qui, à peu de frais, met la logique et le raisonnement du candidat à l'épreuve.

Le défi est de trouver, parmi les innombrables possibilités, la progression mathématique qui est à la base de la série. Même si une certaine aisance avec les chiffres facilite les choses, la démarche est avant tout logique, l'exercice ne faisant que rarement appel à des connaissances mathématiques particulières.

Face à un problème de série numérique, la plupart des candidats réagissent à l'instinct et cette méthode est souvent la meilleure pour commencer. Sans même passer par l'analyse, bon nombre de candidats voient tout de suite si les nombres sont des multiples de 3 ou de 11, s'il s'agit d'une progression à base d'additions ou de multiplications. Quand l'instinct ne suffit pas, cependant, quelques démarches systématiques peuvent aider à trouver la solution.

➢ 1. Se poser les bonnes questions

ment. Vérifiez si la série en question s'inscrit dans une de ces démarches classiques :

- Addition/soustraction à chaque fois d'une même somme (par exemple, + 5 à chaque fois) ;
- Addition/soustraction à chaque fois d'une somme qui croît/décroît régulièrement (+ 1, + 2, + 3 …) ;
- Addition/soustraction d'une séquence arbitraire mais qui se répète régulièrement (+ 4, + 8, + 5) ;
- Opérations alternées (+ 2, × 3) ;
- Deux séries simultanées présentées un nombre sur deux ;
- Multiples croissant d'un nombre. (9-12-15 multiples de 3) ;
- Progression de nombres carrés. Même de façon cachée comme 4 + 1, 9 + 1, 16 + 1.

➢ 2. Noter les écarts permet de mettre certaines progressions en évidence :

Exemple 11

11 - 18 - 24 - 29 - 33 - 36 - …

Cette série qui ne se livre pas d'emblée devient claire si on note les écarts entre les nombres.

	+ 7		+ 6		+ 5		+ 4		+ 3	
11	**/**	**18**	**/**	**24**	**/**	**29**	**/**	**33**	**/**	**36 – …**

Solution exemple 11

38 (On ajoute à chaque fois un nombre qui décroît de 1. Après + 3, vient + 2 donc 36 + 2 = 38).

Parfois, le fait de noter les écarts sert surtout à éliminer une solution pour se diriger vers une autre :

Exemple 12

	+2	+2	+6	+2	+14	
2 /	4 /	6 /	12 /	14 /	28	- …

En exprimant la progression uniquement par des additions on ne trouve pas la base de la logique, mais les écarts notés peuvent nous guider vers l'explication, en l'occurrence, alternativement × 2 et + 2.

Solution exemple 12

30 (Alternativement + 2 et × 2, donc 28 + 2 = 30).

➢ 3. Lire la série de façon décalée

Quand une série résiste, il suffit souvent de la lire de façon inhabituelle. En lisant vers la gauche, on découvre parfois des aspects que l'on n'avait pas remarqués auparavant, ou en lisant dans le sens classique mais un nombre sur deux :

Exemple 13

8 - 9 - 7 - 10 - 6 - 11 - 5 - 12 - …

Solution exemple 13

4 (Un nombre sur deux décroît de 1, un nombre sur deux augmente de 2. 5 – 1 = 4).

En ignorant la valeur des chiffres et en les considérant comme des symboles, on peut remarquer des aspects que l'ampleur numérique cachait. Comme par exemple qu'un seul des six chiffres change…

Exemple 14

6 421,12 - 6 521,12 - 6 621,12 - 6 721,12 - 6 821,12 - …

Solution exemple 14

6 921,12 (+ 100 à chaque fois).

Les lettres

Les séries avec des lettres appliquent des principes analogues aux chiffres : les lettres ne représentent quasiment jamais leur faculté de former des mots, mais uniquement leur rang alphabétique. Il est donc conseillé de procéder plus ou moins de la même manière qu'avec les chiffres.

Comme les séries comprennent souvent des écarts réguliers qui avancent ou qui reculent dans l'alphabet, il est fortement recommandé d'écrire l'alphabet entier sur une feuille de brouillon. En transcrivant une série sur le guide, le principe de la série en devient ainsi transparent.

Ceci :

Exemple 15

F - I - L - K - N - Q - P - … - …

devient ceci :

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Soit deux sauts en avant (+ 3 dans l'alphabet), suivi d'un saut en arrière (– 1 dans l'alphabet)

Solution exemple 15

S-V (P + 3 + 3 – 1 = S et S + 3 + 3 – 1 = V)

Les séries alpha-numériques

Les séries qui combinent lettres et chiffres sont la plupart du temps des séries doubles où une série numérique est imbriquée dans une série alphabétique.

Parfois il y a un lien entre les chiffres et les lettres, comme par exemple dans cet exemple célèbre (mais quasi introuvable si on ne connaît pas le truc) :

Exemple 16

U 2 - D 4 - T 5 - Q 6 - C 4 - ...

Solution exemple 16

S3 (L'initial des nombres en ordre croissant suivi du nombre de lettres qu'il faut pour les écrire : « Un » 2 lettres, « Deux » 4 lettres, « Trois » 5 lettres, etc.).

Autres séries

Les séries graphiques ou numériques ne se présentent pas toujours sous la forme d'une ligne droite. Elles peuvent être, comme ici, dans une grille et sans annoncer la couleur (s'agit-il d'une série, d'un ensemble… ?). Au problème de la série proprement dite s'ajoute aussi un problème de lecture, dans quel sens faut-il prendre ces divers nombres ?

Exemple 17

8	10	17	19
7	11	16	20
5	13	14	?

Solution exemple 17

22 (La série commence avec le 5, monte jusqu'au 8, puis redescend dans la colonne suivante, puis remonte et redescend une dernière fois. Les nombres augmentent alternativement de + 2 et + 1).

La série peut enfin se cacher dans une énigme, sans se déclarer :

Exemple 18

Si Marc est venu Lundi avec quatre noix, et que
Noémie est venue Mardi avec cinq kiwis,
qu'Olivier est venue Mercredi avec six pommes
et que Patricia est venue Jeudi avec sept bananes
et qu'enfin Quentin est venu Vendredi avec huit abricots…

Qui est venu le Samedi : Thomas, Robert, Suzanne, Régine ou Sébastien ?
Avec neuf : framboises, cerises, myrtilles, poires ou kakis ?

Solution exemple 18

Régine avec neuf myrtilles. Les noms viennent en ordre alphabétique avec alternativement garçons et filles. Les fruits ont une lettre de plus à chaque fois (autant que le nombre qui les précède, donc neuf myrtilles).

L'essentiel à retenir

Les séries graphiques

L'aspect permet souvent d'identifier le type de série :

- Figures quadrillées avec cases noires : déplacements;
- Carré ou cercle style horloge : déplacements circulaires;
- Petits dessins semblables : addition/soustraction d'objets;
- Quelques éléments disparates : transformation de formes, de couleurs, d'orientations.

Les Déplacements

- Dans les grilles : une case à la fois dans une direction donnée, généralement horizontale, verticale ou en diagonale.
  - Prolonger un mouvement pour vérifier sa validité.
  - Tenir compte des éléments fixes et des superpositions.
  - Les éléments qui sortent d'un côté réapparaissent au côté opposé.
- Dans les cercles : un même élément se déplace toujours de la même distance, le plus souvent de 45° ou 90°.

Les superpositions et les caches rendent certains déplacements « invisibles ».

Les Transformations

- Les nombres : un élément de plus, de moins, à chaque étape, une étape sur deux.
- Les couleurs : cycle de transformation qui se répète. Couleurs qui changent lors d'un déplacement.
- Les formes : changement de taille, renversement haut/bas ou gauche/droite.

Les séries complexes

Plusieurs séries sont présentées simultanément, mais, il n'est pas toujours nécessaire de tout examiner. Deux ou trois éléments bien analysés peuvent suffire à trouver la seule proposition valable.

Les séries numériques et alphabétiques

- Se fier en premier lieu à son instinct, surtout après un peu d'entraînement, c'est généralement la méthode la plus rapide.
- Si le problème résiste, vérifier qu'il ne s'agit pas d'une série qui emploie un système classique.
- Noter les écarts (avec les lettres comme avec les chiffres).
- Regarder la série comme s'il s'agissait d'une série graphique.
- Chercher éventuellement des séries connues : les nombres carrés, les nombres premiers, les mois de l'année (première lettre), les jours de la semaine …

Autres séries

N'oubliez pas que des questions en dehors de la section « séries » peuvent être basées sur ce principe.

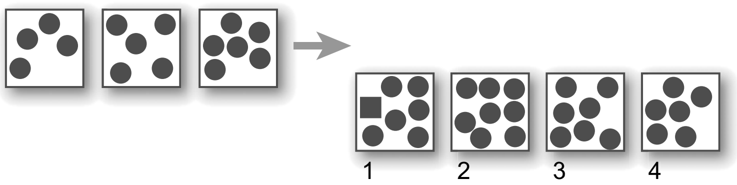
Exercices d'entraînement

Les séries graphiques

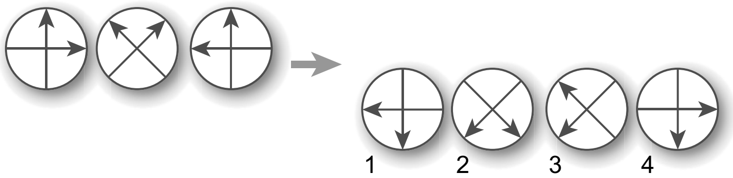
Une même consigne pour tous les tests suivants :
Quelle figure numérotée remplace la flèche dans la logique d'une série ?

Niveau 1

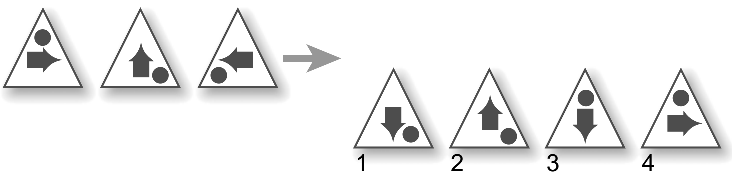
1



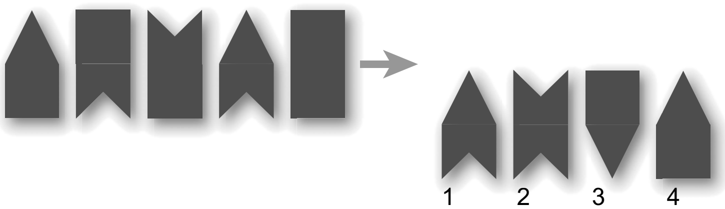
2



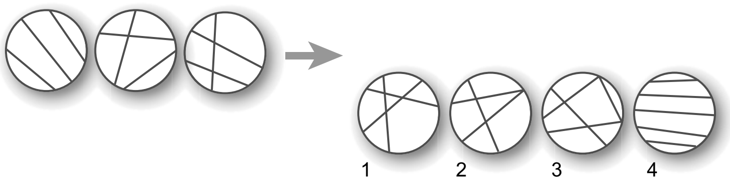
3



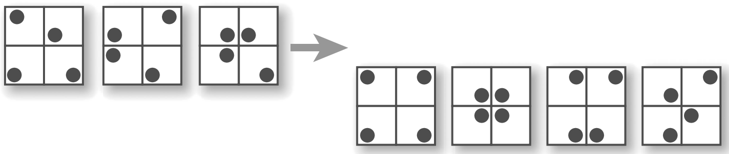
4



5

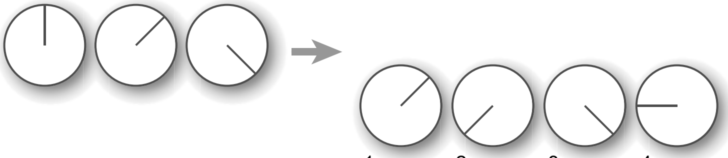


6



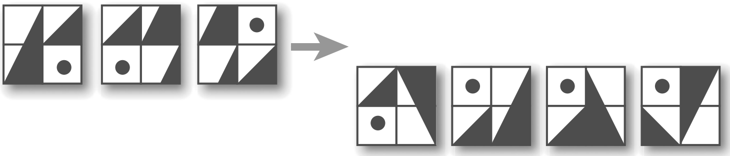
1 2 3 4

7



1 2 3 4

8



1 2 3 4

9

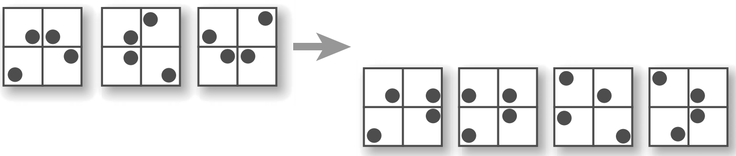
1	7	14	22
2	11	17	24
4	12	21	?

10 Le parcours du tour-operator passait d'un pays du globe à un autre, jugez un peu. Le départ se faisait en Chine, d'où on allait en Angola. Ensuite on visitait l'Islande puis le Cambodge et la Slovaquie, pour terminer avec un séjours au Bangladesh et…

en Biélorussie, au Kirghizistan, à Madagascar, en Ouzbékistan ou à La Trinité-et-Tobago ?

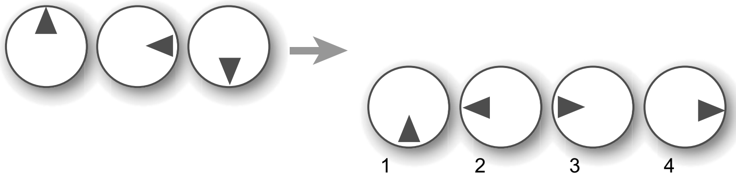
Niveau 2

11

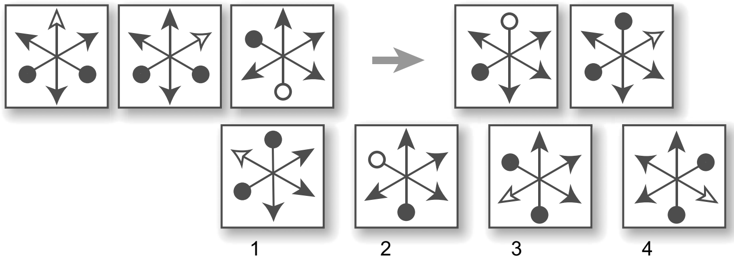


1 2 3 4

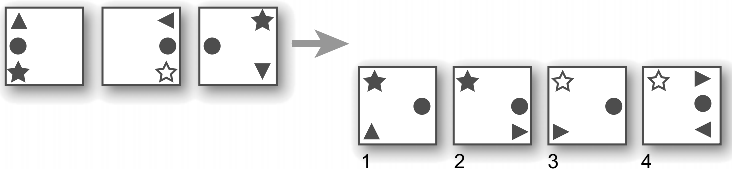
12



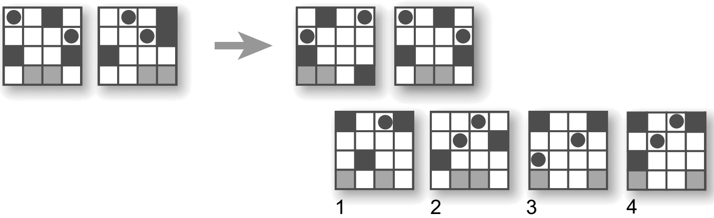
13



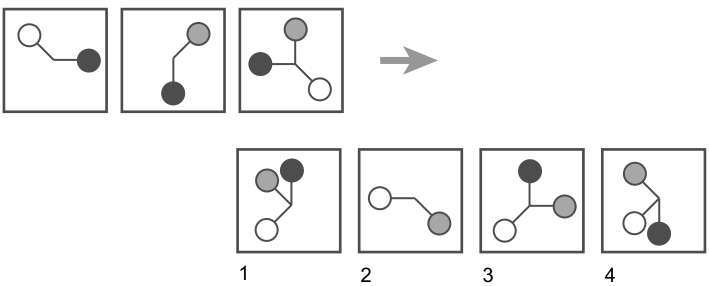
14



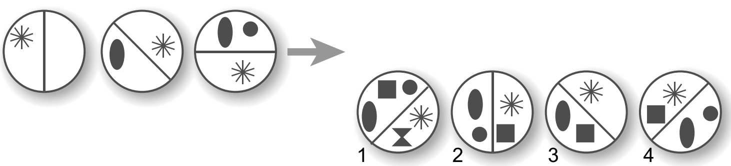
15



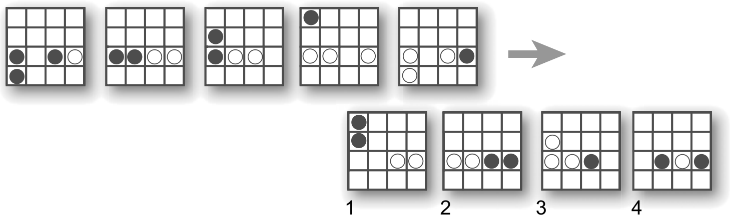
16



17



18



19

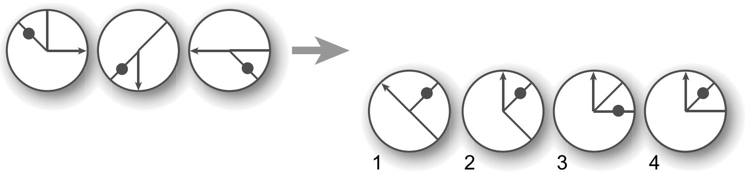
12	14	13	15
18	17	19	14
16	17	15	?

20 Après avoir visité les États-Unis, Pierre est allé au Népal et de là il est allé au Viet-Nam. Ensuite il a visité le Cameroun, Malte, les Comores, et la Hongrie, pour terminer son périple avec :

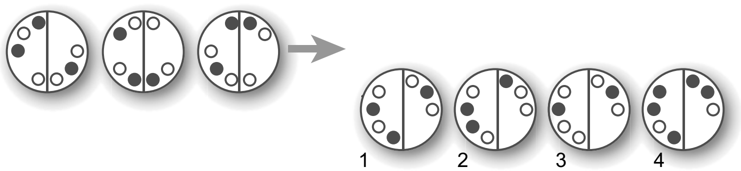
L'Australie, le Botsawana, la Bulgarie, la Norvège ou le Turkménistan ?

Niveau 3

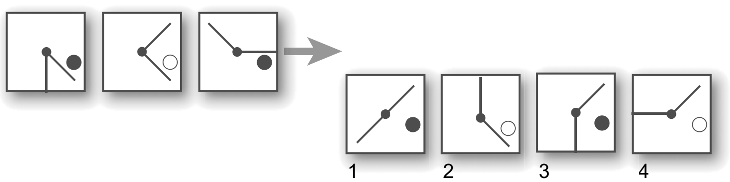
21



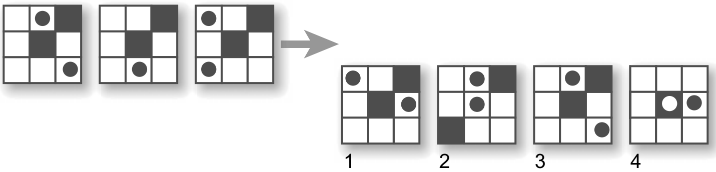
22



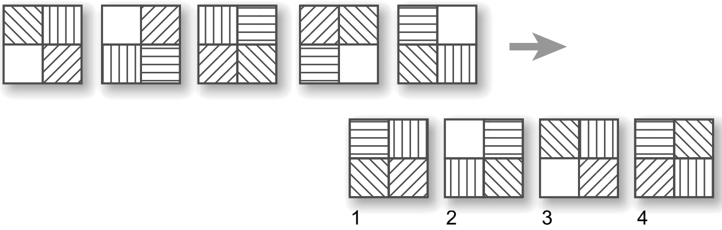
23



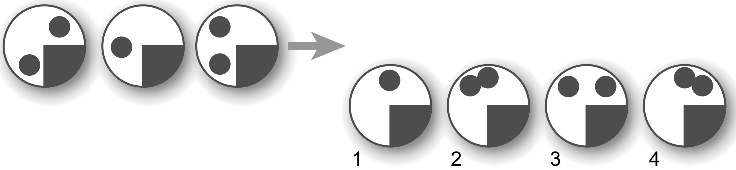
24



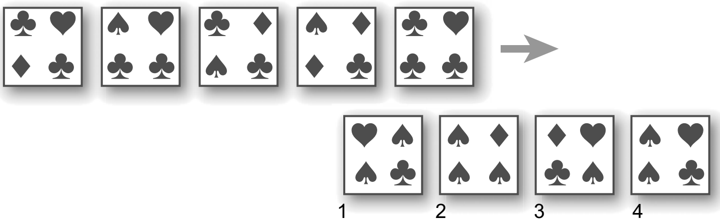
25



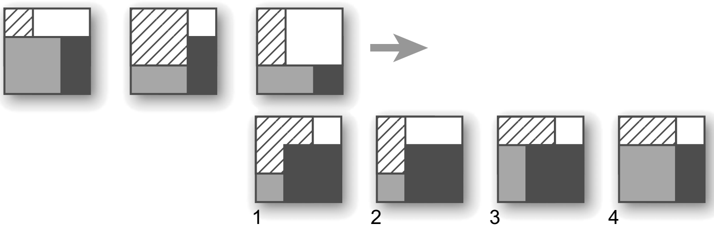
26



27



28



29

22	32	25	29
34	24	31	27
23	33	26	?

30 La première à être envoyée en mission fut Alaouia et elle resta 11 jours; vint ensuite Eugénie, qui elle resta 55 jours. Elle fut suivie par Rosalie qui resta 185 jours et Deborah qui resta 48 jours.

Parmi les candidates suivantes, laquelle fut envoyée ensuite et combien de jours resta-t-elle ?

Alberte, Aurélie, Cameron, Delphine, Shannon, Thérésa.

15, 45, 201, 314 ou 1 914 jours ?

Les séries alpha-numériques

Notez les lettres ou les chiffres qui s'inscrivent logiquement sur les pointillés.

Niveau 1

1 17 – 20 – 23 – 26 – 29 – 32 – ……….

2 57 – 55 – 53 – 51 – 49 – 47 – ……….

3 57 – 49 – 41 – 33 – 25 – 17 – ………

4 4 – 9 – ……… – 19 – 24 – 29 –

5 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – ………

6 3 – 2 – 4 – 3 – 6 – 5 – ……….

7 42 – 41 – 39 – 36 – 35 – 33 – ………

8 32 – 16 – 48 – 24 – 72 – 36 – ……….

9 5387 – 5588 – 5789 – 5990 – ……….

10 691 – 695 – ………. – 698 – 697 – 701 – 700

11 D – F – H – J – L – N – ……….

12	V – T – Q – O – L – J – ....
13	D – E – H – I – L – M – ....
14	C – F – ... – ... – K – N – O –
15	B – F – D – H – F – J – H – ....
16	A1 – E4 – I7 – .... – Q13 – U16 –
17	J – 10 – F – 6 – M – 13 – A – 1 – M – .... – ....
18	B – M – D – P – F – S – H – V – J – ....
19	A – H – .... – S – W –
20	7 5 7 7 7 9 8 1 8 3 ....

Niveau 2

21	38 – 43 – 48 – 53 – ....
22	70 – 63 – 56 – 49 – ....
23	6 – 7 – 9 – 12 – 16 – 21 – ....
24	1 – 5 – 3 – 7 – 5 – 9 – ....
25	17 – 34 – 31 – 62 – 59 – 118 – ....
26	5 – 10 – 13 – .... – 29 – 58 –

27	7 – 6 – 8 – 5 – 9 – 4 – ………
28	17 – 22 – 22 – 24 – 29 – 29 – 31 – 36 – ……….
29	232 – 116 – 124 – 62 – 70 – 35 – ……….
30	18 – 24 – 29 – 33 – 36 – 38 – ……….
31	Z – A – C – F – J – O – ………
32	E – D – C – H – ………. – F – K – J – I –
33	V – T – R – P – N – L – ………
34	C – D – G – H – K – L – O – ……….
35	D – E – G – J – N – S – ……….
36	ZA – DE – HI – NO – TU – ………
37	A – F – D – I – G – L – ………
38	– 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – ……….
39	………. – 52 – 104 – 100 – 103 – 206 – 202
40	9.42 – 11.25 – 13.08 – 14.51 – ……….

Niveau 3

41	9 – 10 – 13 – 18 – 25 – ……….
42	15 – 18 – 17 – 20 – 19 – 22 – ……….

43	1485 – 495 – 504 – 168 – 177 – 59 – ....
44	11 – 12 – 15 – 20 – 27 – 36 – ....
45	21 – 17 – 34 – 30 – 60 – 56 – ....
46	13 – 26 – .... – 56 – 58 – 116 – 118 –
47	8 – 16 – 11 – 22 – 17 – 34 – ....
48	644 – 322 – 320 – 160 – 158 – 79 – ....
49	4 – 5 – 7 – 10 – 11 – 13 – 16 – 17 – ....
50	2 – 2 – 4 – 12 – 12 – 24 – 72 – 72 – ....
51	G – J – I – J – K – J – M – J – ....
52	B – D – D – G – K – K – P – ....
53	M – N – L – O – K – P – J – ....
54	7 – 26 – 63 – 124 – 215 – ....
55	AZ – DW – GT – JQ – MN – PK – ....
56	JK – 21 – ML – 34 – NO – 65 – ....
57	B – F – J – P – V – ....
58	I I I V.......... V I I I X X I I
59	1A – 111A – 311A – 21131A – 3112131A – ....
60	10/15 – 10/55 – 11/45 – 12/45 – 13/55 – ....

Corrigés des exercices

Les séries graphiques

1 Réponse 3. Un rond de plus à chaque fois.

2 Réponse 3. La figure entière tourne de 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

3 Réponse 3. La flèche tourne de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le point passe d'un coin du triangle à l'autre dans le sens des aiguilles d'une montre.

4 Réponse 2. La partie supérieure de chaque figure répète la séquence : pointe – carré – flèche inversée, la partie inférieure alterne carré et flèche inversée.

5 Réponse 1. Chaque figure comprend toujours trois traits, est divisée en une section de plus et comprend une intersection de plus à chaque fois.

6 Réponse 3. Considérer chaque quart comme une série indépendante. En haut à gauche le point tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. En haut à droite : le point fait un va-et-vient entre 2 coins. En bas à gauche : le tour dans le sens des aiguilles d'une montre. En bas à droite : Va-et-vient horizontale.

7 Réponse 4. Cas relativement rare où la distance parcourue n'est pas constante. La barre tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, d'abord de 45°, puis de 90°, suit logiquement 135°.

8 Réponse 2. Les deux cases de gauche reprennent les deux cases de droite de la figure précédente mais en plaçant en haut celle du bas et inversement.

9 Réponse 27. La série s'inscrit en colonnes descendantes successives de gauche à droite. Les nombres se suivent en sautant 0 nombre, puis, 1, puis 2, puis 3 pour revenir à 0. 1 (–) 2 (3) 4 (5 6) 7 (8 9 10) 11 (–) 12 (13) 14 (15 16) 17 (18 19 20) 21 (–) 22 (23) 24 (25 26) 27.

10 Réponse Biélorussie. Chaque pays a une lettre de plus que le précédent et on alterne entre pays masculins et féminins, donc après LE Bangladesh, il faut un pays féminin de 11 lettres, soit la Biélorussie (et surtout pas Le Bélarus !).

11 Réponse 4. La figure entière tourne de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On cherche parfois quatre séries, l'une dans chaque quart, mais ici cela ne « fonctionne » pas.

12 Réponse 3. Le triangle tourne 90° autour de la figure dans le sens des aiguilles d'une montre, et de 90° en sens inverse sur lui-même.

13 Réponse 3. L'extrémité blanche avance à la suivante dans le sens des aiguilles d'une montre, d'une figure à l'autre. Une figure sur deux, le schéma entier tourne de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre. Le fait d'avoir à trouver un élément au centre d'une série ne change pas grand chose au raisonnement.

14 Réponse 3. Le triangle passe d'un coin à un autre dans le sens des aiguilles d'une montre, tout en tournant sur lui-même en sens inverse. Le rond fait des va-et-vient horizontaux. L'étoile tourne autour de la case en changeant de couleur une fois sur deux.

15 Réponse 4. Le rond et la case noire de la première rangée progressent vers la droite. Le rond deuxième rangé va vers la gauche. Le premier carré troisième rangé reste fixe, le deuxième carré va vers le haut. Rangée du bas les deux cases grises bougent vers la droite. La multiplicité des éléments ne doit pas vous inquiéter. Il suffit généralement d'en vérifier deux pour éliminer toutes les solutions sauf la bonne.

16 Réponse 1. Imaginer qu'il s'agit d'aiguilles d'une montre et quand elles sont superposées l'une cache l'autre. Blanc tourne 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Noir 90° dans le même sens. Gris 45° en sens inverse. Dans la première figure, gris est sous noir, dans la seconde blanc est sous gris.

17 Réponse 4. La barre tourne 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. À chaque étape un élément est ajouté alternativement d'un côté et de l'autre de cette barre.

18 Réponse 2. Un déplacement classique avec une particularité : les pastilles changent de couleur entre le moment où elles sortent et celui où elles rentrent. Il n'y a qu'une seule pastille qui monte dans la première colonne et trois qui progressent vers la gauche dans la troisième rangée.

19 Réponse 16. La série s'inscrit en colimaçon, tournant autour de la grille dans le sens des aiguilles d'une montre dans les cases extérieures, puis intérieures. La série est alternativement plus 2, moins 1 : 12 (+ 2) 14 (– 1) 13 (+ 2) 15 (– 1) 14 (+ 2) 16 (– 1) 15 etc.

20 Réponse La Bulgarie. Les pays que Pierre visite on un E dans leur nom qui progresse d'une place à chaque fois : États-Unis (1), Népal (2), Viet-Nam (3), Cameroun (4), Malte (5), Comores (6), Hongrie (7), Bulgarie (8).

21 Réponse 2. Flèche tourne 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Trait tourne 45° dans le même sens. Point tourne 90° en sens inverse.

22 Réponse 1. Les 7 ronds tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Chaque fois qu'un rond franchit la ligne verticale, il change de couleur. Les autres ronds demeurent inchangés.

23 Réponse 1.Une aiguille tourne de 90°, l'autre de 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Quand elles passent sur la pastille, elle change de couleur.

24 Réponse 3. Les cases noires sont fixes. La pastille du haut progresse vers la droite (masquée en 2). Celle du bas vers la gauche.

25 Réponse 3. On doit considérer les hachures comme un dessin normal, avec une orientation à respecter. Ici chaque carré suit toujours le même ordre en boucle : hachures verticales, diagonales, horizontales, diagonales, blanc.

26 Réponse 2. Une pastille tourne de 45°, l'autre de 90° (masquée dans la deuxième figure) toutes deux dans le sens des aiguilles d'une montre.

27 Réponse 4. Il s'agit de quatre séries, une dans chaque coin de la figure. En haut à gauche : trèfle/pique alterné, en haut à droite coeur/carreau alterné, chaque figure apparaissant deux fois de suite, en bas à gauche : carreau/trèfle/pique, en bas à droite que des trèfle. L'absence de séparations entre les séries prête à confusion : si on ne tombe pas sur le système donné, on peut perdre beaucoup de temps.

28 Réponse 2. Chaque couleur passe par les formes : grand carré, rectangle, rectangle, petit carré.

29 Réponse 30. La série s'inscrit en zig zag, descendant et montant les colonnes en progressant vers la droite. Les nombres sont augmentés et diminué alternativement d'une quantité qui diminue à chaque fois de 1. 22 (+12) 34 (– 11) 23 (+ 10) 33 (– 9) 24 etc. On peut également considérer qu'il y a deux séries, une case sur deux. L'une qui augmente de 1, l'autre qui diminue de 1.

30 Réponse Shannon, 1 914 jours. Le nom de chaque candidate contient une consonne de plus et une voyelle de moins que la précédente : Deborah = 4 consonnes et 3 voyelles. Il faut donc un nom avec 5 consonnes et 2 voyelles : seule Shannon fera l'affaire. Chacune reste le nombre de jours qui correspond à la place alphabétique de la première et dernière lettre du nom. Ainsi Alberte reste A = 1 E = 5 donc 15 jours, etc. Shannon, S = 19 et N = 14, donc 1 914 jours.

Les séries alpha-numériques

1 Réponse : 35 (+ 3) 17 (+ 3) 20 (+ 3) 23 (+ 3) 26 (+ 3) 29 (+ 3) 32 (+ 3) **35**

2 Réponse : 45 (– 2) 57 (– 2) 55 (– 2) 53 (– 2) 51 (– 2) 49 (– 2)47 (– 2) **45**

3 Réponse : 9 (– 8) 57 (– 8) 49 (– 8) 41 (– 8) 33 (– 8) 25 (– 8) 17 (– 8) **9**

4 Réponse : 14 (+ 5) 4 (+ 5) 9 (+ 5) **14** (+ 5) 19 (+ 5) 24 (+ 5) 29 (+ 5) 34

5 Réponse : 21 (+ 2) 9 (+ 2) 11 (+ 2) 13 (+ 2) 15 (+ 2) 17 (+ 2) 19 (+ 2) **21**

6 Réponse : 10 (–1, × 2) 3 (– 1) 2 (× 2) 4 (– 1) 3 (× 2) 6 (– 1) 5 (× 2) **10**

7 Réponse : 30 (– 1, – 2 – 3) 42 (–1) 41 (–2) 39 (–3) 36 (–1) 35 (–2) 33 (–3) **30**

8 Réponse : 108 (÷ 2, × 3) 32 (÷ 2) 16 (× 3) 48 (÷ 2) 24 (× 3) 72 (÷ 2) 36 (× 3) **108**

9 Réponse : 6 191 (+ 201) 5 387 (+201) 5 588 (+ 201) 5 789 (+ 201) 5 990 (+ 201) **6 191**

10 Réponse : 694 (+ 4, – 1) 691 (+ 4) 695 (– 1) **694** (+ 4) 698 (– 1) 697 (+ 4) 701 (– 1) 700

11	Réponse : P	(+ 2)	D (E) F (G) H (I) J (K) L (M) N (O) **P**
12	Réponse : G	(– 2, – 3)	V (U) T (SR) Q (P) O (NM) L (K) J (HI) **G**
13	Réponse : P	(+ 1, + 3)	D (+ 1) E (+ 3) H (+ 1) I (+ 3) L (+ 1) M (+ 3) **P**
14	Réponse : G-J	(+ 3, + 1)	C (+ 3) F (+ 1) **G** (+ 3) **J** (+ 1) K (+ 3) N (+ 1) O
15	Réponse : L	(+ 4, – 2)	B (CDE) F (E) D (EFG) H (G) F (GHI) J (I) H (IJK) **L**
16	Réponse : M10	(+ 4, + 3)	A1 (4/3) E4 (4/3) I7 (4/3) **M10** (4/3) Q13 (4/3) U16 (4/3) Y19
17	Réponse : 13J	Initiales des mois puis rang alphabétique de la 1re lettre (A-1, B-2 etc.) Janvier J10 – Février F6 – Mars M13 – Avril A1 – Mai M**13 – Juin**	
18	Réponse : Y	(+ 11, – 8, + 12, – 9, etc. ou plus simplement en prenant une lettre sur deux : d'une part +2, d'autre part + 3) B (C) D (E) F (G) H (I) J//M (NO) P (QR) S (TU) V (WX) **Y**	
19	Réponse : N	(+ 7, 6, 5…)	A (+ 7) H (+ 6) **N** (+ 5) S (+ 4) W (+ 3) Z
20	Réponse : 85	En les séparant nous trouvons les nombres impairs à partir de 75 : 75 – 77 – 79 – 81 – 83 – **85**	
21	Réponse : 58	(+ 5)	38 (+ 5) 43 (+ 5) 48 (+ 5) 53 (+ 5) **58**
22	Réponse : 42	(– 7)	70 (– 7) 63 (– 7) 56 (– 7) 49 (– 7) **42** (on remarquera les multiples de 7)
23	Réponse : 27	(1, + 2, + 3…)	6 (+ 1) 7 (+ 2) 9 (+ 3) 12 (+ 4) 16 (+ 5) 21 (+ 6) **27**
24	Réponse : 7	(+ 4, – 2)	1 (+ 4) 5 (– 2) 3 (+ 4) 7 (– 2) 5 (+ 4) 9 (– 2) **7**
25	Réponse : 115	(× 2, – 3)	17 (× 2) 34 (– 3) 31 (× 2) 62 (– 3) 59 (× 2) 118 (– 3) **115**
26	Réponse : 26	(× 2, + 3)	5 (× 2) 10 (+ 3) 13 (× 2) **26** (+ 3) 29 (× 2) 58
27	Réponse : 10	(– 1, + 2, – 3)	7 (– 1) 6 (+ 2) 8 (– 3) 5 (+ 4) 9 (– 5) 4 (+ 6) **10** (ou lire un nombre sur deux)
28	Réponse : 36	(+ 5, + 0, + 2)	17 (+ 5) 22 (+ 0) 22 (+ 2) 24 (+ 5) 29 (+ 0) 29 (+ 2) 31 (+ 5) 36 (+ 0) **36**
29	Réponse : 43	(÷ 2, + 8)	232 (÷ 2) 116 (+ 8) 124 (÷ 2) 62 (+ 8) 70 (÷ 2) 35 (+ 8) **43**
30	Réponse : 39	(+ 6, + 5, + 4…)	18 (+ 6) 24 (+ 5) 29 (+ 4) 33 (+ 3) 36 (+ 2) 38 (+ 1) **39**

31	Réponse : U	(+ 1, + 2, + 3…)	Z (+ 1) A (+ 2) C (+ 3) F (+ 4) J (+ 5) O (+ 6) **U** (Noter que l'alphabet se traite en boucle, après Z vient A).
32	Réponse : G	Groupes de 3 lettres consécutives en sens inverse EDC – H**G**F – KJI	
33	Réponse : J	(– 2)	V(– 2) T (– 2) R (– 2) P (– 2) N (– 2) L (– 2) **J**
34	Réponse : P	(+ 1, + 3)	CD (EF) GH (IJ) KL (MN) O**P**
35	Réponse : Y	(+ 1, + 2, + 3…)	D E (F) G (HI) J (KLM) N (OPQR) S (TUVWX) **Y**
36	Réponse : XY	Voyelle – 1 et voyelles (dans l'ordre) : ZA – DE – HI – NO – TU – **XY**	
37	Réponse : J	(+ 5, – 2)	A (+ 5) F (– 2) D (+ 5) I (– 2) G (+ 5) L (– 2) **J**
38	Réponse : 21	Chaque nombre représente la somme des deux précédents (série connue des mathématiciens sous le nom de « Suite de Fibonacci ») 0 – 1 (0 + 1 =) 1 (1 + 1 =) 2 (1 + 2=) 3 (2 + 3 =) 5 (3 + 5 =) 8 (5 + 8 =) 13 (8 +13 =) **21**	
39	Réponse : 49	(+ 3, × 2, – 4)	**49** (+ 3) 52 (× 2) 104 (– 4) 100 (+ 3) 103 (× 2) 206 (– 4) 202
40	Réponse : 16.34		Il s'agit d'heures et on ajoute 1h43 à chaque fois : 9.42 (+ 1 h 43) 11.25 (+ 1 h 43) 13.08 (+ 1 h 43) 14.51 (+ 1 h 43) **16 h 34**
41	Réponse : 34	(+ 1, + 3, + 5…)	9 (+ 1) 10 (+ 3) 13 (+ 5) 18 (+ 7) 25 (+ 9) **34**
42	Réponse : 21	(+ 3, – 1)	15 (+ 3) 18 (– 1) 17 (+ 3) 20 (– 1) 19 (+ 3) 22 (– 1) **21**
43	Réponse : 68	(÷ 3, + 9)	1485 (÷ 3) 495 (+ 9) 504 (÷ 3) 168 (+ 9) 177 (÷ 3) 59 (+ 9) **68**
44	Réponse : 47	(+ 1, + 3, + 5…)	11 (+ 1) 12 (+ 3) 15 (+ 5) 20 (+ 7) 27 (+ 9) 36 (+ 11) **47**
45	Réponse : 112	(– 4, × 2)	… 34 (– 4) 30 (× 2) 60 (– 4) 56 (× 2) **112**
46	Réponse : 28	(× 2, + 2)	13 (× 2) 26 (+ 2) **28** (× 2) 56 (+ 2) 58 (× 2) 116 (+ 2) 118
47	Réponse : 29	(× 2, – 5)	8 (× 2) 16 (– 5) 11 (× 2) 22 (– 5) 17 (× 2) 34 (– 5) **29**
48	Réponse : 77	(÷ 2, – 2)	644 (÷ 2) 322 (– 2) 320 (÷ 2) 160 (– 2) 158 (÷ 2) 79 (– 2) **77**
49	Réponse : 19	(+ 1, + 2, + 3)	4 (+ 1) 5 (+ 2) 7 (+ 3) 10 (+ 1) 11 (+ 2) 13 (+ 3) 16 (+ 1) 17 (+ 2) **19**

50 Réponse : 144 (× 1, × 2, × 3) 2 (× 1) 2 (× 2) 4 (× 3) 12 (× 1) 12 (× 2) 24 (× 3) 72 (× 1) 72 (× 2) **144**

51 Réponse : O On saute une lettre à chaque fois, puis on intercale un J entre chaque lettre : G (H) (J) I (J) (J) K (L) (J) M (N) (J) **O**

52 Réponse : V (+ 1, + 2, + 3 et une lettre sur deux est répétée) B (C) DD (EF) G (HIJ) KK (LMNO) P (QRSTU) **V**

53 Réponse : Q (+ 1, – 2, + 3, – 4…) M (+ 1) N (– 2) L (+ 3) O (– 4) K (+ 5) P (– 6) J (+ 7) **Q** (Ou lire une lettre sur deux)

54 Réponse : 342 (Cubes – 1) 2^3 (8 – 1 =) 7 – 3^3 (27 – 1 =)26 – 4^3 (64 – 1 =) 63 – 5^3 (125 – 1 =)124 – 6^3 (216 – 1 =) 215 – 7^3 (343 – 1 =) **342**

55 Réponse : SH

(1res lettres de chaque paire + 3, 2^e lettre – 3),

A (BC) D (EF) G (HI) J (KL) M (NO) P(QR) **S**

Z (YX) W (VU) T (SR) Q (PO) N (ML) K (JI) **H**

56 Réponse : QP (lettres et chiffres en sens alternés) JK (→) – 21 (→) – ML (→) – 34 (→) – NO (→) – 65 (→) – **QP**

57 Réponse : Z (Voyelles + 1) (a)B – (e)F – (i)J – (o)P – (u)V – (y)**Z**

58 Réponse : VI (Les nombres pairs en chiffres romains) I I – I V – **V I** – V I I I – X – X I I – XIV

59 Réponse : 4112231A (Description numérique du lot précédent)

1A – 111A (soit dans le lot précédent il y a un 1 et un A) – 311A(soit trois 1 et un A) – 21131A (soit deux 1, un 3 et un A) etc Les chiffres sont toujours pris selon leur valeur croissante.

60 Réponse : 15/15 La présentation est trompeuse : il ne s'agit pas de fractions mais d'heures. On ajoute 40 minutes, puis 10 minutes supplémentaires à chaque fois : 10 h 15 (+ 40 min) 10 h 55 (+ 50 min) 11 h 45 (+ 60 min) 12 h 45 (+ 70 min) 13 h 55 (+ 80 min) **15 h 15**.

Les ensembles et les intrus 2

Les questions d'ensembles font appel à des raisonnements proches de ceux des séries, mais la démarche est néanmoins assez différente. Dans une série, des objets semblables se transforment subtilement et il faut trouver ce qui change, pourquoi et comment. Dans une question d'ensembles, nous avons au contraire des objets disparates et il faut trouver leur(s) point(s) commun(s).

On peut regrouper les questions d'ensemble en deux grandes catégories : les ensembles à compléter et les ensembles dont il faut exclure un intrus. Dans un cas comme dans l'autre il faut, par observation et raisonnement, trouver les limites de l'ensemble pour qu'il comprenne tous les éléments voulus, mais aucun de ceux qui en sont exclus.

Voici un exemple simple pour illustrer le propos.

> Exemple
>
> Quel mot numéroté peut-on ajouter logiquement à l'ensemble suivant :
>
> pomme, poire, papaye, prune, pêche ?
>
> 1. perroquet 2. fraise 3. fruits 4. poireau

Il faut, bien entendu, choisir fraise, qui comme les autres mots de l'ensemble est un fruit. L'exemple simple rend la réponse évidente, mais il servira à montrer des erreurs à ne pas commettre. Le choix « perroquet » selon la logique que tous les mots commencent par P est techniquement valable, mais ne sera pas validé pour autant. **La solution la plus simple et la plus évidente a toujours priorité sur des raisonnements plus complexes**. La réponse « fruits » ne serait valable que si la question posée était : « Quel mot regroupe (ou définit) les mots de l'ensemble suivant ? ». La réponse « poireau », avec le raisonnement que tous les mots sont des plantes, comme l'est poireau, ne serait valable que si le choix « fraise » n'était pas donné**. La définition la plus précise de l'ensemble aura priorité sur une définition plus large**. La définition de l'ensemble devra être valable uniquement pour la réponse donnée mais aucune autre.

On peut appliquer les mêmes règles quand il faut exclure un élément d'un ensemble :

Exemple

Quel est le mot intrus dans l'ensemble suivant ?

1. pomme 2. poire 3. plante 4. fraise 5. poireau

Ici, il faut exclure « plante » qui justement n'est pas une plante, mais le nom d'une catégorie. Comme avant, la réponse « fraise » (mot qui ne commence pas par P) n'est pas valable dans la mesure où des ensembles plus évidents existent. « Poireau » (le seul qui n'est pas un fruit) ne serait valable que si le mot « plante » ne faisait pas partie de la liste. **Tous les éléments retenus doivent correspondre à la définition trouvée de l'ensemble** (ici tous des végétaux)

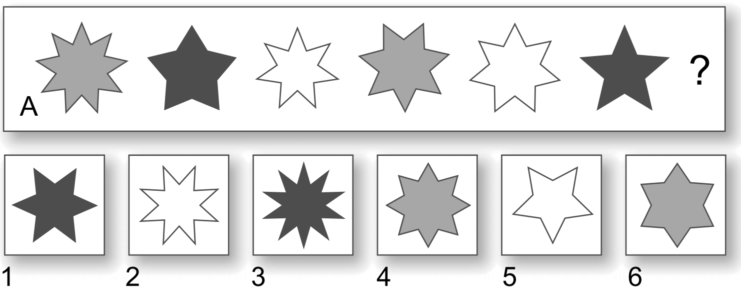
Qu'il s'agisse de mots, de nombres ou d'éléments graphiques, qu'il s'agisse d'inclure ou d'exclure, pour trouver la bonne réponse dans ces questions il faut toujours définir les limites d'un ensemble de la façon la plus simple et la plus précise.

Les exercices graphiques

Les ensembles à compléter

Exemple 1

Quelle figure peut s'intégrer logiquement à l'ensemble A ?



Pour trouver la solution, il faut chercher un point commun qui s'applique à toutes les figures de l'encadré A, mais seulement à une des figures numérotées au-dessous. Une catégorie très large, du style « étoiles », ne peut s'appliquer puisqu'elle englobe également toutes les figures numérotées. Une catégorie trop étroite : ensemble où les étoiles avec 5 branches sont noires, avec 7 branches sont blanches et avec 9 branches sont grises, est trop complexe et d'ailleurs ne fonctionne pas non plus car la deuxième étoile grise de l'encadré n'a pas

9 branches. On peut également examiner les figures numérotées pour chercher celle qui se distingue et qui pourrait intégrer l'ensemble. On remarque finalement que la distinction paire/impaire fournit la solution…

Solution exemple 1

Figure 5. L'ensemble A ne comprend que des étoiles avec un nombre impair de branches. La seule figure au-dessous qui partage cet aspect et qui peut donc s'intégrer à l'ensemble est la nº 5.

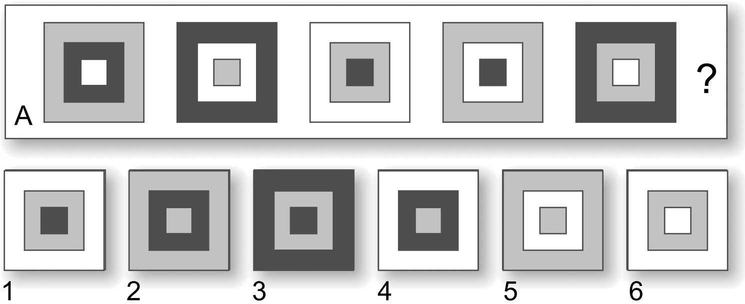
Les questions de ce style peuvent prendre bien des aspects différents, mais certaines démarches logiques reviennent régulièrement et l'entraînement pour un type de question pourra s'appliquer à un autre légèrement différent.

> Notez la formulation de l'énoncé. Ici, on comprend que l'encadré A constitue un ensemble et qu'une seule des figures au-dessous a les mêmes caractéristiques. La question aurait pu être formulée au pluriel et dans ce cas, il est possible (mais pas obligatoire) qu'il y ait plus d'une figure numérotée qui répondent à la question.

Une variante de cet énoncé implique un raisonnement quelque peu différent :

Exemple 2

Quelle figure complète logiquement l'ensemble A ?



« Complète » l'ensemble. Il s'agit donc d'un ensemble avec un nombre défini d'éléments, mais avec un et un seul qui manque. Le principe de ce genre d'ensemble est presque toujours celui des combinaisons de divers éléments. Traduit en lettres, c'est le principe de toutes les permutations possibles de ABC (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA). En forme graphique, la solution est moins évidente. Dans l'exemple ci-dessus, on remarquera que chaque figure est formée de trois éléments (intérieur, milieu, extérieur) et qu'il y a trois couleurs (gris, noir, blanc)…

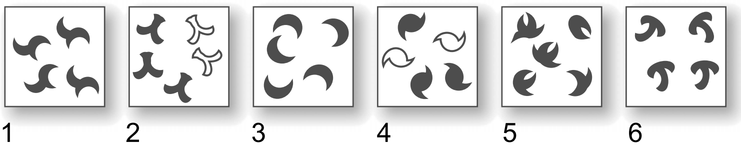
Solution exemple 2

Figure 4. L'ensemble A comprend des dessins où les couleurs du centre, du milieu et de l'extérieur sont présentées avec toutes les combinaisons possibles avec les couleurs noire, grise et blanche. Manque la dernière combinaison : gris au centre, noir au milieu et blanc à l'extérieur, n° 4.

Les intrus à trouver

Exemple 3

Quelle est la figure intruse dans cet ensemble ?



Pour répondre à cette question, il faut définir un ensemble qui couvre toutes les figures sauf une, l'intrus. Si la solution ne saute pas aux yeux, il faut procéder systématiquement en considérant divers aspects des dessins : le nombre de dessins dans la figure n'en exclut pas une seule (1 et 6 en ont 4, les autres 5) ; la couleur des figures ne marche pas non plus (2 et 5 ont deux formes blanches) ; de même, l'orientation ou la disposition des dessins ne semblent suivre aucune règle. Il va falloir considérer les formes dans chaque figure pour trouver une seule figure qui se distingue…

Solution exemple 3

Figure 5. Chaque figure contient des dessins identiques, mais avec des orientations différentes, sauf la n° 5 où les formes sont différentes.

Dans les questions d'intrus de ce genre, il faut être attentif à divers aspect des figures tels que :

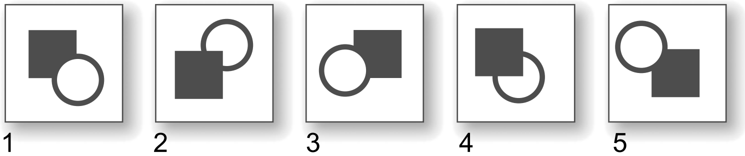
- **Les formes :** identiques, diverses, associées à un nombre, une couleur, contiennent des courbes, des angles droits, ont toujours le même nombre de côtés.
- **L'orientation :** les dessins ont plusieurs/toujours la même orientation. La position dans la case.

- **Les quantités :** nombres d'objets identiques, pairs/impairs, un nombre associé à une forme et un nombre différent à une autre, nombre associé à une couleur.
- **Les positions relatives des objets :** ils se touchent, se superposent, se cachent, se trouvent l'un dans l'autre.
- **Les couleurs :** elles sont uniques, se côtoient de certaines façons sont associées à certaines formes.
- **Les ensembles connus :** mois, semaines, chiffres romains, signes du zodiaque.

Une variante :

Exemple 4

Trouvez les deux intrus :



Le fait de devoir trouver deux intrus ne change pas grand-chose au raisonnement, mais permet souvent d'éliminer les solutions multiples ou ambiguës. Ces questions sont souvent, comme celle-ci, relativement faciles.

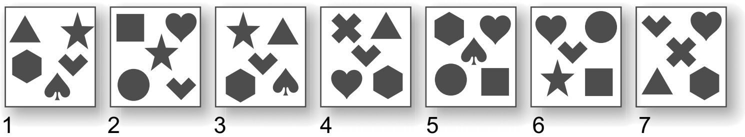
Solution exemple 4

Figures 2 et 4. Le rond recouvre le carré, sauf dans les deux intrus 2 et 4 ou c'est l'inverse avec le carré qui recouvre le rond.

L'exemple 5 propose un raisonnement légèrement différent avec cette question apparemment classique.

Exemple 5

Trouvez la figure intruse :



Rien dans le dessin ou l'énoncé ne l'indique, mais ici, il ne s'agit pas de trouver l'ensemble qui recouvre toutes les figures sauf une, mais de trouver une paire à chaque figure sauf une, l'intruse. Même une fois que l'on sait ceci, il faut trouver la façon dont les paires sont formées et ensuite procéder avec rigueur et gérer tous ces symboles sans se tromper. Si le règlement l'autorise, il est recommandé de barrer ou de surligner pour accompagner le raisonnement.

> N'oubliez pas, ici comme avec les autres questions, qu'il vaut mieux ne pas s'éterniser sur une question. Si le processus pour trouver la solution s'annonce comme étant particulièrement lent et laborieux, il vaut mieux passer à la suite, quitte à y revenir plus tard.

Solution exemple 5

Figure 5. Les figures 1 et 3 contiennent les mêmes formes, tout comme 2 et 6 et 4 et 7. Reste 5, l'intrus avec un groupe de formes uniques.

Les ensembles et les intrus en texte

Les ensembles à compléter

En mode texte, les ensembles à compléter fonctionnent sur le même principe, en s'appuyant soit sur le sens des mots, soit sur leur structure. Certaines questions sont plus proches de l'exercice de vocabulaire ou du questionnaire de culture générale que de la logique proprement dite. Ici on considère le mot pour sa signification.

Exemple 6

Lequel des mots donnés peut-on ajouter à cette liste ?

pertinent – judicieux – approprié – propice

1. effronté **2.** opportun **3.** juridique **4.** bienséant

Exemple 7

avocat – grenade – citron – prune

1. fugue **2.** mûre **3.** amende **4.** coin

D'autres questions demandent au candidat de chercher un point commun parmi des objets connus :

Exemple 8

écureuil – chamois – guépard – gorille

1. dauphin **2.** caméléon **3.** belette **4.** hérisson

La plupart de ces questions, dans les concours qui nous intéressent tout du moins, demandent d'examiner la forme des mots, plus précisément, les lettres qui les composent (nombre, position alphabétique, consonnes voyelles).

Exemple 9

quartier – banc – maçon – faubourg

1. parloir **2.** serpent **3.** lion **4.** canif

Exemple 10

abattu – émettra – inattendu – ultraviolette

1. assiette **2.** confetti **3.** ottoman **4.** égoutter

Exemple 11

SUCCOR – PULTIE – COSUI – RIIS

1. FLUER **2.** OSER **3.** GITE **4.** EPELAT

On retrouve le même principe avec les chiffres :

Exemple 12

Lequel des nombres donnés peut-on ajouter à cette liste ?

55 – 132 – 154 – 22

1. 21 **2.** 5545 **3.** 123 **4.** 451

Solutions exemples 6 à 12

Exemple 6 : réponse 2. « Opportun » mot à la signification proche de ceux de la liste.

Exemple 7 : réponse 2. « Mûre » seul fruit, comme le sont tous les mots de la liste (il ne fallait pas confondre « fugue » et « figue », « amende » et « amande », et « coin » et « coing » !).

Exemple 8 : réponse 3. « Belette » animal à poils comme les autres.

Exemple 9 : réponse 2. Mot dont la première lettre et la dernière lettre se suivent dans l'alphabet.

Exemple 10 : réponse 1. Mot qui commence et se termine avec une voyelle et qui contient deux T à la suite.

Exemple 11 : réponse 2. Tous des anagrammes de noms de fleurs : Crocus, tulipe, souci, iris. = rose (1 fleur, 2 tige, 3 pétale).

Exemple 12 : réponse 4. Tous des nombres divisibles par 11.

Les intrus à trouver

Les mêmes principes peuvent être utilisés dans des exercices d'intrus, avec les mots ou les chiffres.

Exemple 13

Quel mot faut-il écarter dans chacune de ces listes ?

aigle – paon – goujon – canard – mouette

futur – imparfait – passé – subjonctif – présent

avocat – pharmacien – charpentier – bachelier – acteur

allitération – avenant – assertion – accord – attente

Solution exemple 13

- Le goujon est le seul qui n'est pas un oiseau.
- Le subjonctif est un mode, tous les autres sont des temps.
- Bachelier n'est pas une profession.
- Tous les mots commencent par un A suivi d'une lettre doublée, sauf avenant.

Les intrus numériques, basés sur le même principe, sont parfois à l'origine de contestations, car des solutions alternatives paraissent aussi valables que celles données.

Exemple 14

Trouvez les intrus dans les ensembles suivants :

13 – 22 – 47 – 60 – 8

63 – 96 – 32 – 24 – 18

767 – 77 – 66 – 676 – 716

Solution

- 8 n'est pas un nombre à deux chiffres.
- 32 n'est pas un multiple de trois.
- 716 n'est pas un nombre formé uniquement avec des 6 et des 7.

L'essentiel à retenir

Définir l'ensemble pour qu'il inclue tous les éléments concernés mais aucun des éléments exclus.

Dans les exercices graphiques :

Cherchez des points communs dans :
- Les formes;
- L'orientation;
- Les quantités;
- Les positions relatives des objets;
- Les couleurs;
- Les ensembles connus.

Dans les exercices en texte :

Avec les mots, cherchez des points communs dans :
- La signification;
- Un aspect ou qualité partagés;
- La répartition des lettres;
- Le nombre de lettres ou de consonnes et voyelles;
- Les anagrammes.

Avec les chiffres, cherchez les points communs dans :
- Des multiples;
- Des nombres carrés/cubes/premiers;
- Ces mêmes nombres, mais camouflés;
- Somme/différence des chiffres;
- Chiffres récurrents.

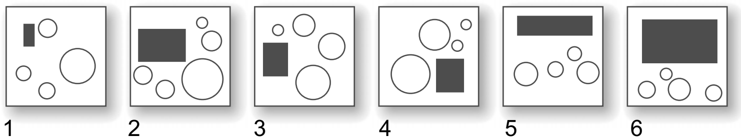
S'il y a ambiguïté, cherchez l'ensemble le plus large, le plus évident.

Exercices d'entraînement

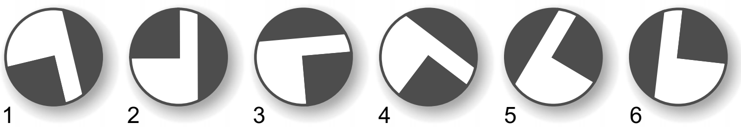
Les ensembles et les intrus

Niveau 1

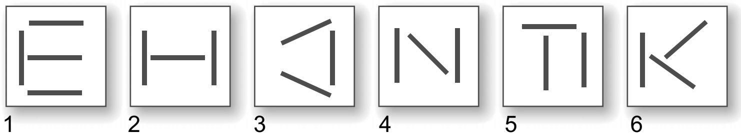
1 Trouvez l'intrus.



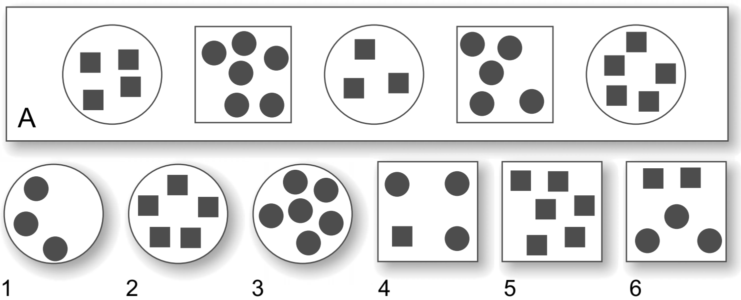
2 Trouvez l'intrus.



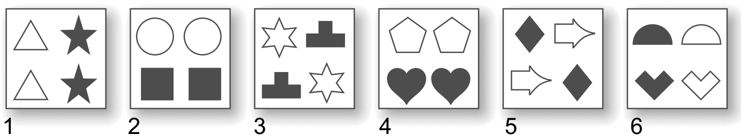
3 Trouvez l'intrus.



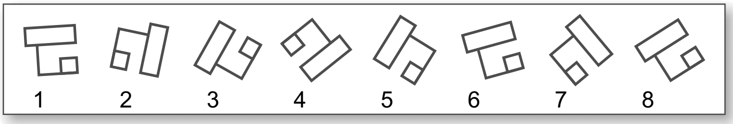
4 Quelle figure numérotée s'intègre logiquement dans l'ensemble A ?



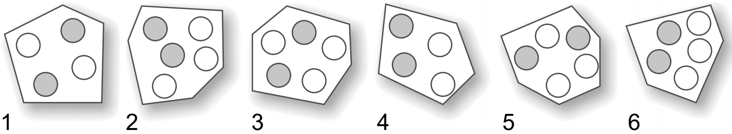
5 Trouvez l'intrus.



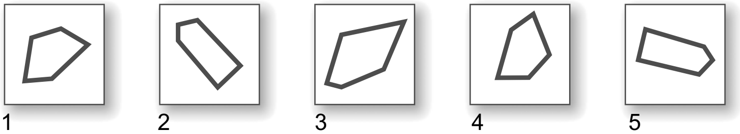
6 Trouvez l'intrus



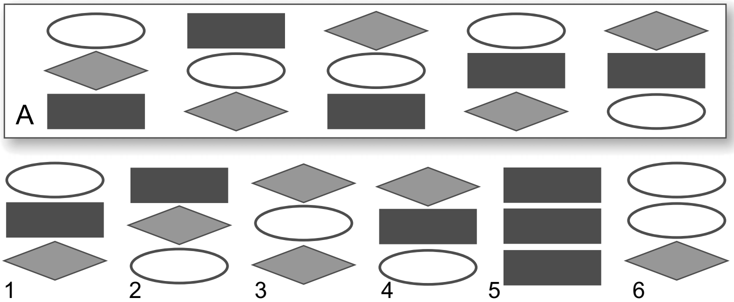
7 Trouvez l'intrus.



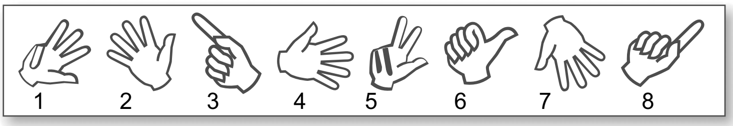
8 Trouvez l'intrus.



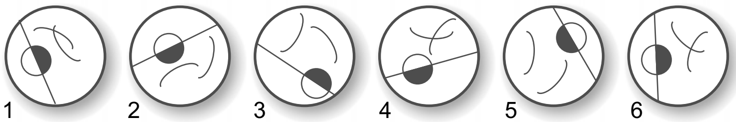
9 Quelle figure numérotée complète logiquement l'ensemble A ?



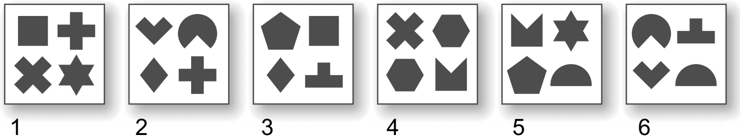
10 Trouvez l'intrus.



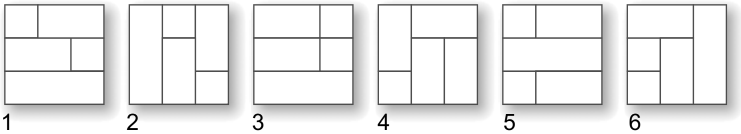
11 Trouvez l'intrus.



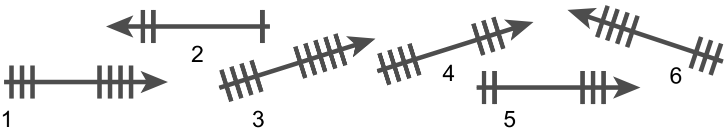
12 Trouvez l'intrus.



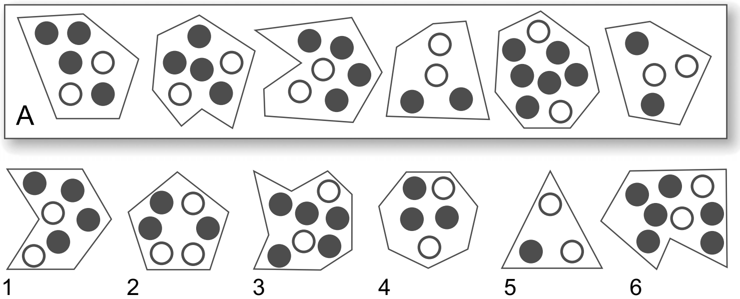
13 Trouvez l'intrus.



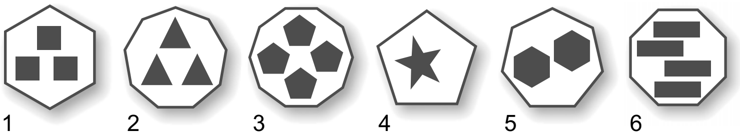
14 Trouvez l'intrus.



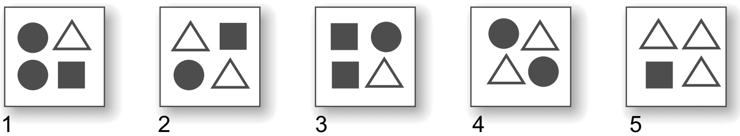
15 Quelle figure numérotée s'intègre logiquement dans l'ensemble A ?



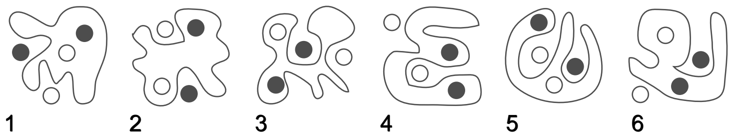
16 Trouvez les deux intrus.



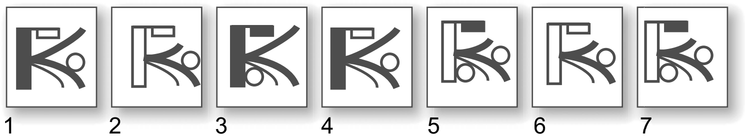
17 Trouvez les deux intrus.



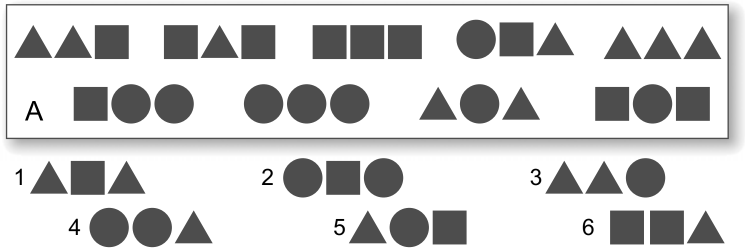
18 Trouvez l'intrus.



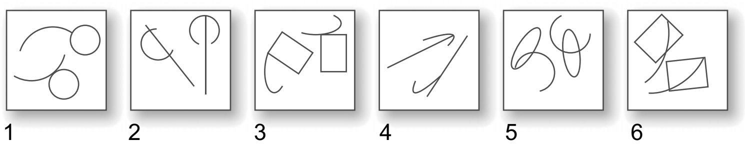
19 Trouvez l'intrus.



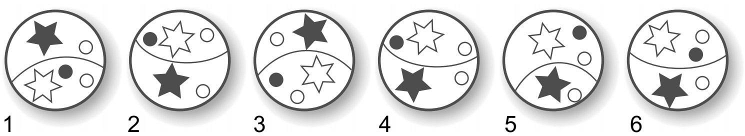
20 Quelle figure numérotée complète logiquement l'ensemble A ?



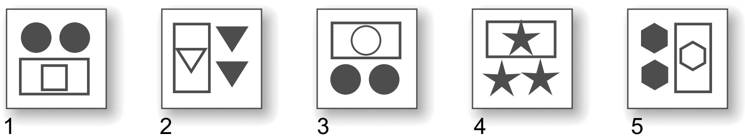
21 Trouvez l'intrus.



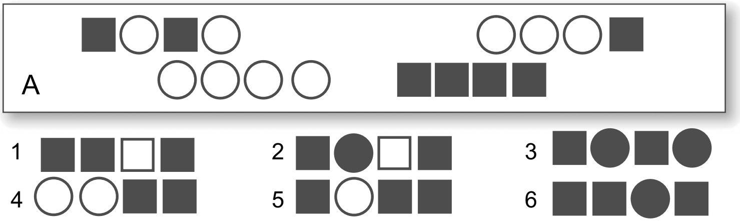
22 Trouvez l'intrus.



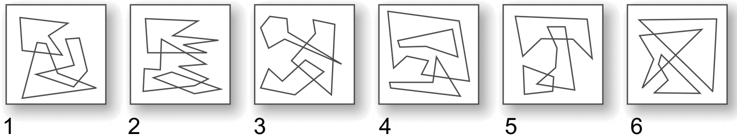
23 Trouvez les deux intrus.



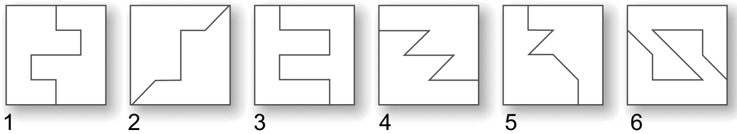
24 Quelle figure complète logiquement l'ensemble A ?



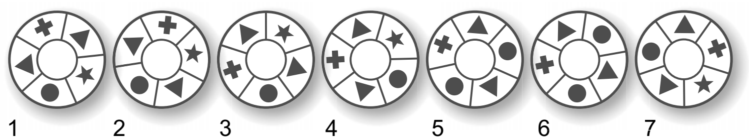
25 Trouvez l'intrus.



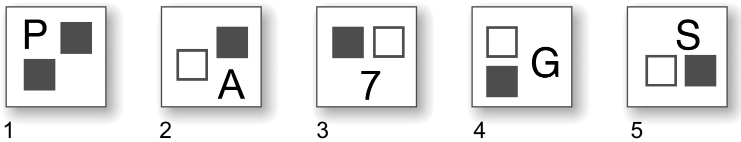
26 Trouvez l'intrus.



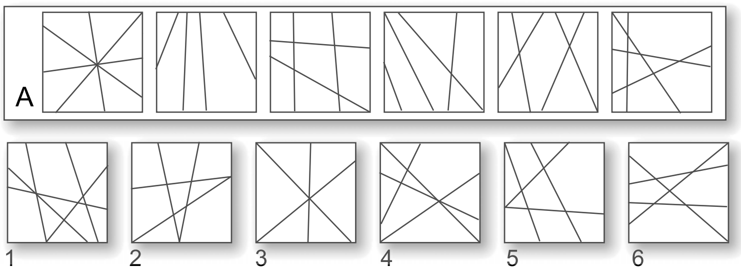
27 Trouvez l'intrus.



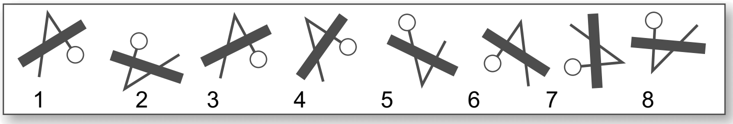
28 Trouvez l'intrus.



29 Quelle figure numérotée complète logiquement l'ensemble A ?



30 Trouvez l'intrus.



Intrus non-graphiques

Trouvez l'intrus :

31 ❐ **A.** foie ❐ **B.** artère ❐ **C.** veine ❐ **D.** vaisseau ❐ **E.** cœur

32 ❐ **A.** tennis ❐ **B.** billard ❐ **C.** pétanque ❐ **D.** polo ❐ **E.** ski

33 ❐ **A.** radis ❐ **B.** carotte ❐ **C.** navet ❐ **D.** oignon ❐ **E.** betterave

34 ❐ **A.** cousin ❐ **B.** frère ❐ **C.** oncle ❐ **D.** neveu ❐ **E.** parrain

35 ❐ **A.** neige ❐ **B.** bruine ❐ **C.** verglas ❐ **D.** grêle ❐ **E.** pluie

36 ❐ **A.** cuivre ❐ **B.** fer ❐ **C.** étain ❐ **D.** bronze ❐ **E.** aluminium

37 ❐ **A.** empereur ❐ **B.** archevêque ❐ **C.** marquis ❐ **D.** archiduc ❐ **E.** comte

38 ❐ **A.** beurre ❐ **B.** huile ❐ **C.** lait ❐ **D.** essence ❐ **E.** grenadine

39 ❐ **A.** procédure ❐ **B.** requête ❐ **C.** huissier ❐ **D.** procès ❐ **E.** assignation

40 ❐ **A.** longue-vue ❐ **B.** microscope ❐ **C.** besicles ❐ **D.** télescope ❐ **E.** monocle

41 ❐ **A.** hectare ❐ **B.** décilitre ❐ **C.** micron ❐ **D.** calorimètre ❐ **E.** tonne

42 ❐ **A.** voûte ❐ **B.** clocher ❐ **C.** coupole ❐ **D.** plafond ❐ **E.** dôme

43 ❐ **A.** violon ❐ **B.** flûte ❐ **C.** orgue ❐ **D.** cornemuse ❐ **E.** accordéon

44 ❐ **A.** sénateur ❐ **B.** député ❐ **C.** candidat ❐ **D.** parlementaire ❐ **E.** élu

45 ❐ **A.** 25 ❐ **B.** 86 ❐ **C.** 34 ❐ **D.** 18 ❐ **E.** 92

46 ❐ **A.** 345 ❐ **B.** 9 ❐ **C.** 78 ❐ **D.** 552 ❐ **E.** 56

47	❒ **A.** 32	❒ **B.** 87	❒ **C.** 46	❒ **D.** 21	❒ **E.** 54
48	❒ **A.** 145	❒ **B.** 369	❒ **C.** 189	❒ **D.** 283	❒ **E.** 437
49	❒ **A.** 275	❒ **B.** 366	❒ **C.** 146	❒ **D.** 891	❒ **E.** 684
50	❒ **A.** 43	❒ **B.** 17	❒ **C.** 89	❒ **D.** 63	❒ **E.** 56

Corrigés des exercices

Les ensembles et les intrus

1 Réponse : 2. Toutes les cases ont 4 ronds blancs et un rectangle. La n° 2 a un rond en plus.

2 Réponse : 2. Toutes les figures sont des rotations d'une même figure. La n° 2 est le renversement de cette même forme.

3 Réponse : 1. Il y a 4 traits dans la première figure et trois dans toutes les autres. Les figures qui évoquent des lettres peuvent être trompeuses.

4 Réponse : 2. L'ensemble A est constitué de figures rondes qui contiennent des carrés et de figures carrées qui contiennent des ronds. Seul 2 correspond à ce critère.

5 Réponse : 6. Chaque figure contient 2 figures identiques blanches et deux figures identiques noires. En 6 les deux noires et les deux blanches sont différentes.

6 Réponse : 5. Tous des rotations d'une même figure sauf 5 qui est un renversement.

7 Réponse : 6. Chaque figure contient un rond de moins que la figure n'a de côtés, sauf 6 qui a autant de ronds que de côtés.

8 Réponse : 3. 1 et 4 d'une part et 2 et 5 d'autre part, sont identiques mais avec une orientation différente. 3 ne ressemble à aucune autre figure.

9 Réponse : 2. L'ensemble contient les formes rectangle – losange – ovale, dans tous les ordres, sauf, en partant du bas ovale-losange-rectangle. Ordre que l'on retrouve dans la figure 2.

10 Réponse : 4. Tous sont des mains droites sauf 4 qui est une main gauche.

11 Réponse : 4. Le cercle bicolore a toujours la moitié sombre du côté de la partie la plus grande du cercle. En 4, c'est l'inverse.

12 Réponse : 4. Quatre formes différentes par figures, sauf la 4 qui contient deux figures identiques.

13 Réponse : 4. Toutes les cases comprennent 1 grand rectangle, 2 rectangles moyens et 2 carrés. La 4 contient quatre rectangles moyens et 1 carré.

14 Réponse : 4. Chaque flèche a un trait de plus à l'avant qu'à l'arrière, sauf la 4 ou c'est l'inverse.

15 Réponse : 3. Dans l'ensemble A, toutes les figures contiennent soit un rond de plus soit un rond de moins qu'elles n'ont de côtés. Elles ont, par ailleurs toujours deux ronds blancs. Seul 3 correspond à toutes ces conditions.

16 Réponse : 2 et 5. Le nombre de côtés de la forme extérieure représente la moitié du nombre de côtés de toutes les formes qu'elle contient, sauf 2 qui a 12 côtés dedans et 9 dehors et 5 qui a 7 côtés, mais contient des formes ayant au total 12 côtés au lieu de 14.

17 Réponse : 4 et 5. Ces figures ne contiennent que deux formes différentes, les autres contiennent trois formes différentes.

18 Réponse : 4. Chaque forme contient une pastille blanche et une noire, la n° 4 en contient deux noires.

19 Réponse : 3. N° 1 et 4 sont identiques, comme le sont 2 et 6, et 5 et 7. N° 3 est unique.

20 Réponse : 4. L'ensemble contient toutes les combinaisons différentes de trois éléments, sans tenir compte de l'ordre. Schématiquement nous avons les possibilités suivantes : AAA, AAB, ABB, AAC, ACC, ABC, BBB, BBC, BCC, CCC. Traduit en formes, il est beaucoup plus difficile de trouver la combinaison manquante. Si on a analysé la nature de l'ensemble, on peut trouver la solution en comptant : il doit y avoir au total, le même nombre de chaque forme. Nous avons 9 triangles, carrés et 8 ronds. Il manque donc 1 triangle et deux ronds, soit la solution 4.

21 Réponse : 2. Les deux figures à l'intérieur de chaque case sont formées avec des éléments identiques sauf 2 où le cercle est plus ouvert dans un cas que dans l'autre.

22 Réponse : 5. Le cercle est divisé par une ligne courbe. Dans la partie convexe se trouve une étoile blanche à six branches, un rond noir et un rond blanc. Dans la partie concave, il y a une étoile noire à cinq branches et un rond blanc. Ces éléments sont inversés en 5.

23 Réponse : 1 et 4. Les figures 2, 3 et 5 contiennent trois figures identiques, l'une qui est dans un rectangle est blanche, les deux autres sont noires. En 1 il y a deux formes différentes (sans compter le rectangle), en 4 les trois figures identiques sont noires.

24 Réponse : 5. Sans tenir compte de l'ordre nous avons toutes les combinaisons de carrés sombres et ronds clairs en quatre figures. Nous avons donc des figures avec 1,

2 et 4 carrés et 2, 3 et 4 ronds. Il manque donc une figure avec 3 carrés et 1 rond : la numéro 5.

25 Réponse : 4. Toutes les figures sauf 4 contiennent trois figures qui se chevauchent partiellement. En 4 l'une des figures est entièrement inscrite à l'intérieur d'une autre.

26 Réponse : 5. Chaque figure est divisée en deux moitiés identiques, sauf la 5 qui a deux surfaces équivalentes, mais de formes différentes.

27 Réponse : 3. Les figures 1 et 4 sont identiques mais tournées sur elles-mêmes, tout comme 2 et 7 et 5 et 6. Seul 3 est unique.

28 Réponse : 1 et 7. Chaque figure comprend une lettre, un carré blanc et un carré noir, sauf 1 (2 carrés noirs) et 3 (un chiffre). La solution qui exclurait 2 (voyelle), ne permet pas d'exclure une deuxième figure de façon satisfaisante.

29 Réponse : 6. Toutes les figures comprennent 4 traits qui divisent le carré en un nombre différent de sections. Le premier a 8 sections, le second 5, le troisième 9, le quatrième 6, le cinquième 7, et le sixième 11. Nous avons donc tous les différents nombres de sections possibles avec 4 traits (de 5 à 11) sauf 10. La seule figure au-dessous avec 10 sections est la 6. (On pourrait considérer également le nombre d'intersections, mais là, il n'y a pas d'ensemble cohérent).

30 Réponse : 5. Tous sont des rotations de la même figure, sauf 5 qui diffère par son orientation et la position du rond (au bout de la diagonale, plutôt que de l'autre trait).

Intrus non-graphiques

31 D. Foie n'est pas dans la circulation sanguine.

32 E. Le ski ne se joue pas avec une balle.

33 D. L'oignon ne pousse pas sous terre.

34 E. Parrain n'est pas un lien de parenté.

35 C. Verglas n'est pas une précipitation.

36 D. Bronze est un alliage, pas un métal pur.

37 B. Archevêque n'est pas un titre de noblesse.

38 A. Le beurre n'est pas un liquide.

39 C. L'huissier est une personne, pas une procédure.

40 C. Bésicles seul optique double (pour les deux yeux).

41 D. Calorimètre instrument de mesure, pas une unité.

42 B. Le clocher ne recouvre pas un espace.

43 A. Le violon ne fait pas le son avec de l'air.

44 C. Le candidat n'est pas (encore ?) élu.

45 A. 25 n'est pas un nombre pair.

46 E. 56 n'est pas divisible par 3.

47 C. 46 ne sont pas deux chiffres qui se suivent en sens inverse.

48 D. Dans 283, la somme des deux premiers chiffres ne donne pas le troisième.

49 A. Le chiffre du milieu ne donne pas le carré de chaque côté (6 et 36 de chaque côté 366, 4 et 16 = 146, 9 et 81 etc.

50 D. 63 n'est pas un nombre premier.

Les séries doubles 3

Nous arrivons au test le plus célèbre et en quelque sorte emblématique des concours d'entrée aux écoles de commerce : les séries doubles. Il se présente sous la forme d'une colonne de chiffres ou de lettres qui croise une rangée également de chiffres ou de lettres. À l'endroit de l'intersection, l'élément commun aux deux alignements manque et il faut le trouver parmi un choix donné.

Pour commencer, évacuons une ambiguïté due au titre et parfois même à certaines instructions qui accompagnent ce test. **Il ne s'agit pas de séries.** Pas en tous cas de série dans le sens de « suite logique », ainsi que le terme est habituellement utilisé dans le cadre des tests psychotechniques. Dans la très grande majorité des cas, ces exercices présentent le croisement de deux **ensembles** tels que nous les avons définis dans le chapitre précédent. Une fois ce malentendu résolu, l'épreuve, tout en étant complexe, n'a rien d'insurmontable. Une approche méthodique vient à bout de la très grande majorité des questions.

Nous avons donc un ensemble inscrit horizontalement : généralement cinq groupes de lettres ou de chiffres, dont un est caché. Ces groupes ont un point en commun qu'il faut trouver pour choisir la solution qui convient parmi les propositions, comme dans un casse-tête classique de « compléter l'ensemble » (voir chapitre précédent). Là où les choses changent, c'est que parmi les solutions proposées, plusieurs peuvent convenir. Pour trouver, parmi ces propositions, celle qui est la bonne, il faut examiner l'autre ensemble, celui inscrit verticalement.

Ici aussi nous avons un ensemble classique dont il faut trouver l'élément qui manque, et ici aussi on découvrira que dans le choix proposé, plusieurs peuvent convenir.

Il n'y aura, cependant, qu'une seule proposition qui conviendra comme solution **à la fois** à l'ensemble horizontal et à l'ensemble vertical. C'est cette solution qu'il faut trouver.

Exemple 1

Prenons l'exemple suivant :

		3 0 7		
		6 5 3		
5 5 4	6 0 6	?	9 4 4	8 9 8
		4 3 9		
		2 2 3		

A) 3 7 9 **B)** 2 6 2 **C)** 3 1 1 **D)** 4 0 1

On commence par regarder les deux ensembles avec un esprit ouvert, au cas où une évidence sauterait aux yeux. Si ce n'est pas le cas, il faut se concentrer sur l'un des deux ensembles, mettons l'alignement horizontal et chercher un lien entre les divers nombres. S'agit-il de multiples connus ? De nombres carrés ? De nombres constitués de chiffres qui se suivent ? Et ainsi de suite.

Si la solution ne vient toujours pas, il faut procéder de façon plus systématique en examinant les nombreuses possibilités, que nous détaillerons plus loin. Il faut avoir à l'esprit, cependant, que l'un des pièges de ces « séries doubles » est de mêler des critères assez complexes et d'autres d'une très grande simplicité. Il est facile de passer à côté des critères les plus simples.

L'exercice ci-dessus en est un bon exemple. Après avoir cherché des puissances et des opérations diverses, on s'aperçoit que chacun des nombres de l'ensemble horizontal comprend un chiffre répété : deux 5 dans le premier, deux 6 dans le second, deux 4 et deux 8 dans les deux derniers. On vérifie qu'une solution comprenant ce critère (un chiffre répété) existe et on constate qu'il y en a deux : B et C. Ceci est encourageant à double titre : l'absence de solution avec un chiffre répété aurait indiqué que nous faisions fausse route, mais si ce critère n'était pris en compte que dans une seule solution, cela aurait été inquiétant également. Il est rare que la solution puisse se trouver en ne prenant en compte qu'un seul des deux alignements. Deux solutions possibles à ce stade est tout à fait encourageant.

Il faut ensuite passer à l'autre alignement, les nombres verticaux et de nouveau, nous cherchons divers critères reliant les nombres. Les logiques horizontales et verticales peuvent être apparentées, mais la plupart du temps elles sont parfaitement indépendantes. Ici pas de lettre répétée, pas de divisibilité, etc. Finalement on en revient, ici aussi, à la simplicité : tous les nombres verticaux comprennent une fois un même chiffre, le 3. On vérifie parmi les solutions proposées et là aussi, il y en a deux qui sont possibles : la A et la C.

Seule la C est une solution possible à la fois pour l'ensemble horizontal et pour l'ensemble vertical. C'est donc la solution qu'il faut donner.

Ces questions se présentent sous deux versions : avec des nombres et avec des lettres. Le principe demeure rigoureusement identique, mais les critères de formation des ensembles s'adaptent à la spécificité des nombres et des lettres. Avec les tests numériques, il faut considérer à la fois les chiffres (le signe graphique indépendant de sa valeur) et les nombres (le signe représentant une valeur, soit individuellement, soit selon sa position). Les tests alphabétiques prennent les lettres également comme des signes graphiques (tel un dessin qui apparaît une fois, deux fois, etc.) ou comme un élément de l'alphabet (c'est-à-dire selon un ordre donné) ou encore faisant partie de deux groupes (les consonnes et les voyelles) mais jamais (à notre connaissance) comme des mots (la signification ou la définition grammaticale du mot).

Un exemple explicitera ces propos :

Exemple 2

		UHI		
		PNO		
AEG	OUT	?	EIM	AUS
		LTU		
		VDE		

A) OIJ **B)** UBA **C)** AIF **D)** EPQ

En examinant l'ensemble vertical, on devrait remarquer après un moment que les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent en progressant dans l'alphabet : H-I, N-O, T-U, D-E. Il nous faut donc trouver une solution avec cette même particularité. Comme nous en avons désormais l'habitude, nous trouvons plusieurs réponses possibles : A) avec I-J et D) avec P-Q.

On passe ensuite à l'autre ensemble, les lettres horizontales, et là encore on peut chercher dans diverses directions pour remarquer enfin que chaque groupe de trois lettres commence par deux voyelles. Un coup d'œil aux choix de solutions permet d'en trouver deux : A) avec O-I et C) avec A-I. La réponse A étant la seule commune aux deux séries est donc celle recherchée.

La façon dont l'ensemble est défini permettra de trouver la solution ou pas. Dans l'exemple ci-dessus, des définitions moins précises des ensembles auraient été possibles. Par exemple, dans l'ensemble vertical, on aurait pu prendre « deux lettres qui se côtoient dans l'alphabet » (sans tenir compte de l'ordre) et ainsi B) où les deux dernières lettres se suivent, mais en ordre inverse, aurait été également une solution valable. De même, une définition plus large de l'ensemble horizontal telle que « groupes de lettres comprenant deux voyelles » aurait été valable et aurait permis là aussi d'inclure B) parmi les solutions possibles. Si on est rigoureux, cependant, on notera que ces définitions élargies permettent plusieurs réponses (la solution A demeure valable) ce qui n'est pas possible.

Des définitions trop étroites, en revanche, peuvent fermer toute solution. Si, pour l'ensemble vertical, à la définition « deux lettres qui se côtoient dans l'alphabet » on avait ajouté « la seconde étant une voyelle », seule la solution B) aurait été valable et l'exercice sans solution.

Il faut faire preuve d'un certain bon sens et définir les ensembles de la façon la plus simple possible avec les éléments donnés.

Nous allons maintenant considérer la plupart des ensembles qui se retrouvent le plus fréquemment dans les chiffres comme dans les lettres. L'ordre dans lequel nous les donnons n'indique pas une priorité absolue, mais de façon générale nous donnons les critères les plus simples, les plus courants en premier et les plus recherchés, les plus rares, par la suite. Si un ensemble correspond à deux critères, il faut le plus souvent choisir celui qui se trouve en tête de liste.

Les critères des ensembles verticaux et horizontaux sont indépendants et il est parfaitement possible d'avoir un critère très simple pour un ensemble avec un raisonnement beaucoup plus complexe pour un autre. Ceci dit, les concepteurs essayent de présenter des exercices de difficultés variables et le niveau de difficulté des deux critères est souvent analogue. L'exception se trouve dans les « pièges » où un critère très avancé est accompagné d'un autre tellement simple que l'on risque de passer à côté, n'imaginant même pas qu'un critère si simple puisse apparaître à ce stade de complexité.

Critères pour les ensembles de lettres

➢ **Chaque groupe contient une lettre répétée**

- À la suite et à la même place : ATT RGG NEE
- À la suite, mais pas à la même place : TTE GSS JKK
- Pas nécessairement à la suite : GVG PPU ABA

➢ **Chaque groupe contient des lettres identiques**

- Une même lettre à la même place : DZA UZI PZR
- Une lettre à des places différentes : GRP YGR UHG
- Deux mêmes lettres : TSI HIS SPI

➢ **Trois lettres qui se suivent dans l'alphabet**

- En avançant : GHI STU ZAB
- En reculant : IHG VUT GFE
- En désordre : CAB NPO SRT

Notez que l'alphabet est pris comme une boucle sans fin, Z étant suivi de A, C étant la lettre qui suit X de cinq places.

Pour voir les séries qui prennent l'alphabet à l'envers, de nombreux candidats trouvent qu'il est plus facile (plus rapide) tout simplement de lire de la droite vers la gauche.

➢ **Deux lettres qui se suivent dans l'alphabet**

- Au début : BCV JKE PQM
- À la fin : GVW DNO VEF
- En première et dernière place : MRN XGY SET

➢ **La même chose, mais avec les lettres en ordre inverse**

- Au début : DCK POR XWF
- À la fin, en première et dernière place …

➢ **Deux lettres qui se suivent dans l'alphabet avec ont une lettre d'écart entre elles**

- Trois lettres en avançant : JLN QSU DFH
  en reculant, en désordre…
- Deux lettres au début : ACR YAM NPH
  à la fin, en première et dernière position, en reculant, avec deux lettres d'écart, trois lettres d'écart…

➢ **Des écarts qui se répètent de la même façon dans chaque groupe**

- Par exemple, un écart de 1 suivi d'un écart de 2 :
  BDG PRU JLO (BcDefG PqRstU JkLmnO)
- La même chose avec d'autres écarts, avec les lettres en reculant dans l'alphabet.

➢ **La position des voyelles**

- Toujours deux voyelles au début : AOK EUB YYP
- À la fin : TAU BUA CUO
- En première et dernière place : ALA URE IJO
- En désordre : AIT FUE OSU
- La même chose avec une seule voyelle : AFK IGP YTT
- Ou simplement une voyelle par groupe : PNI JUG AFS

➢ **Une voyelle comme repaire**

- Voyelle côtoie une lettre reliée alphabétiquement
- Voyelle suivie de voyelle + 2 : PAC EGP BUW
- Voyelle précédée de voyelle + 3 : RUB FIT LOK

➢ **L'ordre des voyelles et des consonnes**

- Deux voyelles qui se suivent : AED UYG IOT
- Deux consonnes qui se suivent : DFL NPH PQG
  (Ce dernier critère est souvent piégeant : on a l'impression qu'il s'agit de lettres qui se suivent avec une lettre d'écart, mais avec des exceptions !)

➢ La valeur des lettres

Par convention, on donne à chaque lettre la valeur de son rang dans l'alphabet. A = 1, B = 2, C = 3 M = 13, Z = 26. Il est utile de connaître la valeur de certaines lettres comme repère : M la lettre médiane = 13, E = 5, T = 20. Si le règlement le permet, le plus simple est d'inscrire l'alphabet dans l'ordre sur papier brouillon et de noter les valeurs des lettres au-dessous. Cela facilitera l'identification des lettres en ordre rétrograde, ainsi que les ensembles basés sur les valeurs.

➢ Groupes ayant des valeurs identiques

OJE PLB HGO

(O 15 + J 10 + E 5 = 30) (P 16 + L 12+ B 2 = 30) (H 8 – G7 + O 15 = 30)

Et des variantes du style : somme des deux premières lettres, des deux dernières lettres, différences de ces lettres. Il s'agit ici de critères très recherchés auxquels il ne faut faire appel qu'après avoir essayé d'appliquer tous les autres.

➢ Les raisonnements de type « série »

Depuis quelque temps, certains concours appliquent des raisonnements qui justifieraient un peu mieux le titre de l'exercice. Certaines parties des groupes se conduisent comme une série, c'est-à-dire qu'il y a une progression régulière que l'on peut noter d'un élément à l'autre.

- Les premières lettres se suivent en ordre alphabétique :

  AGY BMN CPS DOR

- La même chose avec les secondes lettres :

  LJH PKV OLU SMT

  ou avec les troisièmes lettres, avec l'ordre alphabétique rétrograde, avec une ou plusieurs lettres d'écart, etc.

- Deux lettres se suivent par groupe : HPI JNK LBM

  La même chose avec une, ou plus lettres d'écart, rétrograde, etc.

- Deux lettres se suivent avec des positions de lettres alternées début et fin (critère complexe)

  LKD DRM NYY BEO PGR

- Des lettres répétées, mais qui se décalent régulièrement d'une place. (première, seconde, troisième, deuxième, première)

  ZJD JZH LHZ PZU ZTR

- La valeur des groupes de lettres qui croît régulièrement, ou qui décroît (critère très spécialisé) :

  HSE ZCD PPB

  (H 8 + S 19 + E 5 = **32**) (Z 26 + C 3 + D 4 = **33**) (P 16 + P 16 + B 2 = **34**)

Notez que la formulation précise de critères permet d'inclure tous les éléments d'un ensemble, tout en excluant certaines solutions. Par exemple, avec le choix de solutions suivant :

A) AFK **B)** IGE **C)** YTT **D)** AOI **E)** GCE

Le critère « une voyelle en première position » permettra de choisir toutes les solutions proposées sauf E). Le critère « une seule voyelle par groupe » comprendra tous les ensembles sauf le second et le quatrième.

Critère pour les ensembles de chiffres

Quand les chiffres sont considérés comme des symboles uniques (sans valeur numérique), on retrouve les mêmes logiques qu'avec les lettres.

➢ **Chaque groupe contient un chiffre répété**

- À la suite et à la même place : 599 711 522
- À la suite, mais pas à la même place : 002 477 844
- Pas nécessairement à la suite : 424 223 575

➢ **Chaque groupe contient des chiffres identiques**

- Un même chiffre à la même place : 284 781 089
- Un chiffre à des places différentes : 953 898 124
- Deux mêmes chiffres : 497 379 907
- Quand les chiffres sont considérés comme une série d'éléments uniques et en boucle (de 1 à 9 ou de 0 à 9, le premier chiffre de la série venant après le 9) on retrouve les mêmes raisonnements que ceux basés sur l'ordre alphabétique.

➢ **Trois chiffres qui se suivent en ordre numérique**

- En avançant : 789 234 567
- En reculant : 654 210 876
- En désordre : 423 645 312

➢ **Deux chiffres qui se suivent en ordre numérique**

- Au début : 561 893 561
- À la fin, en première et dernière place, la même chose mais avec les chiffres en ordre inverse …

➢ **Des chiffres qui se suivent en sautant un chiffre à chaque fois**

357 468 246

En ordre inverse, dans le désordre, en sautant deux chiffres à chaque fois, etc.

➢ **Des écarts qui se répètent de la même façon dans chaque groupe**

- Par exemple un écart de 1 suivi d'un écart de 2 :
  570 136 792 (567890 123456 789012)
- La même chose avec d'autres écarts, en ordre inverse.

➢ **Position et ordre des chiffres pairs et impairs**

Quand les chiffres sont considérés comme appartenant à deux groupes distincts, les pairs et les impairs, on retrouve des raisonnements analogues aux critères consonne, voyelle…

Par exemple, toujours deux nombres pairs (ou impairs) au début (à la fin, à chaque extrémité) : 285 641 883

Cette logique doit être considérée avec beaucoup de précaution, car la répartition des chiffres selon des critères tout autre peut donner une répartition paire/impaire de ce style alors qu'elle n'est pas souhaitée par le concepteur (et du coup pas prise en compte comme une solution possible).

Dès lors que les chiffres sont pris pour des nombres, ou une série qui n'est pas en boucle, les analogies avec les raisonnements pour les exercices de lettres ne sont plus valables. Après 9 on ne repart pas à 0 mais on poursuit avec 10 et 11. Cela implique un chiffre de plus, ce qui donne une indication mais qui crée une complication supplémentaire dans la mesure où les séparations entre les nombres ne sont pas données.

➢ **Trois nombres successifs**

- Croissants : 234 8910 567
- Décroissants : 654 210 11109
- Et les variantes, un nombre sur deux, sur trois, avec des écarts qui se répètent …

La très grande majorité des questions avec des chiffres, cependant, est basée sur des opérations numériques.

➢ **La somme est toujours la même**

- De tous les chiffres :
  357 708 249 (3 + 5 + 7 = 15, 7 + 0 + 8 = 15, 2 + 4 + 9 = 15)

- Des deux premiers :
  841 758 934 $(8 + 4 = 12, 7 + 5 = 12, 9 + 3 = 12)$
- Des deux derniers :
  728 464 255 $(2 + 8 = 10, 6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10)$
- Du premier et du dernier :
  459 706 558 $(4 + 9 = 13, 7 + 6 = 13, 5 + 8 = 13)$

➢ **La différence est toujours la même**

- La somme des deux premiers moins le troisième
  241 555 926 $(2 + 4 – 1 = 5, 5 + 5 – 5 = 5, 9 + 2 – 6 = 5)$
- La différence des deux premiers :
  578 136 791 $(7 – 5 = 2, 3 – 1 = 2, 9 – 7 = 2)$
- Des deux derniers, du premier et du dernier, du premier et de la somme des deux derniers, de celui du milieu et de la somme des deux extrémités…

Le produit ou la division avec résultats identiques sont possibles mais apparaissent beaucoup moins souvent.

Les opérations avec leur résultat

➢ **Les additions**

Premier chiffre + second chiffre = troisième chiffre
538 819 123 $(5 + 3 = 8, 8 + 1 = 9, 1 + 2 = 3)$

Ainsi que les variantes :

- premier chiffre + troisième = second et premier chiffre = second + troisième…
- premier chiffre = deuxième + 2, + 3, (autres chiffres).

➢ **Les soustractions**

Premier chiffre – second chiffre = troisième chiffre
853 918 220 $(8 – 5 = 3, 9 – 1 = 8, 2 – 2 = 0)$

Et les variantes :

- second chiffre – premier = troisième,
- premier chiffre – troisième = second etc.

➢ **Les multiplications et les divisions**

248 818 326 $(2 \times 4 = 8, 8 \times 1 = 8, 3 \times 2 = 6)$

Et toutes les variantes de position.

➢ **Divisibilité**

Critère qui est utilisé très régulièrement : tous les nombres d'un ensemble sont divisibles par un nombre donné.

Par exemple, dans :

654 789 348

tous les nombres sont divisibles par 3.

Parfois il peut y avoir ambiguïté dans la mesure où certains nombres ont plusieurs multiples :

105 180 270

sont tous divisibles à la fois par 3 et par 5.

Dans des cas comme celui-ci, et selon le choix de solution qui est offert, on doit opter en premier lieu pour le cas de plus grande convergence, c'est-à-dire un nombre divisible par les deux nombre en question. Si ce choix n'est pas offert, mais que certains nombres sont divisibles par 3 et d'autres par 5, ce sera l'autre série qui sera utilisée pour trancher.

Petit rappel des règles pour établir la divisibilité d'un nombre. Un nombre est divisible :

- **par 2** : si son dernier chiffre est pair;
- **par 3** : si la somme de ses chiffres est divisible par 3;
- **par 4** : si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4;
- **par 5** : si son dernier chiffre est 0 ou 5;
- **par 6** : si c'est un nombre pair divisible par 3;
- **par 7** : pas de critères simples (pour les nombres à trois chiffres : si la différence entre le nombre formé par les deux chiffres de gauche moins le double du chiffre des unités est divisible par 7);
- **par 8** : pas de critères simples;
- **par 9** : si la somme de ses chiffres est divisible par 9;
- **par 10** : si son dernier chiffre est 0;
- **par 11** : pour les nombres à deux chiffres, si ceux-ci sont identiques; pour les nombres à trois chiffres, si la somme du premier et du dernier chiffre moins le chiffre du milieu est égale à 0 ou 11;
- **par 12** : si le nombre est divisible par 3 et 4.

Les critères de divisibilité par des nombres tels que 13, 17, 23, etc. prennent beaucoup de temps à établir, généralement plus que celui dont on dispose lors d'un de ces concours. Si vous avez la chance d'être de ces personnes qui sont des as du calcul mental et qui voient d'un simple coup d'œil que 391 est divisible par 17 et 23, profitez-en ! Si comme la plupart d'entre nous, vous ne pouvez établir ce fait qu'après de longues cogitations, il vaut mieux ne pas s'y attarder (voir nos conseils tactiques en fin de chapitre).

➢ **Les carrés**

Autre critère utilisé régulièrement : les nombres sont des carrés ou contiennent un carré.

Ils peuvent être présentés simplement, tels quels :

81 484 9 (9^2, 22^2, 3^2)

ou de façon légèrement camouflée :

409 604 205

(les carrés de 7, 8 et 5 avec un zéro entre le premier et le dernier chiffre)

636 981 416

(le nombre suivi de son carré 6 – 36, 9 – 81, 4 – 16).

On retrouve régulièrement des variantes sur ce thème, le nombre au milieu du carré **891** (9 dans 81), à la fin **497** (7 après 49).

Plus difficiles à trouver, les carrés légèrement modifiés :

26 65 17 ($5^2 + 1$, $8^2 + 1$, $4^2 + 1$)

ou 32 98 18 ($4^2 \times 2$, $7^2 \times 2$, $3^2 \times 2$)

Certains exercices utilisent les carrés en trois chiffres et il est utile de pouvoir les reconnaître d'un coup d'œil.

Voici pour mémoire, les carrés de 1 à 31 :

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961									

➢ **Les Cubes**

Tout ce qui vient d'être dit sur les carrés, s'applique dans une moindre mesure aux cubes. Ceux-ci sont utilisés et de manière semblable aux carrés, mais moins souvent.

Pour rappel, voici les cubes de 1 à 9 (de un à trois chiffres)

1 8 27 64 125 216 343 512 729

➢ **Les nombres premiers**

Tout comme les carrés ou les cubes, les nombres premiers peuvent être un critère pour établir un ensemble. Il est relativement peu utilisé, mais il est toujours utile de connaître les nombres premiers, tout du moins ceux qui s'écrivent en un ou deux chiffres :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

➢ **Les raisonnements de type « série »**

Avec les chiffres, comme avec les lettres, on peut trouver depuis peu dans les concours des critères basés sur des transformations régulières d'un élément à l'autre.

- Un chiffre qui progresse numériquement :

  $\underline{3}05 \quad \underline{4}62 \quad \underline{5}19 \quad \underline{6}44$

  Ici, c'est le premier des trois, ce peut être le second, le dernier, il peut progresser régulièrement ou de deux en deux, de trois en trois, en ordre décroissant, etc.

- Deux chiffres qui progressent numériquement :

  $\underline{5}4\underline{3} \quad \underline{6}1\underline{2} \quad \underline{7}5\underline{1} \quad \underline{8}1\underline{0}$

  le premier croît, le dernier décroît.

  $5\underline{29} \quad 2\underline{30} \quad 8\underline{31} \quad 8\underline{32}$

  les deux derniers, se comportant comme un nombre à deux chiffres, progressent numériquement.

- Un même chiffre qui se décale régulièrement d'une place (première, seconde, troisième, deuxième, première) :

  $\underline{5}21 \quad 4\underline{5}9 \quad 23\underline{5} \quad 4\underline{5}7 \quad \underline{5}20$

  La même chose, mais avec un chiffre croissant (critère peu fiable : il peut être le résultat d'un hasard non-voulu) :

  $\underline{5}34 \quad 2\underline{6}1 \quad 81\underline{7} \quad 1\underline{8}7 \quad \underline{9}62$

- La somme des trois chiffres croît ou décroît :

  648 991 857 795

  $6 + 4 + 8 = \underline{18} \ldots 9 + 9 + 1 = \underline{19} \ldots 8 + 5 + 7 = \underline{20} \ldots 7 + 9 + 5 = \underline{21}$

- Les multiples croissent ou décroissent régulièrement :

  154 165 176 187

  soit les multiples de 11 en ordre croissant :

  $11 \times 14,\ 11 \times 15,\ 11 \times 16,\ 11 \times 17$

- Les carrés croissent ou décroissent régulièrement :

  196 169 144 121

  soit les carrés de nombres en ordre décroissant :

  $14^2 - 13^2 - 12^2 - 11^2$

➢ **Groupes à quatre chiffres ou plus**

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des exemples avec trois chiffres. Périodiquement dans les concours, il apparaît ici ou là des exemples avec plus de trois chiffres. Il s'agit généralement bien de trois nombres, mais de nombres à plus d'un chiffre. Comme ces nombres ne sont pas séparés, cela crée une petite complication supplémentaire.

Par exemple :

- 91011 394041 101112
  (nombre qui se suivent 9 10 11, 39 40 41, 10 11 12)
- 31132 41923 54155
  (addition avec résultat 31 + 1 = 32, 4 + 19 = 23, 54 + 1 = 55)
- 250525 2438 5469
  (division avec résultat : 250 ÷ 5 = 25, 24 ÷ 3 = 8, 54 ÷ 6 = 9)
- 19614 84129 12111
  (carré et nombre mis au carré : $196 = 14^2$, $841 = 29^2$, $121 = 11^2$)

➢ **Le point d'intersection**

Quand il n'y a pas de raisonnement de type « série », ce qui est quand même le cas le plus fréquent, le point d'intersection des deux ensembles est parfaitement arbitraire. Aucune conclusion ne peut être tirée du fait qu'il se trouve en tête, au milieu ou à la fin d'une ou des deux séries.

Conseils tactiques

- Le temps imparti pour résoudre ces séries doubles est généralement d'une minute trente par question. Ce n'est pas long ! Il est donc impératif de gérer son temps. Si vous avez une aisance plus prononcée pour une catégorie ou une autre (lettres ou chiffres), commencez avec ces questions-là. Si une question résiste, ne perdez pas de temps, passez à la suivante : vous avez toujours la possibilité d'y revenir.
- Ne prenez pas toujours systématiquement la série horizontale avant la verticale (ou inversement), laissez vous guider par votre instinct pour aborder la série qui vous semble la plus facile, la plus évidente. Une fois que vous avez résolu une série, vous éliminez toutes les solutions qui ne conviennent pas : le choix est donc plus restreint. Si cette seconde série vous donne du fil à retordre, utilisez le choix de solutions pour vous aider (souvent il n'en reste que deux). Ce choix restreint permet souvent d'éliminer des pistes entières de recherches et ainsi de gagner beaucoup de temps.

- Si, malgré tout, vous trouvez une des séries mais pas l'autre, faut-il cocher une solution ou pas ? Question délicate qui dépend de plusieurs facteurs. En premier lieu le barème de notation. Certains concours n'ont pas de points négatifs (cochez toujours une réponse !). D'autres donnent + 4 pour juste et – 1 pour faux, d'autres encore donnent + 3 pour juste et – 1 pour faux. Il faut évaluer (rapidement, ne vous lancez pas dans des calculs qui prennent du temps) vos chances de gagner des points contre les risques d'en perdre. Si avec une seule série vous avez, par exemple, un choix de deux solutions, le risque vaut la peine d'être couru. Si la série trouvée permet 3 ou 4 réponses, alors il vaut mieux ne rien cocher.

L'essentiel à retenir

Trouver parmi les solutions proposées celle qui peut s'intégrer à la fois à l'ensemble vertical et à l'ensemble horizontal. Pour cela, trouver un critère qui recouvre tous les éléments de l'ensemble et au moins une des solutions proposées.

Critères ensembles de lettres

Dans chaque groupe de lettres :

- Une ou deux lettres répétées;
- Une même lettre à la même place;
- Lettres qui se suivent alphabétiquement;
- Lettres qui se suivent avec le même écart;
- Voyelles dans des positions identiques;
- Ordre des voyelles ou/et des consonnes;
- Valeur des lettres identiques.

Dans chaque ensemble :

- Premières lettres qui se suivent alphabétiquement;
- Autres lettres qui se suivent alphabétiquement.

Critères ensembles de chiffres

Dans chaque groupe de chiffres :

- Un ou deux chiffres répétés;
- Un même chiffre à la même place;
- Chiffres qui se suivent numériquement;
- Chiffres qui se suivent avec le même écart;
- Somme des nombres identiques;
- Différences identiques.

Opérations diverses :

(A = 1er chiffre, B = 2^{e} chiffre, C = 3^{e} chiffre)

- A = B + C, B = A + C, C = A + B;

- $A = B - C$, $A = C - B$, $B = A - C$, $B = C -$, $C = A - B$, $C = B - A$;
- $A = B \times C$, $B = A \times C$, $C = A \times B$;
- $A = B + 1$, $A = C + 1$, $B = C + 1$, $B + 1 = C$, $B + 2 = A$, etc.
- Nombres avec des diviseurs communs;
- Nombres sont tous des carrés;
- Les carrés camouflés $A^2 = BC$, $B^2 = AB$, $AB = C^2$;
- Carrés + 1, + 2, – 1, – 2, …
- Nombres sont tous des cubes;
- Nombres sont tous des nombres premiers.

Dans chaque ensemble :

- Premiers chiffres se suivent numériquement;
- Autres chiffres se suivent numériquement;
- Ordre croissant, décroissant;
- Un chiffre sur 2, sur 3;
- Somme des chiffres croît/décroît régulièrement;
- Les multiples croissent/décroissent;
- Les carrés croissent/décroissent.

Exercices d'entraînement

Séries doubles – Lettres

Niveau 1

1

		ANN		
		TEE		
EFO	UVR	?	JKP	CDV
		SBB		
		PRR		

❒ **A)** CDA ❒ **B)** HII ❒ **C)** ELL ❒ **D)** EFI

2

AOA				
PPS				
TEE				
?	AUT	OIF	YEV	EUW
OBO				

❒ **A)** EIT ❒ **B)** URU ❒ **C)** EER ❒ **D)** OUG

3

	KAF			
KST	?	FLM	KCD	OFG
	UFK			
	KFS			
	FLK			

❐ **A)** FJK ❐ **B)** AFK ❐ **C)** KUV ❐ **D)** EFG

4

FRE	CDE	?	AIE	OGE
		PON		
		VUT		
		JIH		
		SRQ		

❐ **A)** RQP ❐ **B)** CDE ❐ **C)** KJI ❐ **D)** GFE

5

			UYZ	
			ADE	
			OLU	
			BIO	
EMO	REG	RSU	?	TOQ

❐ **A)** OAC ❐ **B)** AEF ❐ **C)** EIK ❐ **D)** ORT

6

				IJI
UBU	ZEE	AKA	EHE	?
				VVU
				AGF
				IPO

❐ **A)** STS ❐ **B)** OOP ❐ **C)** IJI ❐ **D)** BUT

7

		DFH		
		UWY		
		PRT		
POU	QUE	?	URS	AIU
		CEG		

❐ **A)** QUI ❐ **B)** QSU ❐ **C)** MOQ ❐ **D)** STU

Niveau 2

8

	COR			
	LIQ			
	PYW			
	BAX			
XWY	?	BAC	KJL	QPR

❒ **A)** FED ❒ **B)** IHJ ❒ **C)** VUW ❒ **D)** QOP

9

			SVA	
			KNA	
OTW	CMP	UDG	?	SYB
			GJB	
			EHE	

❒ **A)** DGI ❒ **B)** MPS ❒ **C)** SWZ ❒ **D)** PRU

10

			EPP	
			FAF	
			GLP	
AML	OUT	IFE	?	TRQ
			IBR	

❒ **A)** YNM ❒ **B)** HEG ❒ **C)** YSR ❒ **D)** HJI

11

		GHI		
		UVW		
UPS	QSR	?	SEP	ASO
		DEF		
		LMN		

❒ **A)** YZA ❒ **B)** SRQ ❒ **C)** TUV ❒ **D)** OPQ

12

			DEI	
			ODT	
PNM	SQP	YWV	?	JHG
			YDK	
			DIO	

❒ **A)** GED ❒ **B)** PNM ❒ **C)** HFD ❒ **D)** DBA

13

NNQ
OOR
FAS
JYN UBY COG ? RPV
SPU

❒ **A)** EST ❒ **B)** VOZ ❒ **C)** PRT ❒ **D)** AEE

14

BPC
DFE
DQB EPA ? GNB HMY
HFI
JIK

❒ **A)** FOG ❒ **B)** LFG ❒ **C)** HOG ❒ **D)** FOE

Niveau 3

15

KIV
QOX
NTV ? ODF RSU AVX
NLS
FDJ

❒ **A)** FDE ❒ **B)** USA ❒ **C)** IGI ❒ **D)** PRT ❒ **E)** LSU

16

CHF
OPN
NEN EDD SSE TET ?
AFD
SWU

❒ **A)** GGE ❒ **B)** XEX ❒ **C)** REE ❒ **D)** EDB ❒ **E)** ATS

17

GHU
AEG TOU ? EMI AUS
PNO
RSL
DEV

❒ **A)** YAR ❒ **B)** ABC ❒ **C)** IFA ❒ **D)** EPQ ❒ **E)** OIJ

18

		YBT		
		UZC		
BRU	CTX	?	EXD	FZG
		BEW		
		XCF		

❒ **A)** GGE ❒ **B)** DUY ❒ **C)** REE ❒ **D)** XXX ❒ **E)** DVA

19

			KOR	
			ILP	
LOR	EHK	ORU	?	GJM
			DEH	
			YBS	

❒ **A)** UWY ❒ **B)** ADG ❒ **C)** JMP ❒ **D)** UXR ❒ **E)** TWZ

20

GAB				
FBB				
AHA				
?	RTX	MOO	EGH	QSB
ECB				

❒ **A)** XZY ❒ **B)** BDD ❒ **C)** PRI ❒ **D)** AFC ❒ **E)** CAF

Séries doubles – Chiffres

Niveau 1

21

		044		
		377		
213	653	?	985	543
		966		
		688		

❒ **A)** 554 ❒ **B)** 211 ❒ **C)** 878 ❒ **D)** 800

22

			324	
			849	
			253	
			506	
788	081	586	?	889

❒ **A)** 988 ❒ **B)** 485 ❒ **C)** 273 ❒ **D)** 486

23

			468	
			680	
			024	
			913	
225	551	532	?	659

❒ **A)** 468 ❒ **B)** 501 ❒ **C)** 246 ❒ **D)** 357

24

		356		
		088		
		715		
204	684	?	004	826
		624		

❒ **A)** 446 ❒ **B)** 531 ❒ **C)** 246 ❒ **D)** 809

25

	867			
	721			
247	?	570	358	025
	973			
	427			

❒ **A)** 792 ❒ **B)** 137 ❒ **C)** 469 ❒ **D)** 025

26

				753
				426
549	235	167	077	?
				961
				555

❒ **A)** 112 ❒ **B)** 268 ❒ **C)** 516 ❒ **D)** 238

27

		682		
676	221	?	587	854
		516		
		473		
		189		

❒ **A)** 843 ❒ **B)** 176 ❒ **C)** 297 ❒ **D)** 484

Niveau 2

28

	270			
	135			
	999			
113	?	593	179	995
	102			

❐ **A)** 397 ❐ **B)** 642 ❐ **C)** 717 ❐ **D)** 222

29

			505	
			736	
143	594	231	?	869
			818	
			239	

❐ **A)** 649 ❐ **B)** 407 ❐ **C)** 717 ❐ **D)** 825

30

425				
730				
165				
?	448	571	694	817
635				

❐ **A)** 175 ❐ **B)** 123 ❐ **C)** 325 ❐ **D)** 595

31

		219		
		437		
150	975	?	475	525
		853		
		091		

❐ **A)** 615 ❐ **B)** 619 ❐ **C)** 625 ❐ **D)** 375

32

		435		
648	497	?	164	819
		071		
		522		
		168		

❐ **A)** 255 ❐ **B)** 348 ❐ **C)** 636 ❐ **D)** 162

33

	824			
	515			
	927			
487	?	854	510	632
	618			

❐ **A)** 165 ❐ **B)** 412 ❐ **C)** 721 ❐ **D)** 098

34

		990		
628	719	?	991	082
		630		
		480		
		350		

❐ **A)** 910 ❐ **B)** 750 ❐ **C)** 840 ❐ **D)** 800

Niveau 3

35

	4569			
	7891			
	3452			
1224	?	4998	1734	3468
	6784			

❐ **A)** 3876 ❐ **B)** 5675 ❐ **C)** 1224 ❐ **D)** 2346 ❐ **E)** 1232

36

			176	
			752	
741	535	446	?	718
			447	
			732	

❐ **A)** 762 ❐ **B)** 564 ❐ **C)** 376 ❐ **D)** 942 ❐ **E)** 457

37

			264	
			990	
115	238	361	?	607
			718	
			473	

❐ **A)** 484 ❐ **B)** 817 ❐ **C)** 594 ❐ **D)** 596 ❐ **E)** 7831

38

	768			
	576			
774	?	279	648	351
	534			
	876			

❒ **A)** 879 ❒ **B)** 738 ❒ **C)** 423 ❒ **D)** 345 ❒ **E)** 809

39

			165	
			649	
			498	
			094	
169	196	225	?	289

❒ **A)** 043 ❒ **B)** 367 ❒ **C)** 289 ❒ **D)** 999 ❒ **E)** 256

40

		11		
93	248	?	6321	186
		41		
		61		
		71		

❒ **A)** 18361 ❒ **B)** 31 ❒ **C)** 6321 ❒ **D)** 21 ❒ **E)** 23

Corrigés des exercices

Série doubles – Lettres

1 Horizontalement : les deux premières lettres se suivent dans l'alphabet.

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : les deux dernières lettres sont identiques.

Solutions possibles : B), C).

Réponse : B

2 Horizontalement : les deux premières lettres sont des voyelles.

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : chaque groupe contient deux lettres identiques, pas nécessairement à la suite.

Solutions possibles : B), C).

Réponse : C

3 Horizontalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent alphabétiquement.

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : chaque groupe contient un K et un F (si on ne prend que K, la solution C est aussi valable; si on ne prend que F, la solution D est possible; dans chaque cas, cela donne plus d'une réponse valable, ce qui n'est pas possible).

Solutions possibles : A), B).

Réponse : A

4 Horizontalement : la troisième lettre est toujours un E.

Solutions possibles : B), D).

Verticalement : les trois lettres sont en ordre alphabétique inversé (Attention à la fausse réponse B où les lettres viennent dans l'ordre normal).

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : D

5 Horizontalement : les deux dernières lettres se suivent dans l'alphabet avec une lettre d'écart (Attention à la fausse réponse B où les lettres se suivent sans écart).

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : chaque groupe contient deux voyelles qui se suivent dans l'ordre (A-E-I-O-U-Y) sans être nécessairement côte à côte (attention à la fausse réponse A où les voyelles ne sont pas dans l'ordre !).

Solutions possibles : B), C).

Réponse : C

6 Horizontalement : chaque groupe contient deux fois une même voyelle (Attention à la fausse réponse A qui contient deux fois une même consonne).

Solutions possibles : B), C).

Verticalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent en ordre alphabétique inverse (Attention à la réponse B où les lettres sont en ordre normal).

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : C

7 Horizontalement : tous les groupes contiennent un U.

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : trois lettres qui se suivent alphabétiquement, avec une lettre d'écart à chaque fois (Attention à la réponse fausse D où S et T se suivent sans écart).

Solutions possibles : B), C).

Réponse : B

8 Horizontalement : trois lettres qui se suivent dans l'alphabet, la première étant au centre, la suivante en tête, et la troisième en troisième place B – A – C (Attention aux réponses A et D où les lettres viennent dans un ordre différent).

Solutions possibles : B), C).

Verticalement : tous les groupes contiennent un voyelle au centre avec des consonnes de chaque côté.

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : C

9 Horizontalement : les deux dernières lettres se suivent dans l'alphabet avec un écart de + 3. Ne pas oublier que l'alphabet fait une boucle, donc le dernier groupe suit bien la même logique, B étant 3 lettres après Y (YzaB).

Solutions possibles : B), C), D).

Verticalement : pour une fois, les deux alignements suivent la même logique : les deux premières lettres se suivent dans l'alphabet avec un écart de + 3.

Solutions possibles : A), B).

Réponse : B

10 Horizontalement : les deux dernières lettres sont en ordre alphabétique inversé.

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : la première lettre de chaque groupe forme une progression alphabétique croissante (E-F-G-H-I). Il manque donc un groupe commençant avec H.

Solutions possibles : B), D).

Réponse : D

11 Horizontalement : la troisième lettre de chaque groupe recule d'une place dans l'alphabet (S – R … P – O) Il manque donc un groupe se terminant par Q.

Solutions possibles : B), D).

Verticalement : les trois lettres de chaque groupe sont en ordre alphabétique.

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : D

12 Horizontalement : les lettres de chaque groupe reculent dans l'alphabet selon l'ordre : – 2, – 1. (PoNM, SrQP, etc.). On préfèrera peut-être lire de droite à gauche pour que la régularité deviennent évidente.

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : chaque groupe contient un D, et en considérant l'ensemble de haut en bas, on voit que le D se décale tout d'abord vers la droite et ensuite vers la gauche. On retrouve ce mouvement de va et vient dans plusieurs exercices des concours. Le groupe à trouver devra donc avoir un D en troisième position. Le critère « contient un D », sans tenir compte de la position, permet la solution D) et il n'y a pas de réponse unique.

Solutions possibles : A), C).

Réponse : A

13 Horizontalement : dans chaque groupe, l'écart entre la première et la dernière lettre est toujours de + 4 (J klm N, U vwx Y etc.).

Solutions possibles : B), C), D).

Verticalement : la dernière lettre de chaque groupe avance d'une place dans l'alphabet (de haut en bas). Q – R – S – … – U. Il nous faut donc un T en dernière position.

Solutions possibles : A), C).

Réponse : C

14 Horizontalement : la première lettre de chaque groupe avance dans l'alphabet (D – E – … – G – H). Nous cherchons donc un ensemble qui commence avec F. (Solutions possibles A, D et E) et D). La seconde lettre de chaque groupe recule d'une place dans l'alphabet (Q – P – … – N – M), iI faut donc un ensemble qui a également un O en seconde lettre (solutions possibles A, C et D).

Solutions possibles avec les deux critères : A), D).

Verticalement : les lettres progressent dans l'alphabet et passant de la première à la dernière lettre de chaque groupe et de groupe en groupe en descendant B – C/D – E/ …-…/H – I/J – K. Il manque donc un groupe qui commence par F et se termine par G.

Solutions possibles : A).

Réponse : A

15 Horizontalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent à une lettre d'écart (TuV – DeF etc.).

Solutions possibles : C), D), E).

Verticalement : Les deux premières lettres de chaque groupe se suivent à rebours avec un écart d'une lettre : KjI, QpO …

Solutions possibles : A), B), C).

Réponse : C

16 Horizontalement : deux consonnes identiques et un E par groupe.

Solutions possibles : A), B), C).

Verticalement : les deux dernières lettres de chaque groupe se suivent à rebours avec un écart d'une lettre : HgF, PoN, etc.

Solutions possibles : A), D).

Réponse : A

17 Horizontalement : deux voyelles par groupe.

Solutions possibles : A), C), E).

Verticalement : deux lettres qui se suivent.

Solutions possibles : B), D), E).

Réponse : E

18 Horizontalement : Les premières lettres de chaque groupe avancent dans l'alphabet (B – C – D…) ; Les secondes lettres avancent dans l'alphabet sautant une lettre à chaque fois (R s T u V …); les troisièmes lettres avancent dans l'alphabet sautant deux lettres à chaque fois (U vw X yz A …).

Solutions possibles : E).

Verticalement : L'alphabet s'inscrit en diagonale 1re lettre 1er groupe – 2e lettre deuxième groupe, 3 ème lettre, troisième groupe, 1re lettre quatrième groupe etc. Chaque lettre suit donc celle juste au-dessus à gauche.

Solutions possibles : E).

Réponse : E

Notons au passage qu'il s'agit ici véritablement de deux séries dans le sens traditionnel du terme. Chaque lettre progresse par rapport à une autre : toutes les lettres ont une fonction. Il suffit de trouver une des deux séries pour avoir la solution, mais il vaut mieux quand même s'assurer que cette solution est possible avec l'autre série aussi.

19 Horizontalement : les lettres de chaque groupe se suivent avec 3 lettres d'écart à chaque fois (LmnOpqR – EfgHijK – etc.).

Solutions possibles : B), C), E).

Verticalement : dans chaque groupe, une voyelle est toujours suivi d'une lettre qui la suit de 3 places dans l'alphabet. OpqR, IjkL …

Solutions possibles : B), D).

Réponse : B

20 Horizontalement : Les deux premières lettres de chaque groupe viennent en ordre alphabétique avec un écart de + 1 (R s T, M n O) etc.

Solutions possibles : A), B), C).

Verticalement : la somme de la valeur des lettres (selon leur position A = 1 etc) est toujours = à 10 (GAB = 7 + 1 + 2 = 10, FBB = 6 + 2 + 2 = 10, AHA = 1 + 8 + 1 = 10, ECB = 5 + 3 + 2 = 10).

Solutions possibles : B) (BDD = 2 + 4 + 4 = 10), D) (AFC = 1 + 6 + 3 = 10), E) (CAF = 3 + 1 + 6 = 10).

Réponse : B

Séries doubles – Chiffres

21 Horizontalement : les deux premiers chiffres de chaque groupe se suivent en ordre numérique inverse.

Solutions possibles : B), C).

Verticalement : les deux derniers chiffres de chaque groupe sont identiques.

Solutions possibles : B), D).

Réponse : B

22 Horizontalement : le chiffre du milieu de chaque groupe est toujours 8.

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : le premier et le troisième chiffre de chaque groupe se suivent numériquement.

Solutions possibles : B), C).

Réponse : B

23 Horizontalement : Chaque groupe comprend un 5.

Solutions possibles : B), D).

Verticalement : Les chiffres de chaque groupe progressent en sautant un chiffre à chaque fois. ($4 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{+1} 8 - 6 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{+1} 0 - 9 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 3$) Ne pas oublier que les chiffres sont pris en boucle, après 9 vient 0 puis 1 de nouveau.

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : D

24 Horizontalement : que des chiffres pairs.

Solutions possibles : A), C).

Verticalement : la somme des deux premiers chiffres de chaque groupe est toujours égale à 8.

Solutions possibles : A), B), D).

Réponse : A

25 Horizontalement : Les écarts entre les chiffres sont toujours les mêmes dans tous les groupes : + 2 puis + 3. ($2 + 2 = 4 + 3 = 7$, $5 + 2 = 7 + 3 = 0$).

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : Chaque groupe comprend un 7.

Solutions possibles : A), B).

Réponse : A

26 Horizontalement : dans chaque groupe, la somme des deux premiers chiffres = le troisième ($5 + 4 = 9$, $2 + 3 = 5$ …).

Solutions possibles : A), B), C).

Verticalement : dans chaque groupe, la somme du premier et du dernier numéro toujours = 10.

Solutions possibles : B), D).

Réponse : B

27 Horizontalement : les deux derniers chiffres de chaque groupe se suivent en ordre inverse.

Solutions possibles : A), B).

Verticalement : premier chiffre = différence des deux suivants ($A = B - C$ ou $A = C - B$).

Solutions possibles : B), C), D).

Réponse : B

28 Horizontalement : tous les chiffres de tous les groupes sont impairs.

Solutions possibles : A), C).

Verticalement : tous les nombres sont divisibles par 3 (les trois chiffres de chaque groupe sont donc considérés comme formant un nombre à trois chiffres).

Solutions possibles : B), C), D).

Réponse : C

29 Horizontalement : tous les nombres (de 3 chiffres) sont divisibles par 11 (143 ÷ 11 = 13, 594 ÷ 11 = 54, 231 ÷ 11 = 21 869 ÷ 11 = 79).

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : Le dernier chiffre de chaque groupe avance numériquement en lisant de haut en bas (5 – 6 – … – 8 – 8) Manque donc un groupe se terminant par 7.

Solutions possibles : B), C).

Réponse : B (407 ÷ 11 = 37)

30 Horizontalement : série horizontal où les nombres (de 3 chiffres) augmentent de 123 à chaque fois (448 (+ 123 =) 571 (+ 123 =) 694 (+ 123 =) 817.

Solutions possibles : C). (325 (448 – 123)) Exemple rare où la solution d'un alignement est unique et où, donc, il n'est pas théoriquement nécessaire de trouver la solution de l'autre alignement. A moins d'être pressé par le temps, cependant, il est sage de s'assurer que la solution fonctionne aussi pour l'autre alignement, au cas où le critère trouvé ne soit pas le bon.

Verticalement : tous les groupes de 3 chiffres forment des nombres divisibles par 5.

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : C

31 Horizontalement : un premier raisonnement suggère les nombres divisibles par 5, mais cela laisse deux solutions possibles. Dans un deuxième temps, on affinera à divisible par (ou multiple de) 25.

Solutions possibles : C), D).

Verticalement : en lisant de haut en bas, le premier chiffre de chaque groupe forme la série des nombres pairs en ordre croissant (2 – 4 – 6 …) tandis que le dernier chiffre forme la série des nombres impairs en ordre décroissant (9 – 7 – 5 …). Il faut donc un nombre qui a 6 en premier et 5 en dernier.

Solutions possibles : A), C).

Réponse : C

32 Horizontalement : des carrés, suivi du nombre à l'origine de ce carré : 64 8 (8 × 8 = 64), 49 7 (7 × 7 = 49) etc.

Solutions possibles : A) (5 × 5 = 25), C) (6 × 6 = 36).

Verticalement : la somme des deux premiers chiffres de chaque groupe toujours = 7.

Solutions possibles : A), B), D).

Réponse : A

33 Horizontalement : les deux derniers chiffres de chaque groupe sont en ordre numérique décroissant.

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : chaque nombre est suivi par son triple (7 (3 × 7 =) 21), (4 (3 × 5 =) 15) etc.

Solutions possibles : B), C).

Réponse : C

34 Horizontalement : de gauche à droite : le premier chiffre de chaque groupe augmente de 1 ; le second chiffre de chaque groupe diminue de 1 ; le troisième chiffre de chaque groupe augmente de 1 (mais on peut négliger ce dernier critère puisque le choix de solution n'a que des 0).

Solutions possibles : D).

Verticalement : de haut en bas, les deux premiers chiffres donnent successivement les carrés moins 1. 10 × 10 = 100 – 1 = 99, 9 × 9 = 81 – 1 = 80, 8 × 8 = 64 – 1 = 63, etc. Le dernier chiffres est toujours 0.

Solutions possibles : D).

Réponse : D

35 Horizontalement : prendre les deux premiers chiffres comme un nombre, son double donne les deux chiffres suivants : 12 (× 2 =) 24, 49 (× 2 =) 98, 23 (× 2 =) 46, 34 (× 2 =) 68.

Solutions possibles : A), C), D).

Verticalement : les trois premiers chiffres viennent en ordre numérique.

Solutions possibles : B), D), E).

Réponse : D

36 Horizontalement : la somme des trois chiffres de chaque groupe augmente de 1 en progressant vers la gauche : 7 + 4 + 1 = 12, 5 + 3 + 5 = 13, 4 + 4 + 6 = 14, ? = 15, 7 + 1 + 8 = 16.

Solutions possibles : A), B), D).

Verticalement : tous les groupes contiennent un 7. À ce stade, on ne s'attend pas à trouver un critère si simple qu'il est facile de passer à côté !

Solutions possibles : A), C), E).

Réponse : A

37 Horizontalement : série de gauche à droite où chaque nombre (de 3 chiffres) augmente de 123 à chaque fois (on remarquera, pour commencer, la progression régulière de 3 en 3, du chiffre à droite).

Solutions possibles : A).

Verticalement : Premier chiffre = différence des deux suivants : 2 = 6 – 4, 9 = 9 – 0, 7 = 8 – 1, 4 = 7 – 3.

Solutions possibles : A), B), C).

Réponse : A

38 Horizontalement : tous les nombres sont divisibles par 9 : 774 ÷ 9 = 86, 279 ÷ 9 = 31, 648 ÷ 9 = 72, 351 ÷ 9 = 39. Le critère divisible par 3 donne des solutions multiples.

Solutions possibles : B) 738 ÷ 9 = 82, C) 423 ÷ 9 = 47.

Verticalement : tous les groupes contiennent trois chiffres qui se suivent numériquement, mais dans des ordres différents.

Solutions possibles : A), C), D).

Réponse : C

39 Horizontalement : les carrés croissent régulièrement : $169 = 13^2$, $196 = 14^2$, $225 = 15^2$, $? = 16^2$, $289 = 17^2$.

Solutions possibles : E) $256 = 16^2$.

Verticalement : le carré d'un nombre suivi du nombre + 1. 165 : $4^2 = 16$, $4 + 1 = 5$, 649 : $8^2 = 64$, $8 + 1 = 9$, etc.

Solutions possibles : A) 043 ($2^2 = 4$, $2 + 1 = 3$), E) 256 ($5^2 = 25$, $5 + 1 = 6$).

Réponse : E

40 Horizontalement : un nombre précédé de son triple 9 (÷ 3 =) 3, 24 (÷ 3 =) 8, ? (÷ 3 =) ?, 63 (÷ 3 =) 21, 18 (÷ 3 =) 6.

Solutions possibles : A) 183(÷ 3 =)61, B) 3(÷ 3 =)1, C) 63(÷ 3 =)21.

Verticalement : série de haut en bas, les nombres premiers se terminant par 1 en ordre croissant. (le critère « nombre se terminant par 1 » admet plusieurs réponses)

Solutions possibles : B).

Réponse : B

Autres démarches logiques 4

Au-delà des grands classiques (séries, intrus, séries doubles) les concours des écoles de commerce présentent régulièrement des questions de logiques plus variées. Celles-ci peuvent être intégrées aux questions mathématiques ou former des sections à part entière, selon les concours. Même si nombre d'entre-elles utilisent des chiffres et des nombres, la démarche est avant tout logique, les connaissances mathématiques pour les résoudre étant minimes.

Les schémas numériques

Dans une démarche qui rappelle celle des séries dans les grilles (voir chapitre séries), il s'agit ici presque toujours de compléter un schéma contenant des nombres. Le raisonnement est à trouver soit dans des exemples précédents, soit dans une autre partie de la grille. La difficulté de ces exercices est de trouver le raisonnement qui s'applique parmi la vaste multitude des possibilités, plutôt que dans les démarches mathématiques proprement dites qui se bornent généralement aux opérations les plus simples.

Exemple 1

Quel nombre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

5	8	2	15
7	7	3	17
9	8	7	24
2	4	7	?

On retrouve dans ces casse-tête des logiques semblables à celles que nous avons déjà vues dans les chapitres précédents avec diverses combinaisons d'additions, de soustractions et d'autres opérations, soit horizontalement, soit verticalement, ou même dans les deux sens à la fois. Ci-dessus, il s'agit d'une addition horizontale toute simple…

Solution exemple 1

13 La quatrième case à droite représente la somme des trois cases à gauche.

Mais souvent, même quand l'opération est simple, il n'est pas évident de la trouver :

Exemple 2

Quel nombre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

7	5	12	3
9	2	1	15
11	8	0	8
14	2	3	?

Il faut chercher l'opération à appliquer ainsi que le sens de lecture.

Solution exemple 2

8 Le total de chaque ligne = toujours 27

Parfois, il n'y a même pas d'opération, mais seulement un problème de répartition, ou de disposition de données ultra-simples.

Exemple 3

Quel nombre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

14	15	19	20
8	13	16	18
7	9	12	17
5	6	10	?

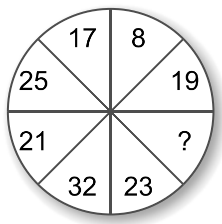
Solution exemple 3

11 La grille est remplie avec les nombres qui se suivent à partir de 5. On commence dans le coin en bas à gauche, puis en remontant par diagonales successives, alternativement dans un sens et dans l'autre. Si on y pense la solution paraît évidente, mais si on aborde la grille en cherchant des opérations, de précieuses minutes peuvent s'écouler avant que l'on ne trouve l'explication simplissime.

Le schéma n'est pas nécessairement une grille. On retrouve régulièrement des cercles et des « arbres ». La forme du schéma n'est jamais tout à fait gratuite. Les opérations dans une grille tiennent compte du nombre de cases par rangée, par colonne. Dans un cercle, on considère les mouvements dans le sens des aiguilles d'une montre et en sens inverse, les sections opposées, alternées, etc.

Exemple 4

Quel nombre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

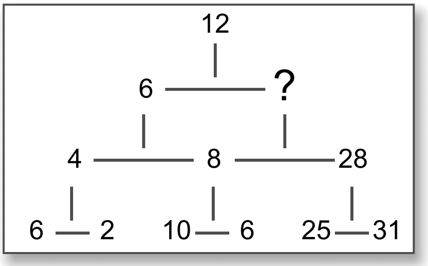


Solution exemple 4

15 Les sections opposées contiennent toutes un total de 40.

« L'Arbre » implique par sa disposition un sens de lecture :

Exemple 5



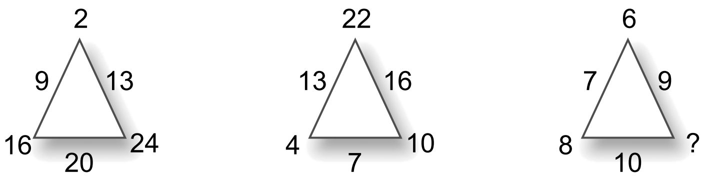
Solution exemple 5

18 Chaque nombre est la moyenne des deux nombres au-dessous.

Les questions en schéma que nous avons vues jusqu'à présent s'appliquent à une seule grille et c'est en analysant certaines de ses parties que l'on comprend le principe de sa construction. Une démarche analogue se retrouve avec des schémas plus simples, mais répétés plusieurs fois :

Exemple 6

Quel nombre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

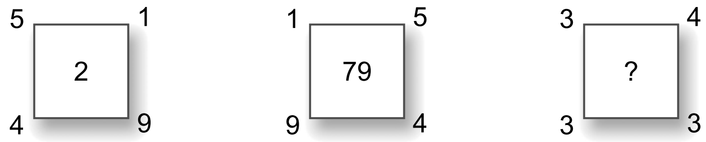


Solution exemple 6

12 Le nombre au milieu de chaque côté = la moyenne des nombres aux sommets de chaque côté.

Périodiquement, on tombe sur des questions dont le raisonnement est très simple, mais qui va à l'encontre d'un certain esprit mathématique. Les as des chiffres chercheront de nombreuses logiques avant de tomber sur la bonne, toute bête…

Exemple 7



Solution exemple 7

1 Prendre les deux chiffres du haut comme un seul nombre à deux chiffres. Faire la même chose avec les chiffres du bas, puis noter la différence entre les deux. 51 – 49 = 2, 94 – 15 = 79, 34 – 33 = 1.

Les « tests de raisonnement »

Ce titre un peu étrange (comme s'il existait des tests qui ne demandaient pas de raisonner) recouvre des questions alpha-numériques utilisées régulièrement dans les tests d'entreprise et, de temps à autre, par certains tests d'entrée aux écoles de commerce. Nous sélectionnons ceux qui apparaissent le plus souvent dans ces derniers.

Très souvent, nous retrouvons un lien entre lettres et nombres selon des règles différentes, à déterminer à chaque question. Cela va de l'ultra-classique où les lettres ont leur valeur numérique :

Exemple 8

Si ADAM = 19, EVE = 32, NOE = 34, que vaut JOB ?

Solution exemple 8

27 Chaque lettre = son rang alphabétique, donc ADAM = 1 + 4 + 1 + 13 = 19, EVE = 5 + 22 + 5 = 32, NOE = 14 + 15 + 5 = 34 et JOB = 10 + 15 + 2 = 27.

à une autre forme de raisonnement basées sur les consonnes et les voyelles :

Exemple 9

Si CHAPITRE = 53, PAGE = 22, FEUILLE = 34, que vaut LIVRE ?

Solution exemple 9

32 Premier chiffre = nombre de consonnes dans le mot, second chiffre, nombre de voyelles.

Les logiques à trouver peuvent être plus obscures, ou il peut s'agir tout simplement d'un petit problème mathématique où chaque lettre a une valeur qui lui est attribuée arbitrairement et qu'il faut retrouver par de successives soustractions, additions et substitutions.

Exemple 10

Si TENOR = 44 NETTE = 43
ROTER = 53 et RENTE = 50
TONNER = 49 .... ORNER = ?

Solution exemple 10

ORNER = 51 (T = 7 E = 12 N = 5 O = 6 R = 14)

Le fait que les lettres forment des mots gênent certains candidats, mais Il faut procéder comme avec n'importe quel symbole. TONNER (49) moins TENOR (44) = N (et donc N = 49 – 44 = 5). TENOR – N = TEOR (44 – 5 = 39). ROTER – TEOR = R (et R = 53 – 39 = 14). RENTE – N – R = ETE (50 – 5 – 14 = 31). NETTE – ETE – N = T (43 – 31 – 5 = 7). ETE – T = EE (31 – 7 = 24, donc E = 12). TENOR – T – N – R – E = O = 6

Avec un aspect semblable, mais un raisonnement tout autre, les lettres peuvent remplacer non pas des valeurs mais des chiffres. Ainsi AB ne signifie pas A + B, ni A × B, mais AB un nombre à deux chiffres où A est le nombre des dizaines et B celui des unités.

Exemple 11

A + A + A = B C
B + B + B + C = A
A = ?

Solution exemple 11

A = 7 (7 + 7 + 7 = 21 et 2 + 2 + 2 + 1 = 7).

Le A représente un chiffre supérieur à 4 (le minimum possible pour la seconde addition étant 1 + 1 + 1 + 2). Le B représente soit le 1 soit le 2, car si B = 3, le résultat de la deuxième addition aurait deux chiffres. Le A ne peut être 5, sinon le dernier chiffre de la première addition serait 5. Le A ne peut être 9 non plus, car dans ce cas le C à la fin de la première addition = 8 et si C = 8, la seconde addition = plus que 10. A représente donc soit 7, soit 8. Mais si A = 8, B et C = 2 et 4 et l'addition du bas donne de nouveau un résultat supérieur à 10. Donc le A = 7, le B 2 et le C 1.

Mentionnons pour terminer dans cette catégorie des raisonnements qui n'ont de numérique que l'usage de chiffres, mais ceux-ci sont utilisés comme des symboles et pourraient être remplacés par d'autres signes.

Exemple 12

CREPON - 736529 :: PONCER - _ _ _ _ _ _

Solution exemple 12

529763 Chaque lettre est associée à un chiffre selon l'ordre. Ici C et 7, R et 3, etc. Ensuite, il faut remettre les chiffres selon le nouvel ordre des lettres C = 7 passe de la première position à la quatrième, etc.

La question vient souvent telle quelle, sans consignes. C'est au candidat de deviner qu'il faut mettre un chiffre sur chaque tiret. Il s'agit en fait de codage plutôt que d'énigme numérique. D'ailleurs, la question se présente souvent en ordre inverse :

Exemple 13

ECRANS - 745219 :: 521479 - _ _ _ _ _ _

Solution exemple 13

RANCES Même principe que la question précédente, mais le fait que l'on forme un mot rend l'exercice plus facile.

Les analogies

Des exercices d'aspect semblable peuvent recouvrir des logiques toutes différentes. Dans les tests d'analogies verbales, le mot à trouver ne l'est plus selon sa forme (la répartition des lettres), mais selon sa signification. La ressemblance n'est que dans la présentation et le candidat voit tout de suite de quoi il retourne.

Voici un exemple très simple :

Exemple 14

LOURD : LEGER :: JEUNE - _ _ _ _ _

Les deux premiers mots sont des antonymes, et par analogie, il va falloir mettre deux antonymes dans la seconde partie. Notez que le nombre de tirets indique le nombre de lettres, donc la solution « Âgé » qui serait valable en soi, n'est pas la bonne…

Solution exemple 14

VIEUX Antonyme de « jeune » en cinq lettres.

Ces analogies peuvent être beaucoup plus subtiles et complexes, surtout quand deux termes de la comparaison manquent :

Exemple 15

… est à complet, ce que hésitante est à …

1. costume/robe
2. entier/incertaine
3. rempli/vide
4. succès/échec

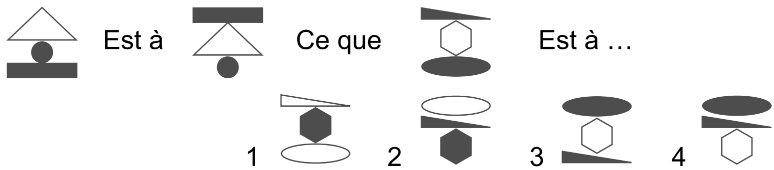
Le principe de ces analogies verbales permet de nombreuses variantes à la fois sur la présentation (avec ou sans choix de solution, une ou deux inconnues, etc.) mais surtout sur la base de l'analogie : synonymes et antonymes, bien entendu, mais d'innombrables autres possibilités : cause effet, objet matériau, intérieur extérieur, métier outil, masculin féminin, etc.

Solution exemple 15

2 Synonymes Entier et complet signifient la même chose, tout comme hésitante et incertaine.

On retrouve également les analogies sous forme graphique dans des exercices où il faut ouvrir l'œil et rester attentif !

Exemple 16



Analyser la transformation des deux premières figures : ordre, couleur, orientation, et ensuite l'appliquer à la troisième.

Solution exemple 16

4 L'ordre des figures est modifié : celle du haut passe au milieu, celle du milieu va en bas et celle du bas se retrouve en haut

Affirmations et déductions

Au milieu de la section mathématique ou ailleurs, certains concours glissent des questions qui sous un aspect numérique sont en fait des exercices de raisonnement logique. Cela vaut la peine d'examiner la question froidement quelques instants et chercher la meilleure façon de trouver la solution. Certains candidats ont l'esprit si clair et analytique que la simple lecture de l'énoncé suffira pour trouver, sinon la solution, tout du moins le processus mental pour y arriver. La plupart d'entre nous, cependant, devra réfléchir plus longtemps que ça et si nous disposons d'un schéma ou autre support graphique pour nous aider à réfléchir, il est toujours le bienvenu. Ces supports sont parfois fournis avec la question, mais la plupart du temps, c'est au candidat de le dessiner rapidement pour son usage personnel. Selon le type de question, différents schémas donneront les meilleurs résultats.

Classement

Les questions de classement demandent au candidat d'établir un ordre de grandeur entre diverses choses ou personnages selon des données fragmentaires ou elliptiques.

Souvent, la question n'est pas très ardue, mais il est difficile de retenir toutes les informations de l'énoncé. Dans ces cas-là, il est recommandé de dessiner un tableau où vous notez d'une part les personnes ou objets à trier, et d'autre part l'ordre à établir. Ensuite, vous notez les informations qui sont fournies et éventuellement les conséquences de ces annotations (si une rangée ou colonne ne contient qu'une case possible, c'est la bonne ; si une case est attribuée dans une colonne ou une rangée, toutes les autres cases de ces alignements sont à biffer, etc.). La solution peut fort bien apparaître quasi mécaniquement, sans que de nouvelles informations soient à extraire des données.

Avec la question suivante, par exemple :

Exemple 17

Cinq cyclistes qui ont 18, 19, 22, 24 et 27 ans, roulent en file indienne le long d'une route. Donnez l'ordre des cyclistes, sachant que :

A. Ni celui de 22 ans ni celui de 27 ans ne sont en tête ou en dernière position.

B. Celui de 19 ans est plus vers l'avant que celui de 22 ans, mais moins que celui de 24 ans.

C. Celui de 27 ans est plus vers l'avant que celui de 19 ans.

ÂGE CLASSEMENT					
	5e	4e	3e	2e	1
18					
19	B	B		C	B
22	A				A
24					
27	A		C		A

Une fois toutes les impossibilités notées (pour plus de clarté, nous avons marqué les impossibilités de l'initiale de l'affirmation d'où elles découlent) le raisonnement suit quasi-mécaniquement.

Avec l'affirmation C, nous savons que 27 est plus vers l'avant que 19, mais 19 ne peut être que 3^{e} ou 2^{e}, et 27 ne peut être premier. Donc 19 ne peut être 2^{e} et 27 ne peut être que 3^{e} ou 4^{e}. Ensuite, il suffit de remplir la grille pour qu'il y ait au moins un et seulement un résultat positif par rangée et par colonne.

Solution exemple 17

Premier 24 ans, suivi de 27 ans, troisième 19 ans, puis 22 ans et 18 ans en dernier.

Choix multiples

Au lieu de porter sur un ordre à établir, les questions demandent souvent de répartir des choix possibles entre diverses possibilités. Là encore, les informations sont données de façon partielle et un tableau peut aider à les recouper. Si les choix sont restreints, on peut utiliser avantageusement un tableau des plus simples où toutes les diverses possibilités sont données. Il suffit ensuite de barrer les impossibilités. Là encore, avec les questions simples, la conclusion s'impose de façon quasi mécanique :

Exemple 18

Lors d'une soirée, les trois amies Maria, Aïcha et Clémentine ont échangé leurs bijoux. Nous savons que chacune porte le collier d'une de ses amis et le bracelet d'une autre. Si celle qui porte le collier de Maria porte le bracelet de Clémentine, alors :

A. Maria porte le collier d'Aïcha oui/non

B. Aïcha porte le bracelet de Clémentine oui/non

C. Clémentine porte le collier de Maria oui/non

D. Le bracelet de Maria est porté par Clémentine... oui/non

	Maria	Aïcha	Clém
Collier	A / C	M / C	M / A
Bracelet	A / C	M / C	M / A

Une fois le schéma réalisé, il suffit de barrer les impossibilités à partir de l'information dont on dispose et la solution apparaît.

Solution exemple 18

A : Non, B : Oui, C : Non, D : oui.

Maria collier Clémentine et bracelet Aïcha,

Aïcha collier Maria et bracelet Clémentine,

Clémentine collier Aïcha et bracelet Maria.

(Celle qui porte le collier de Maria et le bracelet de Clémentine ne peut être qu'Aïcha. Ensuite il suffit d'éliminer).

Logigramme

Si le nombre de possibilités est plus complexe avec un nombre de variables qui ne permet pas de noter tous les choix, il faut avoir recours au « tableau de vérité » ou « arlequin ». Ces grilles que l'on retrouve dans les problèmes de « logigramme » ne contiennent pas des informations à barrer, mais des cases vides à remplir. La démarche n'est pas tout à fait la même, mais certaines règles se retrouvent : quand une solution est trouvée dans une rangée ou colonne, toutes les autres possibilités de cette rangée ou colonne sont à éliminer.

Dans les concours d'entrée aux écoles de commerce, il y a rarement des problèmes de logigramme complexe avec un nombre considérable d'inconnu, mais l'usage du « tableau de vérité » peut être utile, même avec des casse-tête relativement simples.

Exemple 19

Arnaud, Bruno et Blaise, trois camarades de fac viennent de Lyon, Marseille et Bordeaux et ont chacun un sport préféré : le tennis, la natation et le cyclisme. Sachant que :

1. Arnaud et celui qui joue au tennis passent leurs vacances chez le Marseillais ;
2. Bruno, qui ne vient pas de Marseille, ne pratique pas le cyclisme ;
3. Arnaud ne vient pas de Bordeaux ;
4. Celui qui pratique le cyclisme, ne vient pas de Lyon.

A. Blaise vient de Bordeaux Vrai/Faux

B. Bruno pratique la natation Vrai/Faux

C. Le Marseillais pratique le tennis Vrai/Faux

	Lyon	Marseille	Bordeaux	Tennis	Natation	Cyclisme
Arnaud						
Bruno						
Blaise						
Tennis						
Natation						
Cyclisme						

Grâce à ce petit tableau, on peut ordonner les données pour en tirer rapidement les conclusions nécessaires. Quelques précautions : pour aller vite, on a tendance à désigner chaque catégorie par une simple initiale. C'est une pratique utile, mais il faut faire attention. Souvent les concours donnent des noms qui créent des ambiguïtés. Ici par exemple, il faut distinguer Bruno et Blaise et ne pas faire de confusion avec Bordeaux ! La question vient sous la forme de trois affirmations qu'il faut confirmer ou infirmer. Assez souvent, il n'est pas nécessaire de compléter entièrement la grille pour pouvoir y répondre (mais entraîné par le défi, le concurrent continue souvent à fignoler des détails qui ne font que perdre du temps…). Attention, finalement, à bien tirer toutes les informations d'une affirmation, mais pas plus qu'elle ne contient.

Par exemple, avec l'affirmation 1 ci-dessus. Il est légitime de conclure qu'Arnaud ne joue pas au tennis, qu'il n'habite pas Marseille et que le Marseillais ne joue pas au tennis. Avec l'affirmation 2, cependant, On peut conclure que Bruno ne vient pas de Marseille et ne fait pas de cyclisme, en revanche on ne peut conclure que le Marseillais ne pratique pas le cyclisme.

Solution exemple 19

A : Faux, B : Faux, C : Faux

- Arnaud – Lyon – Natation,
- Bruno – Bordeaux – Tennis,
- Blaise – Marseille – Cyclisme

Dans le tableau ci-dessous, nous avons noté les impossibilités du numéro de l'affirmation d'où elles découlent. Nous voyons qu'à ce stade les conclusions Arnaud-Lyon et Blaise-Marseille s'imposent (et donc par élimination Bruno-Bordeaux). Ensuite, comme Blaise est Marseille et que Marseille n'est pas tennis, Blaise n'est pas tennis, ce qui ne laisse que Bruno pour Tennis, etc.

	Lyon	Marseille	Bordeaux	Tennis	Natation	Cyclisme
Arnaud		1	3	1		
Bruno		2				2
Blaise						
Tennis		1				
Natation						
Cyclisme	4					

Avec des si

Autre exercice de logique que l'on rencontre régulièrement dans certains concours : à partir de plusieurs affirmations conditionnelles, on doit établir une situation pour pouvoir décider de la validité ou pas des conclusions proposées.

Avec ce genre de casse-tête, la plupart du temps, le tableau n'est pas d'une grande utilité. Il vaut mieux établir des chaînes de conséquences aux conditions. Dès que l'on tombe sur une contradiction, alors la chaîne entière n'est pas valable.

Par exemple : si A = oui, alors B = non, et si B = non, alors A = non. La contradiction A = oui puis non, indique que le début de la chaîne est faux. Parfois la chaîne peut déboucher sur rien : si A = oui, alors B = non, mais ensuite aucune affirmation ne nous dit ce qui se passe si B = non. La chaîne est peut-être valable, peut-être pas, il faut vérifier ailleurs.

Notez bien le sens de la condition : « Si A = oui, alors B = non », indique que si on peut établir que A = oui, alors B ne pourra être que non. Mais il ne s'en suit pas que l'inverse s'applique, si B = non il n'est pas automatique que A = oui.

Ni d'ailleurs que si A = non que B = oui. La condition se limite strictement à ce qu'elle affirme.

Exemple 20

Trois fillettes parlent entre elles du déguisement qu'elles vont mettre à une soirée costumée. Une chose est certaine : elles vont chacune prendre un déguisement différent, mais elles hésitent entre une princesse, une sorcière et un chat. Chacune fait la déclaration suivante :

Émilie : Si Gabby se déguise en princesse, alors moi, je m'habille en sorcière.

Flavie : Si Émilie se déguise en sorcière, alors moi je m'habille en princesse, mais si elle s'habille en chat, alors je me déguiserais en, sorcière.

Gabby : Si Flavie ne se déguise pas en chat, alors moi je me déguiserais en sorcière.

A. Émilie va se déguiser en chat. vrai/faux

B. Flavie va se déguiser en princesse. vrai/faux

C. Gabby va mettre une robe de sorcière. vrai/faux

D. Pour deux d'entre elles, il n'est pas possible de déterminer ce qu'elles vont mettre. vrai/faux

On peut établir successivement des chaînes de conséquences :

Si Gabby princesse → Émilie sorcière,

Si Émilie sorcière → Flavie princesse. Ce qui est impossible car Gabby et Flavie sont en princesses. On cherche donc d'autres pistes et éventuellement on trouve la seule solution possible.

Solution exemple 20

A : Faux, B : Faux, C : Vrai, D : Faux.

Émilie princesse, Flavie chat, Gabby sorcière.

On trouve la solution en cherchant les trois possibilités pour Émilie.

1. Si Émilie en sorcière, Flavie en princesse, donc pas en chat et Gabby en sorcière. Impossible : deux sorcières.

2. Si Émilie en chat, Flavie en sorcière donc pas en chat et Gabby en sorcière. Impossible : deux sorcières.

3. Reste donc pour Émilie la princesse.

Flavie se déguise donc soit en Sorcière, soit en chat. Si elle se déguise en sorcière elle n'est pas en chat et Gabby se déguise également en sorcière : impossible.

Reste pour Flavie de se déguiser en chat. Ce qui laisse la sorcière pour Gabby.

On remarque la situation intéressante qu'en fait Gabby se déguisait en sorcière que Flavie soit en chat ou pas.

Les syllogismes et apparentés

Depuis la Grèce antique, le syllogisme est un mode de raisonnement qui continue d'avoir ses adeptes. Le principe est tout simple : à partir de deux propositions avérées on obtient une conclusion. Celle-ci à son tour peut alors servir de prémisse pour un autre syllogisme. L'exercice devrait être facile et pourtant, cela fait plus de deux mille ans que les étudiants tombent dans les mêmes pièges. Quand les affirmations recoupent le sens commun, elles paraissent aller de soi, comme avec le célèbre exemple :

- Tous les hommes sont mortels.
- Socrate est un homme.
- Donc Socrate est mortel.

Exemple qui est souvent accompagné de sa version fausse :

- Socrate a une tête.
- Tous les chiens ont une tête.
- Donc Socrate est un chien.

L'erreur est d'autant plus évidente que nous savons d'avance, sans le moindre raisonnement, qu'elle est fausse. Mais imaginez qu'il s'agisse de descriptif d'engins mystérieux :

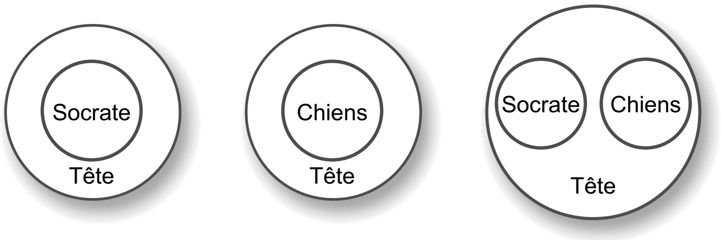
- Le Fibreur a une manillette.
- Tous les Crispeurs ont une manillette.
- Donc les Fibreuses sont des Crispeurs.

Cela devient déjà beaucoup moins évident. Plus trompeur encore, le syllogisme faux qui aboutit à une conclusion qui est juste. Reprenons exactement le même énoncé :

- Le siamois à une queue.
- Tous les chats ont une queue.
- Donc les siamois sont des chats.

Bien que la conclusion soit vraie, le syllogisme est faux et dans un exercice où il faut dire si un syllogisme est juste ou pas, celui-ci devrait être marqué comme étant faux.

Tout comme le tableau est une aide précieuse pour les problèmes de choix et de classement, les schémas d'ensembles peuvent éclairer la logique des syllogismes :

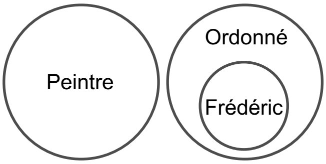


Vous pouvez vous entraîner avec cet exemple simple :

> Exemple 21
>
> Si on suppose que :
>
> - Aucun peintre n'est ordonné,
> - Frédéric est ordonné.
>
> Peut-on conclure que Frédéric n'est pas peintre ?
>
> oui/non

Solution exemple 21

Oui

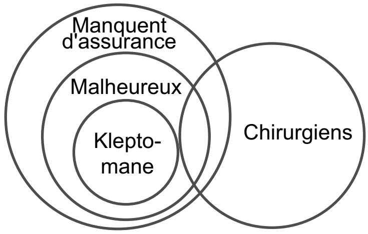


De nombreux casse-tête utilisent le même principe, mais en l'étendant à plusieurs propositions et pour trouver la solution, dès lors que celle-ci n'apparaît pas après simple réflexion, il faut délimiter des ensembles, des sous-ensembles et établir les relations entre celles-ci. La difficulté vient souvent de la bonne compréhension des énoncés et de la transposition exacte dans des ensembles. Il faut être particulièrement attentif aux mots tels que « aucun, tous, certains » qui peuvent inclure ou exclure d'un ensemble. Dans l'exemple suivant, par exemple, il faut être attentif à ces mots, aussi bien dans l'énoncé que dans la formulation des conclusions.

> Exemple 22
>
> Si on suppose que :
>
> - Aucun chirurgien n'est kleptomane,
> - Tous les kleptomanes sont malheureux,
> - Les gens malheureux manquent d'assurance.
>
> La ou lesquelles des conclusions suivantes découle(nt) logiquement de ces affirmations ?
>
> a. Les chirurgiens ne manquent jamais d'assurance.
>
> b. Tous les gens qui manquent d'assurance sont kleptomanes.
>
> c. Tous les chirurgiens sont heureux.
>
> d. Certains kleptomanes sont heureux.
>
> e. Certains chirurgiens sont kleptomanes.

Solution exemple 22

Aucune affirmation juste. La catégorie « manque d'assurance » est la plus large dans laquelle se trouve celle des gens malheureux et dans laquelle se trouve celle des kleptomanes. Les chirurgiens sont partiellement dans la catégorie manquent d'assurance et partiellement dans malheureux, mais pas du tout dans kleptomane.

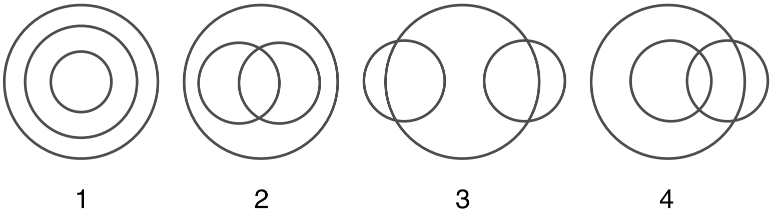


Dérivées de ces casse-tête, quelques questions ont pris les schémas comme une partie intégrante de la question :

Exemple 23

Quel schéma correspond aux affirmations suivantes :

- Tous les chapeliers sont fous,
- Quelques fous sont géniaux.



Solution exemple 23

4 Le grand cercle correspond à l'ensemble des fous. Entièrement dans celui-ci se trouvent les chapeliers (puisqu'ils sont tous fous). A cheval sur ces deux cercles sont les personnes géniales, quelques-uns sont fous et peut-être quelques-uns sont chapeliers, mais quelques-uns ne sont pas fous du tout.

Les menteurs

Dernière catégorie dans cette section : les casse-tête comprenant des affirmations fausses. L'énigme la plus célèbre de ce genre est celle des frères dont l'un dit toujours la vérité et l'autre qui ment systématiquement. Un voyageur veut connaître le chemin pour se rendre dans un village, et justement, son interlocuteur est l'un des deux frères, mais il ne sait pas lequel. Le problème est : quelle est l'unique question que doit poser le voyageur pour connaître la direction à prendre.

La solution : « Si je demandais à ton frère la direction du village, que répondrait-il ? »

Cette formulation donne systématiquement une réponse fausse, pour atteindre le village, il suffit donc d'emprunter la direction opposée à celle donnée.

Des énigmes sur ce modèle apparaissent de temps à autre dans les concours des écoles de commerce. Voici une énigme directement inspirée de l'une de ces questions :

Exemple 24

Dans un test de mémoire, on montre cinq formes : un carré, un triangle, un cercle, un hexagone et une étoile, chacune d'une couleur différente. Après quelques instants, les formes sont retirées et les candidats doivent donner les couleurs telles qu'ils s'en souviennent.

Candidat 1 : Carré bleu, triangle vert, cercle jaune, hexagone blanc, étoile rouge.

Candidat 2 : Carré jaune, triangle vert, cercle rouge, hexagone blanc et étoile bleue.

Il se trouve que le Candidat 1 s'est trompé deux fois, et le candidat 2, trois fois.

Dans ce cas :

A. Le carré est bleu. oui/non

B. Le triangle est blanc. oui/non

C. La forme jaune est le carré. oui/non

D. Il est impossible de connaître la couleur des formes. oui/non

Avec une lecture rapide, on est tenté de répondre D, les erreurs de l'un ne compensant pas apparemment les erreurs de l'autre. À la réflexion cependant, on voit que la personne qui s'est trompée deux fois avait trois réponses justes, donc les deux erreurs sont une permutation des bonnes solutions. À partir de cette observation, on peut trouver la solution.

Solution exemple 24

A : Oui, B : Non, C : Non, D : Non.

Un tableau n'est pas nécessaire, mais il rend les choses plus évidentes :

	carré	triangle	cercle	hexag.	étoile
Candidat 1	bleu	blanc	jaune	vert	rouge
Candidat 2	jaune	vert	rouge	blanc	bleu

Le candidat 1 a donc interverti deux réponses, toutes les autres étant justes. Comme le candidat 2 a commis trois erreurs, les deux dernières étant justes, il s'en suit que les erreurs de l'un sont justes chez l'autre. Il faut donc trouver une permutation de deux formes qui sont également permutées chez l'autre. On voit que c'est le cas du triangle et de l'hexagone. Le candidat 1 a donc tout juste, sauf triangle et hexagone qui sont justes chez l'autre. Soit : carré bleu, triangle vert, cercle jaune, hexagone blanc et étoile rouge.

L'essentiel à retenir

Les schémas numériques

Chercher des combinaisons numériques en tenant compte :

- Du sens de lecture : horizontalement, verticalement, en diagonale, en zigzag, aller-et-retours, colimaçon…
- Des combinaisons numériques : série dans le schéma complet, démarche qui se répète de ligne en ligne ou en colonne, sommes des colonnes identiques, qui progressent, etc.
- Les chiffres représentent généralement leur valeur, mais doivent parfois être lus comme des valeurs (4 + 5 ou 45).

Les tests de raisonnement

Les correspondances lettres/chiffres sont basées sur le nombre de lettres, le rang alphabétique des lettres, première lettre, dernière lettre, nombre de voyelles, de consonnes… L'ordre d'un mot ou d'une séquence se retrouve dans un autre, une démarche en exemple doit être reproduite.

Les analogies

- Analogies verbales : tenir compte du sens et du type de mot (verbe, adjectif, mot savant, argotique…).
- Analogies graphiques : noter les transformations des premières figures et les appliquer à la suivante.

Affirmations et déductions

Utiliser des grilles différentes selon le type de question et la quantité d'information :

- Grille linéaire où l'on introduit soit les possibilités ou les impossibilités.
- Grille avec toutes les possibilités que l'on barre au fil des informations.
- « Tableau de vérité », grille logigramme quand il y a plusieurs inconnus à répartir entre plusieurs cas.
- Raisonnement « avec des si » : suivre une piste et noter les contradictions donc les impossibilités.

Syllogismes et apparentés

- Noter le raisonnement avec des ensembles qui se recoupent.
- Attention aux mots qui incluent, excluent ou incluent partiellement : tous, aucun, certains, plusieurs.

Exercices d'entraînement

Autres démarches logiques

Niveau 1

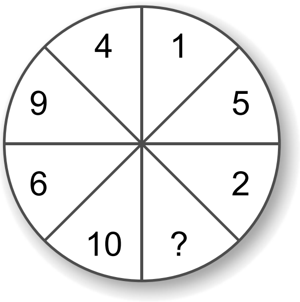
1

7	3	9	1
4	8	2	10
6	9	5	10
5	2	?	?

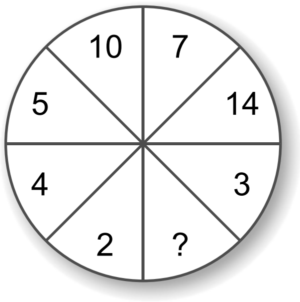
2

2	4	8	14
6	10	16	22
12	18	24	?
20	26	?	?

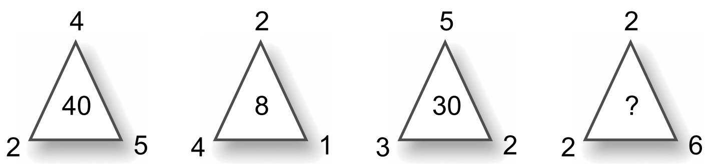
3



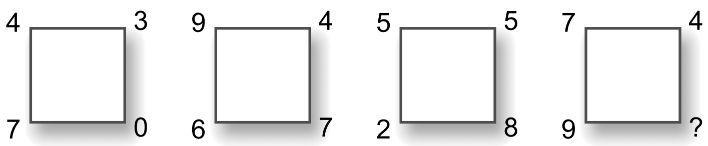
4



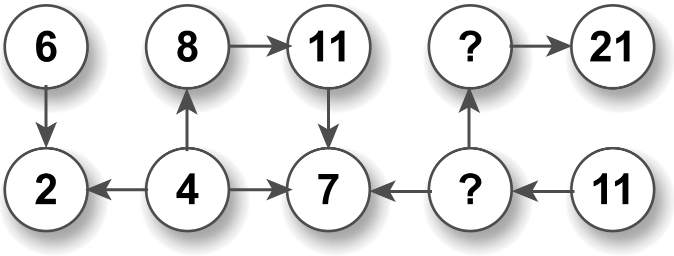
5



6



7 Trouvez la fonction de chaque flèche pour compléter les derniers cercles.



Exercices 8 à 12 : Chaque lettre a une valeur différente, trouvez la valeur du dernier mot.

8

ERE = 13, ERRE = 16, MER = 12,
RUMEUR = 29 . MUSEUM = 29
SEMEUR = ?

9

FORT - FAIBLE - BRAVE - LACHE
COMPLIQUÉ - _ _ _ _ _ _ _

10

COEURS - 632514 :: COURSE - _ _ _ _ _ _

11

F 4 K - P 2 S - S 5 Y - K _ P - E 6 L

12

PRUNE 16 - CITRON 3 - ORANGE _ - COING 3

13 Planter est à récolter, ce que plaisanter est à … :

❐ **1.** rire ❐ **2.** blaguer ❐ **3.** pleurer ❐ **4.** taquiner

14 … est à souris, ce que piano est à … :

❐ **1.** ordinateur/clavier ❐ **2.** chat/orchestre

❐ **3.** souricière/pianiste ❐ **4.** ris/joue

15 … est à poisson, ce que plume est à … :

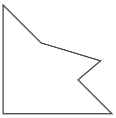
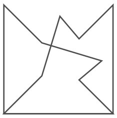
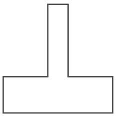
❐ **a.** brochet ❐ **e.** oiseau

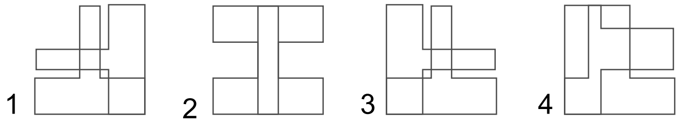
❐ **b.** nageoire ❐ **f.** voler

❐ **c.** écaille ❐ **g.** aile

❐ **d.** nager ❐ **h.** pigeon

16 6 est à 36, et 4 est à 16, ce que 9 est à …

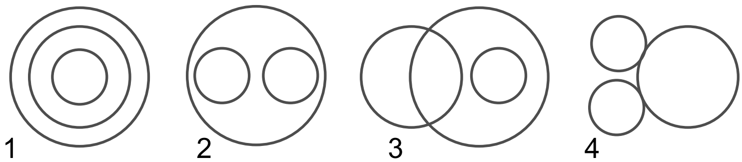
17  Est à  Ce que  Est à …



18 Si Robert Roisset habite au numéro 6 de sa rue, Gaston Zeller au numéro 22, Yollande Uxelle au 4, et Cléopâtre Izenglis au 26, quel devrait être, dans ce cas, le numéro de rue où habite Éric Enthiers ?

19 Quel schéma correspond aux affirmations suivantes :

- Les légumes sont bons pour la santé
- Les carottes sont des légumes



20 Quatre jetons de couleurs bleu, vert, jaune et rouge, sont aligné de gauche à droite.

- Le jeton bleu et le jeton vert ne sont pas côte à côte.
- Le jeton rouge est plus vers la droite que le jeton bleu.
- Le deuxième jeton à partir de la gauche n'est ni le rouge, ni le jaune.

A. Le premier jeton au bout à gauche est le vert. ❐ Vrai/ ❐ Faux
B. Le jeton juste à droite du premier est jaune. ❐ Vrai/ ❐ Faux
C. L'avant dernier jeton à gauche du dernier est rouge. ❐ Vrai/ ❐ Faux
D. Le dernier jeton au bout à droite est le bleu. ❐ Vrai/ ❐ Faux

21 Si Antoine ou Benoît achètent une voiture rouge, alors Charles achètera également une voiture rouge. Mais si Antoine, Benoît et Charles achètent des voitures de couleurs différentes, alors Antoine achètera une voiture bleue. Les trois amis s'achètent une voiture chacun et il y avait une bleu, une rouge et une noire.
A. La voiture d'Antoine est bleu. ❐ Vrai/ ❐ Faux
B. La voiture de Benoît est rouge. ❐ Vrai/ ❐ Faux
C. La voiture de Charles est noire. ❐ Vrai/ ❐ Faux
D. Il est impossible de déterminer la couleur de la voiture de deux d'entre eux. ❐ Vrai/ ❐ Faux

22 Si on suppose que :
• Aucun routier n'est daltonien.
• Les daltoniens sont habiles.
Peut-on en conclure qu'aucun routier n'est habile ? ❐ Oui – ❐ Non

23 Cochez la ou les propositions numérotées qui peuvent découler logiquement des affirmations suivantes :
• Tous les Xanias sont des Yogos.
• Tous les Zazas sont des Yogos.

❐ **1.** Tous les Xanias sont des Zazas.
❐ **2.** Tous les Zazas sont des Xanias.
❐ **3.** Aucun Xania ne peut être Zazas.
❐ **4.** Certains Xanias peuvent être des Zazas.
❐ **5.** Tous les Yogos sont des Xanias.

Niveau 2

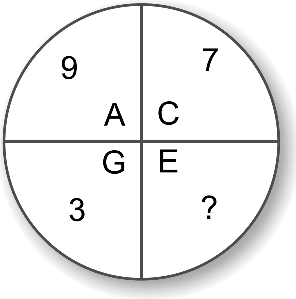
24

8	9	10	11
13	15	17	19
22	25	28	?
35	39	43	?

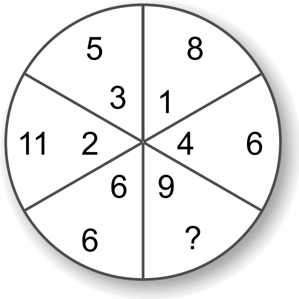
25

2	4	1	7
4	5	12	8
6	3	15	?
5	3	7	?

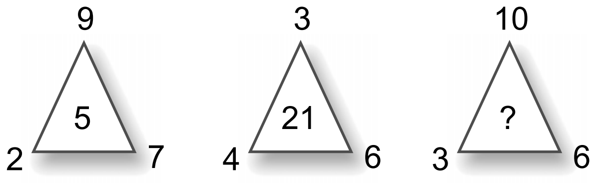
26



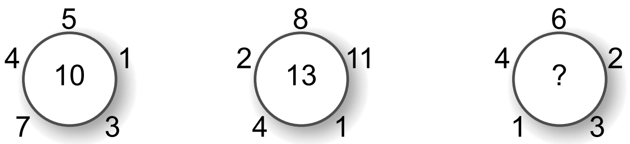
27



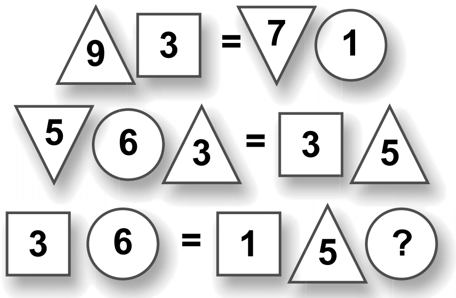
28



29



30 Trouvez la fonction de chaque forme pour compléter la dernière.



Exercices 31 à 35 : Chaque lettre a une valeur différente, trouvez la valeur du dernier mot.

31

ART = 14, CAR = 8, THE = 16

CARIE = 15, CITER = 20

TRICHE = 26, CITHARE = 28

RETRAITE = ?

32 TOUHQE - HOQUET :: NITPEO - _ _ _ _ _ _

33 B 1 A - R 7 K - X 9 O - J 6 D - M _ E

34 CAMION - MANIOC :: 295743 - _ _ _ _ _ _

35 DEPUTE - SENATEUR - MAIRE - <u>PREFET</u> - PRESIDENT
CAPORAL - AMIRAL - GENERAL - COLONEL - SERGENT

36 Chat est à chienne, ce que âne est à … :

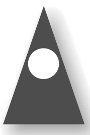
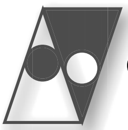
❒ **1.** cheval ❒ **2.** jument ❒ **3.** poulain ❒ **4.** ânesse

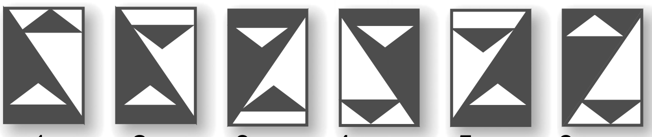
37 … est à mine, ce que sel est à … :

❒ **1.** bombe/saumure ❒ **2.** crayon/cristaux
❒ **3.** charbon/mer ❒ **4.** allure/piquant

38 … est à lenteur, ce que sécurité est à …

❒ **a.** vitesse ❒ **f.** ceinture
❒ **b.** ralentir ❒ **g.** impunité
❒ **c.** conduite ❒ **h.** sociale
❒ **d.** lièvre ❒ **i.** danger
❒ **e.** bêtise ❒ **j.** escargot

39  Est à  Ce que  Est à…



1 2 3 4 5 6

40 Des boîtes contenant des fournitures du bureau sont empilées les unes sur les autres. Elles contiennent : du papier, des stylos, des enveloppes et des étiquettes.

- Le papier et le stylo sont dans des boîtes qui ne se touchent pas.
- Ni les enveloppes, ni les étiquettes ne sont dans la boîte juste sous celle tout à fait en haut.
- Les enveloppes sont dans une boîte qui est plus vers le bas que le papier.

A. La boîte tout à fait en bas contient le stylo. ❒ Vrai/ ❒ Faux

B. La boîte juste sur celle en bas contient les enveloppes. ❒ Vrai/ ❒ Faux

C. La boîte juste sous celle du haut contient du papier. ❒ Vrai/ ❒ Faux

D. La boîte tout à fait en haut contient les étiquettes. ❒ Vrai/ ❒ Faux

41 Jean, Louis, Paul, Henri ont été admis à Éco-plus, Sup-Gestion, HEéco et Maxi-éco…

❒ **1.** Si Paul a été admis à Éco-plus ou à Sup-Gestion, Louis a été admis à HEéco ;

❒ **2.** Si Jean n'a pas été admis à Éco-plus, Henri a été admis à Sup-Gestion ;

❒ **3.** Si Henri n'a pas été admis à Maxi-éco, c'est Paul qui a été admis à Maxi-éco ;

❒ **4.** Si Louis a été admis à Sup-Gestion, Paul a été admis à Éco-plus ;

❒ **5.** Si Jean n'a pas été admis à Maxi-éco, alors Louis n'a pas été admis à HEéco.

A. Jean a été admis à Sup-Gestion. ❒ Vrai/ ❒ Faux

B. Paul a été admis à Éco-plus. ❒ Vrai/ ❒ Faux

C. Henri a été admis à Sup-Gestion. ❒ Vrai/ ❒ Faux

D. Louis a été admis à Maxi-éco. ❒ Vrai/ ❒ Faux

42 Un agriculteur, un paysagiste et un viticulteur possèdent chacun un champ de forme différente : carré, rectangulaire et triangulaire. Dans chacun de ces champs se trouve un animal, un âne, un cheval et un boeuf.

1. Le cheval n'est pas dans le champ triangulaire ni dans celui de l'agriculteur.

2. L'agriculteur possède le champ rectangulaire.

3. Le bœuf, lui, appartient au viticulteur.

A. Le cheval est dans un champ carré. ❒ Vrai/ ❒ Faux

B. Le paysagiste possède le bœuf. ❒ Vrai/ ❒ Faux

C. Le champ rectangulaire appartient à l'agriculteur. ❒ Vrai/ ❒ Faux

D. Le viticulteur possède le champ triangulaire. ❒ Vrai/ ❒ Faux

43 Si Philippe a 16 ans, Octave 12 ans et Emmanuelle 20 ans, quel âge devrait avoir dans ce cas Marie-Christine ?

44 Si on suppose que :

- Aucun infirmier n'est asthmatique.
- De nombreux fumeurs deviennent asthmatiques.

La ou lesquelles des conclusions suivantes découle(nt) logiquement de ces affirmations ?

❒ **a.** Aucun infirmier ne fume.

❒ **b.** Certains fumeurs sont infirmiers.

❒ **c.** Aucun asthmatique n'est infirmier.

❒ **d.** Tous les fumeurs sont asthmatiques.

❒ **e.** Un fumeur asthmatique ne peut pas être infirmier.

45 on suppose que :

- Tous les Fernois sont plavistes.
- Tous les Mongrantins sont plavistes.
- Aucun Fernois n'est Mongrantin.

Cochez les conclusions qui découlent logiquement de ces affirmations :

❒ **a.** Tous les Fernois sont des Mongrantins.

❒ **b.** Certains Mongrantins sont des plavistes.

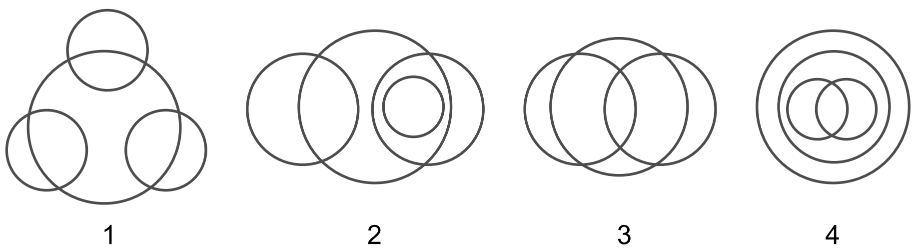
❒ **c.** Certains Mongrantins sont Fernois.

❒ **d.** Certains plavistes sont Mongrantins.

❒ **e.** Les plavistes sont soit Fernois, soit Mongrantins.

46 Quel schéma correspond aux affirmations suivantes :

- Certains champignons sont comestibles.
- Tous les champignons de Paris sont comestibles.
- Certaines baies sont comestibles.



Niveau 3

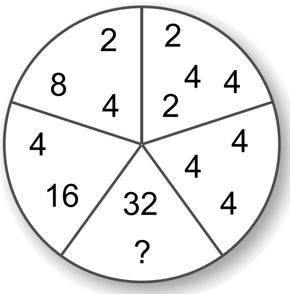
47

5	3	8	2
4	2	6	2
9	5	?	?
1	1	2	0

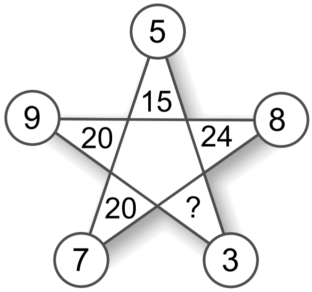
48

3	9	6	2
10	6	4	4
21	27	6	?
6	8	7	?

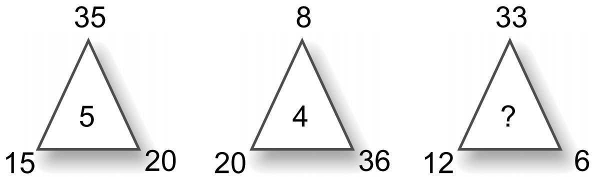
49



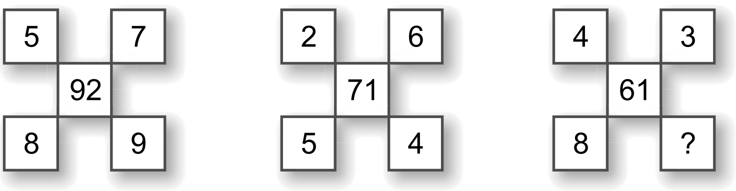
50



51



52



53 Le rond, le carré, le triangle et le losange valent (dans le désordre) 1, 2, 3 et 4. AUCUN des lots ci-dessous n'a la valeur indiquée !

Trouvez néanmoins la valeur du dernier lot.

● + ■ + ◆ ≠ 9   ● + ■ + ◆ ≠ 6

● + ● ≠ 8   ■ + ■ ≠ 8

■ + ● ≠ 4   ● + ▲ ≠ 4

■ + ▲ + ▲ = ?

Exercices 54 à 58 : Chaque lettre a une valeur différente, trouvez la valeur du dernier mot.

54

ASTRE = 23   ROSE = 17,

SERT = 19   STERE = 20

TORSE = 24,   TORT = 28

TERRASSER = ?

55

ENTROPIE - VACHERIN :: TROP - _ _ _ _

56

R4 - O2 - S7 - C1 - U3 - B5 - E6 :: _ _ _ _ _ _ _

57

RITOMJE - MIJOTER :: SAIOMNR - _ _ _ _ _ _ _

58

PETALE, FLEUR, TIGE, RACINE, FEUILLE
VIRGULE, CEDILLE, ASTERISQUE, APOSTROPHE, PARENTHESE

59 Peinture est à huile, ce qu'impression est à … :

❒ **1.** frite ❒ **2.** livre ❒ **3.** encre ❒ **4.** cadre

60 … est à faculté, ce que pasteur est à … :

❒ **1.** aptitude/stérilisation ❒ **2.** élèves/moutons
❒ **3.** professeur/temple ❒ **4.** cours/sermons

61 … est à cuisine, ce que instrument est à … :

❒ **a.** gâteau ❒ **e.** compositeur
❒ **b.** ustensile ❒ **f.** outil
❒ **c.** cuisinière ❒ **g.** musique
❒ **d.** repas ❒ **h.** machine

62 728 est à 17, et 432 est à 9, ce que 76 est à …

63 Pierre, Louis, Fred et Andy ont chacun apporté leur instrument de musique.

❒ **1.** Si Pierre a apporté une guitare alors Andy a apporté un accordéon.
❒ **2.** Si Louis a apporté une flûte alors Andy a apporté une clarinette.
❒ **3.** Si Fred a apporté une flûte alors Louis a apporté une guitare.
❒ **4.** Si Pierre n'a pas a apporté une guitare alors Louis a apporté une flûte.

A. C'est Andy ou Pierre qui apportent l'accordéon. ❒ Vrai/ ❒ Faux
B. C'est Louis ou Fred qui apportent la clarinette. ❒ Vrai/ ❒ Faux
C. La flûte a été apportée par Louis. ❒ Vrai/ ❒ Faux
D. La guitare a été apportée par Fred. ❒ Vrai/ ❒ Faux

64 Si Nadia joue de l'accordéon, Émile de la mandoline, Ophélie du piano, et Athanase du tuba, selon la même logique de quel instrument devrait jouer Shimon ?

❒ **1.** du saxophone ❒ **4.** du hautbois
❒ **2.** de la harpe ou
❒ **3.** de la cithare ❒ **5.** des timbales

65 Voici cinq jetons qui au verso sont bleu, vert, jaune, rouge et noir.
Donnez la couleur de chacun, sachant que…

- Il y a autant d'écart entre le jeton jaune et le jeton bleu, qu'entre le jeton jaune et le jeton rouge.
- Il y a autant d'écart entre le jeton vert et le jeton jaune qu'entre le noir et le rouge.
- Il y a un jeton de plus à droite du jeton rouge qu'à gauche du jeton jaune.
- Il y a un jeton de plus à droite du jeton vert qu'à gauche du jeton bleu.

66 Anna, Bella, Cléo et Daphné sont des étudiantes qui viennent d'Épinal, Flers, Grenoble et Honfleur. Elles ont chacune un sport préféré le Judo, le Kayak, la Lutte et la Moto et elles étudient la physique, le Russe, les statistiques et la zoologie. Sachant que :

- Anna vient d'Épinal.
- Bella aime la moto.
- Cléo étudie la physique.
- Daphné qui ne vient pas de Grenoble fait du kayak.
- Celle qui vient d'Honfleur pratique le judo.
- Celle qui fait de la lutte étudie le Russe.
- Celle qui vient de Grenoble étudie la zoologie.

A. Celle qui fait de la moto étudie le Russe. ❒ Vrai/ ❒ Faux
B. Daphné étudie les statistiques. ❒ Vrai/ ❒ Faux
C. Cléo fait du Judo. ❒ Vrai/ ❒ Faux
D. Celle qui fait de la lutte vient de Flers. ❒ Vrai/ ❒ Faux

67 Messieurs Leroux, Lenoir et Leblond ont effectivement les cheveux de couleur roux, noir et blond, mais pas nécessairement selon l'implication du nom.
Une des informations suivantes est fausse (les autres sont justes).

- Monsieur Leroux a les cheveux noirs.
- Monsieur Leblond a les cheveux roux.
- Monsieur Leroux n'a pas les cheveux roux.
- Monsieur Leblond a les cheveux noirs.

A. Monsieur Leroux a les cheveux noirs. ❒ Vrai/ ❒ Faux
B. Monsieur Leblond a les cheveux noirs. ❒ Vrai/ ❒ Faux
C. Monsieur Lenoir a les cheveux blonds. ❒ Vrai/ ❒ Faux
D. Celui qui a les cheveux roux est Monsieur Leroux. ❒ Vrai/ ❒ Faux

68 En établissant l'inventaire des livres de la bibliothèque municipale, on remarqua que :

- Tous les livres français étaient reliés en rouge.
- Tous les livres étrangers avaient plus de 200 pages.
- Seuls des livres rouges avaient des illustrations.
- Seuls des livres de plus de 200 pages avaient un index.

En tenant compte de ces affirmations, cochez les livres qui peuvent venir de cette bibliothèque :

❒ **a.** Un livre rouge espagnol.

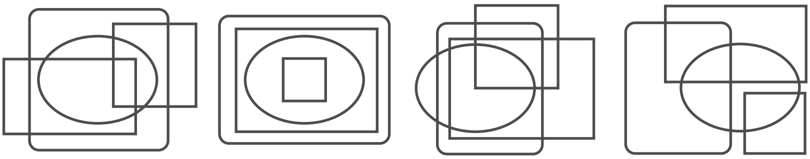
❒ **b.** Un livre avec des illustrations et un index.

❒ **c.** Un livre français de 85 pages avec un index.

❒ **d.** Un livre de 600 pages, relié en rouge et sans index.

69 Quel schéma correspond aux affirmations suivantes si l'ovale représente « les meubles » ? :

- Les meubles en bois sont résistants.
- Les meubles résistants sont chers.



Corrigés des exercices

1 Réponse : 6 – 1. Horizontalement comme verticalement les deux premières cases = les deux suivantes 5 + 2 = 6 + 1.

2 Réponse : 28-30-32. Les nombres pairs sont inscrits dans la grille en alignements successifs en diagonale haut droit vers bas gauche. Les trois cases à compléter font penser à des opérations qui fonctionnent horizontalement comme verticalement. Et, hasard des nombres… la première rangée comme la première colonne fonctionnent avec le raisonnement : la somme des 3 premiers nombres = le troisième. Mais après cela ne fonctionne plus et il faut chercher ailleurs.

3 Réponse : 7. La somme des nombres dans les sections opposées toujours = 11. 4 + 7 = 11.

4 Réponse : 6. La seconde section de chaque quart représente le double de la précédente. 3 × 2 = 6.

5 Réponse : 24. Nombre au centre = le produit des 3 nombres autour 2 × 2 × 6 = 24.

6 Réponse : 2. La somme des nombres en haut = la somme des nombres en bas 7 + 4 = 9 + 2

7 Réponse : 18 et 9.

On voit par le schéma que :

Flèche vers le haut = + 4 ou × 2, mais × 2 seul possible.

Flèche vers le bas = – 4.

Flèche vers la droite = + 3.

Flèche vers la gauche = ÷ 2 ou – 2, mais – 2 seul possible.

8 Réponse : 26.

ERRE (16) – ERE (13) = R = 3.

ERE(13) – R(3) = 2 E(10), E = 5.

MER(12) – R(3) – E(5) = M = 4.

RUMEUR (29) – MER (12) – R(3) = 2U = 14, U = 7.

MUSEUM (29) – 2 M(8) – 2U (14) – E(5) = S = 2.

SEMEUR = S2 + E5 + M4 +E5 +U7 + R3 =26.

9 Réponse : SIMPLE. Les antonymes viennent par paires.

10 Réponse : 635142. Un chiffre est attribué à chaque lettre selon l'ordre de la première paire (C = 6, S = 4, etc.). On donne ces lettres dans l'ordre du second mot.

11 Réponse : 4. Nombre de lettres dans l'alphabet entre les deux lettres données.

12 Réponse : 15. Rang alphabétique de la première lettre.

13 Réponse : 1. Action et suite souhaitée.

14 Réponse : 1. Objet et une de ses parties.

15 Réponse : c et e. Ce qui recouvre un animal et l'animal lui-même.

16 Réponse : 81. Carré du chiffre.

17 Réponse : 1. La figure initiale est reprise une première fois à l'identique, puis une seconde fois, superposée à la première et tournée 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

18 Réponse : Au numéro 200. À la jonction du prénom et du nom se cache à chaque fois un nombre écrit en toutes lettres. Robert Roisset contient TROIS : roberT ROISset, gastON ZEller contient ONZE, etc. Il suffit de multiplier ce nombre par deux pour obtenir le numéro du logement. ériC ENThiers = 100 × 2 = 200. Exemple même de l'énigme peu difficile en soi, mais sur laquelle on peut perdre beaucoup de temps à force de chercher des solutions complexes.

19 Réponse : 1. Cercle extérieur : bon pour la santé, puis cercle suivant légumes, cercle suivant carottes.

20 Réponse : A Faux, B Faux, C Vrai, D Faux. En numérotant les jetons de gauche à droite : 1 Jaune, 2 Bleu, 3 Rouge, 4 Vert. Le jeton 2 n'est ni le rouge ni le jaune, donc le bleu ou le vert et comme bleu et vert ne se côtoient pas, n° 1 est soit rouge soit jaune. Comme le jeton rouge est plus vers la droite que le bleu et que rouge ne peut être que 3 ou 1 ; c'est automatiquement le 3, et le bleu n° 2.

21 Réponse : A. Vrai, B. Faux, C. Faux. D. Faux.

Antoine bleue, Benoît noire, Charles rouge.

Les trois amis ont acheté des voitures de couleurs différentes, donc celle d'Antoine est de couleur bleue. Benoît ne peut avoir acheté une voiture rouge, car dans ce cas, Charles en aurait acheté une rouge également. Benoît a donc acheté une voiture noire.

Reste la rouge pour Charles. (NB La formulation : « Si Antoine ou Benoît achètent une voiture rouge, alors Charles achètera également une voiture rouge » n'implique pas l'inverse. Charles peut acheter une rouge sans qu'Antoine et Benoît le fassent également).

22 Réponse : Non. Les daltoniens sont habiles, mais pas exclusivement. D'autres personnes – dont des routiers – peuvent également être habiles.

23 Réponse : 4. Seule l'affirmation 4 est valable. Un schéma peut aider à la réflexion : Un grand cercle par exemple peut représenter les Yogos et dans celui-ci il y a deux cercles représentant les Xanias et les Zazas. Ces deux cercles sont peut-être séparés, peut être se recouvrent partiellement ou se recouvrent peut-être entièrement. Comme on ne peut établir les positions de ces deux cercles aucune conclusion ne peut en être tirée.

24 Réponse : 31 – 47. Les nombres sur chaque ligne augmentent de gauche à droite, + 1 sur la première ligne, + 2 la seconde, + 3 la troisième, + 4 la quatrième.

25 Réponse : 3 – 8. Dans chaque rangée, le produit des deux premiers nombres = la somme des deux suivants. $6 \times 3 = 15 + 3$, $5 \times 3 = 7 + 8$.

26 Réponse : 5. Si on remplace chaque lettre par son rang alphabétique (A = 1, B = 2, etc.), la somme des deux valeurs = toujours 10. E = 5. $5 + 5 = 10$.

27 Réponse : 2. La somme des nombres dans chaque section augmente de 1 en progressant dans le sens des aiguilles d'une montre. $9 + 2 = 11$.

28 Réponse : 8. Le nombre au centre = le produit des numéros à la base moins celui au sommet $(3 \times 6) - 10 = 8$.

29 Réponse : 8. La moitié du total des nombres autour. $(1 + 3 + 2 + 6 + 4)/2$.

30 Réponse : 13. Triangle pointe vers le haut ou le bas nombre positif, rond ou carré nombre négatif : 9 – 3 = 7 – 1, 5 – 6 + 3 = – 3 + 5, – 3 – 6 = – 1 + 5 – 13.

31 Réponse : 36. On trouve les valeurs des lettres par des soustractions de mots : Cithare (28) – Triche (26)= A(2) ; Triche (26) – Citer (20) = H(6), Cithare (28) – Car (8) – Thé (16) = I(4) ; Carie (15) – Car (8) – I(4) = E(3), Thé(16) – H(6) – E(3) = T(7), Art(14) – A(2) – T(7) = R(5).

32 Réponse : PIETON. L'ordre des premières lettres donne l'ordre qui crée le premier mot. En appliquant ce même ordre au second groupe de lettre.

33 Réponse : 8. Rang alphabétique de la première lettre, moins celui de la seconde. M(13) – E(5) = 8

34 Réponse : 593742. Un chiffre est attribué à chaque lettre selon l'ordre de la première paire (C = 2, N = 3 etc.). On donne ces lettres dans l'ordre du second mot.

35 Réponse : Souligner amiral. Ces épreuves viennent sans consignes et deviner ce qu'il faut faire est une partie du défi. Ici il faut deviner qu'il faut appliquer à la ligne de dessous ce qui a été fait à la ligne au-dessus : souligner un mot qui se distingue des autres. Préfet, qui est souligné dans la première ligne, est le seul personnel politique a ne pas être élu. Amiral est le seul militaire à être dans la marine.

36 Réponse : 2. Le mâle d'une espèce et la femelle d'une autre.

37 Réponse : 3. Produit et lieu d'origine.

38 Réponse : a, i. Contraires.

39 Réponse : 3. La figure d'origine est prise telle quelle mais en inversant les couleurs, puis cette figure est reprise, tournée de 180° et accolée à la première.

40 Réponse : A. Vrai, B. Vrai, C. Vrai, D. Vrai. Si on numérote les boîtes de 1 à 4 de bas en haut : 1 Stylo – 2 enveloppes – 3 papier – 4 étiquettes. Comme la boîte 3 ne contient ni les enveloppes ni les étiquettes, elle contient soit le papier, soit les stylos. Comme ces deux articles ne se côtoient pas, c'est n° 1 qui doit avoir du papier ou des stylos. Comme les enveloppes sont plus vers le bas que le papier, le papier ne peut être en 1, cette boîte contient donc des stylos et le papier est en 3. Comme les enveloppes sont plus vers le bas que le papier, elles sont en 2, ce qui laisse les étiquettes en 4.

41 Réponse : A. Faux, B. Faux, C. Vrai, D. Faux.

Jean HEéco, Louis Éco-plus, Paul Maxi-éco, Henri Sup-Gestion.

Selon 3, celui admis à Maxi-éco est soit Henri, soit Paul. Celui admis à Maxi-éco n'est donc ni Louis ni Jean. Selon 5, comme Jean n'a pas été admis à Maxi-éco, Louis n'a pas été admis à HEéco.

Selon 1, comme Louis n'a pas été admis à HEéco, Paul ne peut être admis ni à Éco-plus, ni à Sup-Gestion. Comme Paul n'a pas été admis à Éco-plus, selon 4, Louis n'a pas été admis à Sup-Gestion. Louis n'est donc admis ni à Maxi-éco, ni à HEéco, ni à Sup-Gestion, il est donc admis à Éco-plus.

Jean n'est donc pas admis à Éco-plus, donc selon 2 Henri a été admis à Sup-Gestion.

Jean n'a été admis ni à Maxi-éco, ni à Éco-plus, ni à Sup-Gestion, il est donc admis à HEéco.

Jean HEéco, Louis Éco-plus, Paul Maxi-éco, Henri Sup-Gestion.

42 Réponse : A vrai. B faux. C vrai. D vrai. Avec une grille de vérité, on trouve sans peine que : L'agriculteur a un champ rectangulaire et un âne; le paysagiste a un champ carré et un cheval; le viticulteur a un champ triangulaire et un bœuf.

43 Réponse : 28 ans. Le nombre de lettres du prénom multiplié par deux.

44 Réponse : b, c et e. Bien noter que « aucun », et « tous » donnent une certitude, alors que « certains » permet la possibilité contraire.

45 Réponse : b et d. En fait pour b, tous les Mongrantins sont plavistes, mais l'affirmation avec « certain » est néanmoins juste. Si les mots inventés vous créent des difficultés, vous pouvez soit faire un schéma (Ici un grand cercle contenant les « plavistes » et dans ce cercle, deux cercles plus petits qui sont entièrement dans le cercle et ne se chevauchent pas, l'un Fernois, l'autre Mongrantins). Il faut se méfier de la méthode qui consiste à remplacer les mots inventés par des mots bien réels car on peut très facilement créer des contresens.

46 Réponse : Schéma 2. Le grand cercle = comestible. À cheval sur ce cercle un rond à droite pour les champignons, un rond à gauche pour les baies. Dans le rond des champignons, celui plus petit des champignons de Paris.

Niveau 3

47 Réponse : 14 – 4. Horizontalement et verticalement, la troisième case = la somme des deux premières. Horizontalement et verticalement, la quatrième case = la différence des deux premières.

48 Réponse : 8-2. Uniquement horizontalement, la somme des deux premières case = le produit des deux suivantes. $21 + 27 = 6 \times 8$, $6 + 8 = 7 \times 2$.

49 Réponse : 2. Le produit des nombres dans chaque section = 64.

50 Réponse : 17. La somme des nombres du triangle dans lequel s'inscrit le nombre en question. $3 + 9 + 5 = 17$.

51 Réponse : 3. Le plus grand diviseur commun des trois nombres autour.

52 Réponse : 1. Nombre au centre = somme des nombres autour, puis inversion des deux chiffres. $4 + 3 + 8 + 1 = 16$… 61. Type même de question que certaines personnes trouvent sans mal, alors que pour d'autres cela va à l'encontre de la logique et ils ne le trouvent jamais !

53 Réponse : 7. Comme rond + carré + losange = ni 9 ni 6 ce ne peut être $1 + 2 + 3$ ni $2 + 3 + 4$ et ce doit être $1 + 2 + 4$ ou $1 + 3 + 4$. Donc il y a un 4, mais ni carré ni rond = 4, donc losange = 4. Revenons au trio de départ, les deux autres signes (carré et rond) = 1 + 2 ou 1 + 3, mais rond + carré ≠ 4 donc rond et carré n'égalent pas 1 + 3 mais 1 + 2 ce qui laisse 3 pour le triangle. Comme triangle + rond ≠ 4, le rond ≠ 1, donc rond = 2 et carré = 1.

54 Réponse : 44. A4, E1, O5, R9, T7, S2 : TORSE – ROSE = T, TORSE – SERT = O, STERE – SERT = E, ASTRE – SERT = A, TORT – T T O = R, TORSE – T O E R = S. TERRASSER = 44.

55 Réponse : CHER. Comme trop se trouve au milieu du mot entropie, cher se trouve au milieu du mot vacherin.

56 Réponse : COURBES. Noter les lettres dans l'ordre indiqué par le numéro qui les accompagne.

57 Réponse : MANOIRS. L'ordre des premières lettres donne l'ordre qui crée le premier mot. En appliquant ce même ordre au second groupe de lettre.

58 Réponse : Souligner astérisque. Pétale, souligné, est le seul mot masculin dans la ligne du haut. Astérisque est le seul mot masculin de la ligne du bas.

59 Réponse : 3. Activité/produit utilisé.

60 Réponse : 3. Profession et lieu d'activité.

61 Réponse : b g. Les outils et ce qu'ils produisent.

62 Réponse : 13. Somme des chiffres.

63 Réponse : A Vrai, B Faux, C Vrai, D Vrai.

Louis apporte une flûte, Andy une clarinette, Pierre un accordéon et Fred la guitare.

Pierre a soit apporté une guitare (1), soit il n'en a pas apporté (4).

Examinons les conséquences s'il en a apporté. Si Pierre apporte une guitare, Andy apporte un accordéon (1). Louis ne peut apporter une flûte, car dans ce cas Andy apporte une clarinette (2) et on vient de voir qu'il apporte un accordéon, mais Fred ne peut apporter une flûte non plus car sinon Louis apporte une guitare (3) alors que c'est Pierre qui le fait. Donc Pierre n'apporte pas de guitare.

Si Pierre n'apporte pas de guitare, Louis apporte une flûte (4), et si Louis apporte une flûte, Andy apporte une clarinette (2). Comme Pierre n'apporte ni la guitare, ni la flûte, ni la clarinette, il doit apporter l'accordéon, ce qui laisse la guitare à Fred.

64 Réponse : 4 hautbois. Première lettre du nom = dernière lettre de l'instrument, deuxième lettre du nom = première lettre de l'instrument.

65 Réponse : 1 Bleu – 2 jaune – 3 rouge – 4 vert – 5 noir. D'après la première affirmation il y a deux possibilités, jaune au milieu et bleu et rouge à chaque extrémité, ou jaune entre bleu et rouge sur trois jetons qui se côtoient. La première solution, cependant, n'est pas possible puisqu'il y a un jeton de plus à droite du rouge qu'à gauche du jaune et avec la configuration rouge – jeton ? – jaune – jeton ? – bleu, il y aurait deux jetons de plus. Il faut donc adopter la disposition rouge-jaune-bleu qui se touchent et pour qu'il y ait un jeton de plus à droite du rouge qu'à gauche du vert,

il faut placer bleu-jaune-rouge en 1, 2 et 3. Pour qu'il y ait autant d'écart entre le vert et le jaune qu'entre le noir et le rouge, le vert doit être en 4 et le noir en 5.

66 Réponse : A Faux, B Vrai, C Vrai, D Faux.

Par la pratique des éliminations successives, on trouve que :

- Anna vient d'Épinal pratique la lutte et étudie le Russe.
- Bella vient de Grenoble, fait de la moto et étudie la zoologie.
- Cléo vient d'Honfleur, fait du judo, et étudie la physique.
- Daphné vient de Flers, fait du kayak et étudie les statistiques.

67 Réponse : A Vrai. B Faux. C Vrai. D Faux.

Leroux noir, Lenoir blond et Leblond roux

L'affirmation fausse doit être la première ou la dernière car deux personnages ne peuvent pas avoir les cheveux noirs tous les deux. Donc les deux autres affirmations sont vraies : Leblond a donc les cheveux roux. Du coup on voit que c'est la dernière affirmation qui est fausse. Donc la première est vraie et Leroux a les cheveux noirs, ce qui laisse des cheveux blonds pour Lenoir.

68 Réponse : a. OUI (les livres français sont en rouge, mais des livres étrangers peuvent l'être aussi).

b. OUI (les livres étrangers peuvent être rouges, les livres français peuvent avoir plus de 200 pages : les deux peuvent avoir un index).

c. NON (200 pages pour avoir un index).

d. OUI (tous les livres de 200 pages n'ont pas nécessairement d'index).

69 Réponse : Schéma 3. L'ovale = les meubles. Le carré = en bois. Le rectangle = résistant. Le rectangle aux coins arrondis = cher.

QCM de maths : comment être performant ? 5

Les conseils qui vont suivre concernent les QCM dont la règle du jeu indiquée en début d'épreuve précise qu'il y a **une bonne réponse et une seule parmi celles qui sont proposées**.

Si vous êtes bon en maths, vous allez avoir tendance à **résoudre le problème posé sans tenir compte des propositions de solutions**. La réponse que vous aller trouver, vous vérifierez ensuite si elle figure bien parmi les propositions : si c'est le cas, vous vous direz « j'ai réussi »; sinon vous chercherez une erreur dans vos calculs.

Dans certains types de problème cette tactique va vous faire perdre du temps et vous ne pourrez pas finir l'ensemble des QCM, contrairement à d'autres candidats plus malins et efficaces.

Voici quelques exemples de problèmes où **partir des valeurs proposées** comme solutions permet d'être efficace et rapide.

Exemple 1

Bacchus se verse à boire la moitié d'une bouteille pleine de bon vin.

- Il revient vers la bouteille et boit le tiers de ce qui reste. Puis il retourne boire le quart du dernier reste. Le contenu restant de la bouteille lui permet de se remplir enfin un dernier verre de 33 cl. Quelle est la capacité de cette bouteille ?

❑ a. 66 cL ❑ **b.** 100 cL ❑ **c.** 120 cL ❑ **d.** 132 cL ❑ **e.** 144 cL

Solution exemple 1

Au lieu de se lancer dans des équations ou des calculs de fractions, on peut essayer de vérifier si l'on obtient le 33 cl final à partir d'une des valeurs proposées.

Un premier essai astucieux est de partir de la valeur du milieu parmi les propositions : ici 120 cL.

Bacchus verse 60 cL, il reste 60 cL. Il boit le tiers du reste soit 20 cL. Il reste 40 cL dans la bouteille. Il boit le quart de ce reste soit 10 cL, il reste 30 cL dans la bouteille et non 33 cL.

Notre choix **c.** n'est pas le bon, mais comme il donne un peu moins que ce qu'il faut, on peut abandonner les essais pour une valeur moindre, et faire un autre essai avec la valeur du **d.** un peu supérieure : 132 cL.

Bacchus verse 66 cL, il reste 66 cL. Il boit le tiers du reste soit 22 cL, il reste 44 cL dans la bouteille. Il boit le quart du reste, soit 11 cL. Il reste 33 cL dans la bouteille : c'est ce qu'on souhaitait, la bonne réponse est **d.**

Exemple 2

Au moment où elle met au monde son quatrième enfant, une mère (professeur de maths) a 3 fois la somme des âges de ses 3 premiers enfants. Sachant que dans 8 ans son âge sera la somme de ceux de ses 4 enfants, quel son âge actuel ?

❑ a. 36 ans ❑ **b.** 35 ans ❑ **c.** 33 ans ❑ **d.** 30 ans ❑ **e.** 27 ans

Solution exemple 2

Partons de la valeur 36 ans.

Elle est bien divisible par 3, car 36 c'est 3×12. Dans 8 ans la mère aura 44 ans. Chaque enfant aura 8 ans de plus, et à quatre cela fera $8 \times 4 = 32$ ans de plus, la somme de leurs âges sera aussi $12 + 32 = 44$. On a trouvé, la solution est le **a.**

Voici maintenant d'autres types de problèmes : ceux où figurent de nombreuses variables abstraites sous forme de lettres. On a peur de s'y perdre…

Imaginer certaines valeurs à la place des lettres peut permettre de débrouiller la situation…

Exemple 3

Si x, y et z sont trois nombres non nuls tels que $1/z = 1/x + 1/y$, alors x =

❑ **a.** $yz/(z-y)$ ❑ **c.** $(y-z)/yz$ ❑ **e.** $z-y$

❑ **b.** $yz/(y-z)$ ❑ **d.** $(z-y)/yz$

Solution exemple 3

Chacun sait que $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ donc on peut imaginer $x = 4$, $y = 4$ et $z = 2$ et voir s'il n'y a pas qu'une seule des formules proposées qui serait valable pour ces valeurs concrètes là.

$yz/(z-y) = 8/(-2) = -4$; $yz/(y-z) = 8/2 = 4$; $(y-z)/yz = 2/8 = \frac{1}{4}$; $(z-y)/yz = -2/8 = -\frac{1}{4}$; $z-y = 2$; seule la formule **b.** donne la bonne valeur de $x = 4$. La solution est **b.**

Exemple 4

Les trois nombres entiers positifs non nuls et différents a, b, c vérifient a + b + c = 6. Que vaut : 1/(a + b) + 1/(b + c) + 1/(a +c) ?

❑ a. 17/30 ❑ **b.** 27/40 ❑ **c.** 37/50 ❑ **d.** 47/60 ❑ **e.** 57/60

Solution exemple 4

On peut imaginer a = 1, b = 2, c = 3, on a bien a + b + c = 6.
On obtient alors 1/(a + b) + 1/(b + c) + 1/(a + c) = 1/3 + 1/5 + 1/4 = (20 + 12 + 15)/60 = 47/60.
La bonne réponse est donc **d.**

Exercices d'entraînement

1 Ma sœur a autant de frères que de sœurs. Mon frère a deux fois plus de sœurs que de frères. Combien y a t-il d'enfants dans notre famille ?

❑ **a.** 5 ❑ **b.** 6 ❑ **c.** 7 ❑ **d.** 8 ❑ **e.** 9

2 Je suis un nombre de deux chiffres. Si on intervertit mes deux chiffres, on obtient un nombre valant 1 de moins que ma moitié. Qui suis-je ?

❑ **a.** 32 ❑ **b.** 42 ❑ **c.** 52 ❑ **d.** 34 ❑ **e.** un tel nombre n'existe pas

3 Dans 20 ans ton âge sera le carré de ton âge actuel. Quel âge as-tu ?

❑ **a.** 5 ans ❑ **b.** 6 ans ❑ **c.** 7 ans ❑ **d.** 8 ans ❑ **e.** 9 ans

4 Soient a, b, c trois nombres réels. Quatre des cinq relations ci-dessous sont équivalentes entre elles (reviennent au même après simplification).

Quelle est celle qui n'est équivalente à aucune autre ?

❑ **a.** $b = \dfrac{(a+c)}{2}$ ❑ **c.** $b = \dfrac{(2a+b+2c)}{5}$ ❑ **e.** $b = a - b + c$

❑ **b.** $b = \dfrac{(a+b+c)}{3}$ ❑ **d.** $b = \dfrac{(4a+2b+c)}{7}$

5 Ludo écrit trois nombres. En les ajoutant deux par deux, il obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres écrits ?

❑ **a.** 25 ❑ **b.** 28 ❑ **c.** 23 ❑ **d.** 31 ❑ **e.** 30

6 Une mouche s'est écrabouillée sur l'extrémité d'une pale d'éolienne de 20 m de rayon. Celle-ci tourne régulièrement à la vitesse de 30 tours à la minute.

Quelle est la vitesse de déplacement du cadavre de la mouche (à 1 km/h près) ?

❑ **a.** 147 km/h ❑ **b.** 166 km/h ❑ **c.** 185 km/h ❑ **d.** 204 km/h ❑ **e.** 223 km/h

Corrigés des exercices

1 **Réponse c.**

« Ma sœur a autant de frères que de sœurs » : il y a donc une fille de plus que le nombre de garçons. Essayons la valeur centrale proposée : 7 enfants, qui correspond à 4 filles et 3 garçons : une fille a autant de sœurs (3) que de frères (3), un garçon a deux fois plus de sœurs (4) que de frères (2). La solution est donc 7 enfants.

2 **Réponse c.**

On peut faire des essais avec les quatre valeurs proposées.

52 est la solution, car l'interversion donne 25, et $25 + 1 = 26$ est la moitié de 52.

3 **Réponse a.**

Il peut sauter à l'œil de suite que $5 + 20 = 25$ est le carré de 5.

4 **Réponse d.**

Partons de la première proposition $b = (1/2)\ (a + c)$ et imaginons des valeurs qui la respectent, par exemple $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ car $2 = (1/2)\ (1 + 3)$.

Les calculs des propositions suivantes conduisent à :

a. $(1 + 3)/2 = 2$ vrai.

b. $(1/3)\ (6) = 2$ vrai.

c. $(1/5)\ (10) = 2$ vrai.

d. $(1/7)\ (11) = 2$ faux.

e. $2 = 2$ vrai.

La formule différente des autres est donc d.

5 Réponse d.

Classons les propositions par ordre croissant : 23, 25, 28, 30, 31. La valeur centrale est 28 : essayons-la.

Pour faire 63, il faut un deuxième nombre égal à $63 - 28 = 35$. Pour faire 65 il faut un troisième nombre égal à $65 - 28 = 37$. La somme de 35 et 37 fait 72 ce qui ne correspond pas à l'énoncé (68).

Comme on trouve trop avec ces deux nombres obtenus par des soustractions, on va plutôt essayer les valeurs supérieures du petit nombre, ce qui donnera moins par soustraction à ces deux grands nombres.

Prenons 30. Pour faire 63, il faut un deuxième nombre égal à $63 - 30 = 33$. Pour faire 65, il faut un troisième nombre égal à $65 - 30 = 35$. On obtient alors la somme $33 + 35 = 68$ qui correspond à l'énoncé.

La plus petit des trois nombres est 30.

6 Réponse e.

Le cadavre de la mouche parcourt un cercle de rayon 20 m, cela 30 fois à la minute donc $30 \times 60 = 1\,800$ fois à l'heure.

Le périmètre correspondant à un tour est $2\,\pi\,R = 40\,\pi$ (en mètres).

La distance parcourue en une heure par le cadavre, en km, est :

$$40\,\pi \times 1\,800/1\,000 = 40\,\pi \times 1{,}8 = 72\,\pi$$

On sait que π vaut environ 3,14; mais ce qui importe, c'est que π est plus grand que 3. Comme 72 est plus grand que 70, le résultat cherché est supérieur à $70 \times 3 = 210$ km. Il n'y a qu'une seule proposition supérieure à 210 km, c'est 223 km.

On peut éviter tout calcul précis dans ce QCM, et s'en tirer par une évaluation de l'ordre de grandeur du résultat confronté aux propositions. Ceci est vrai même si les propositions semblent précises (comme ici 147,166, 204…)

Nombres relatifs 6

L'essentiel à retenir

Les nombres « relatifs » sont positifs (supérieurs à 0) ou négatifs (inférieurs à 0).

Pour comparer deux nombres relatifs

- Un nombre négatif est toujours plus petit qu'un nombre positif.
- De deux nombres négatifs, c'est le nombre le plus éloigné de zéro qui est le plus petit.

> Exemple $-8 < -6$ car 8 est plus éloigné de 0 que 6.

Ne pas oublier les priorités de calcul

- Si un calcul comporte des opérations entre parenthèses, celles-ci sont effectuées en priorité.
- Si un calcul ne comporte pas d'opérations entre parenthèses, les multiplications et les divisions sont effectuées en priorité, avant les additions et les soustractions.

> Exemple $(-3) + (-4) \times (+3) = -3 + (-12) = (-15)$

Multiplier ou diviser deux nombres relatifs

- Si les deux nombres sont de même signe, le produit ou le quotient est positif.
- Si les deux nombres sont de signes différents, le produit ou le quotient est négatif.

> Exemple $(-3) \times (-8) = (+24)$; $\dfrac{(-15)}{(+5)} = (-3)$

Multiplier plusieurs nombres relatifs

- Si le nombre de nombres négatifs est **pair**, le produit est **positif.**
- Si le nombre de nombres négatifs est **impair**, le produit est **négatif**.

Pour effectuer une suite d'opérations avec des nombres relatifs

- On applique les priorités de calcul, on supprime les opposés et on regroupe les termes positifs et négatifs pour simplifier le calcul. Utiliser aussi la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) ; \quad a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Calculer : $1 - (10 - 100) - (100 - 1\,000) = \ldots$

2 Calculer : $7{,}8 + 1 - (4{,}9 - 2) - (7{,}1 + 3) = \ldots$

3 Calculer : $-7{,}5 - 5{,}5 + 4 - 10 + 12 = \ldots$

4 Calculer l'expression $E = -a + b - c$ sachant que : $a = -4$; $b = 6$; $c = -6$.

5 Dans un autobus il y a 49 voyageurs. Au premier arrêt, 5 personnes descendent et 3 montent. Au deuxième arrêt, 12 personnes descendent et 5 montent. Combien de voyageurs reste-t-il dans l'autobus ?

6 Sur un compte bancaire, M. Brun dispose de 3 872 euros. Il fait un chèque de 73 euros, un autre de 1 257 euros, et un troisième de 192 euros.

Il doit encaisser un remboursement de Sécurité Sociale de 154,50 euros et un autre de 68,50 euros. Quel sera le solde de son compte lorsque toutes ces opérations auront été effectuées ?

7 Si on soustrait, à la somme de (-13) et (-5), la différence de (-3) et (-1), combien trouve-t-on ?

8 Cléopâtre, reine d'Égypte, avait 25 ans en – 44 avant Jésus-Christ. En quelle année était-elle née ?

Niveau 2

9 Papa pèse 85 kg, maman 57 kg, ma petite sœur 18 kg, ma grande sœur 19 kg de plus que ma petite sœur, la voiture vide 1 200 kg et les valises 63 kg. La voiture chargée avec toute la famille dedans pèse 1 500 kg. Combien est-ce que je pèse ?

10 Déterminer la valeur de la lettre x dans l'égalité ci-dessous…

$$(-6) + (-9) + (-x) = 3$$

11 Si Paul mesurait 12 cm de plus, il mesurerait 7 cm de moins qu'Alice, donc…

❒ **a.** Alice est plus grande que Paul
❒ **b.** Leur taille diffère de $(12 - 7)$ cm
❒ **c.** Leur taille diffère de $(12 + 7)$ cm
❒ **d.** La taille de Paul, plus 7 cm, égale celle d'Alice, moins 12 cm
❒ **e.** La taille de Paul, moins 7 cm, égale celle d'Alice, plus 12 cm

12 Sur une droite graduée, le point A a pour abscisse – 3,5 et le point B pour abscisse 7. La distance AB…

❒ **a.** est égale à 7 – 3,5
❒ **b.** est égale à 7 + 3,5
❒ **c.** est égale à – 3,5 + 7
❒ **d.** est négative
❒ **e.** est inférieure à 7

13 L'égalité « 2a – b = b – c » est vraie…

❒ **a.** quand a = 1, b = 3, c = 1
❒ **b.** quand a = – 1, b = – 3, c = 1
❒ **c.** quand a = 1, b = 2, c = 3
❒ **d.** quand a = 2, b = 3, c = 2
❒ **e.** quand a = – 1, b = – 3, c = – 4

14 Le nombre $[8 - (2 \times \{6 + 4\} - 12)] \times 7$ est égal à…

❒ **a.** 8 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 8 × 7 ❒ **d.** 7 ❒ **e.** 42

Niveau 3

15 Soient les nombres a = – 7,6 et b = 7,6. Alors…

❒ **a.** b – a = 0
❒ **b.** b = – a
❒ **c.** a – b = – 14,12
❒ **d.** – a – b = 0
❒ **e.** $\frac{a}{b}$ n'est pas un décimal

16 Si $a = 7 - \frac{5}{7}$ et $b = -7 - \frac{5}{7}$, et $c = 7 + \frac{5}{7}$ et $d = -7 + \frac{5}{7}$ alors…

❒ **a.** $b \leq d \leq a \leq c$
❒ **b.** $a + b \leq 0$
❒ **c.** $b \times c \leq 0$
❒ **d.** $b - d \leq a - c$
❒ **e.** $-c \leq -b$

17 Si $5 \leq a$ et $a \leq 12$ alors…

❒ **a.** $-a \leq 0$
❒ **b.** $12 \leq -a$
❒ **c.** $a - 5 \leq 0$
❒ **d.** $5 - a \leq 0$
❒ **e.** $-10 \leq 2a - 20 \leq 4$

18 Le nombre $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{5}{2}}{\frac{7}{4} - \frac{5}{2}}$ est égal à :

❒ **a.** $-\frac{84}{14}$ ❒ **b.** $-\frac{21}{6}$ ❒ **c.** $-\frac{7}{3}$ ❒ **d.** $\frac{7}{3}$ ❒ **e.** $-\frac{14}{6}$

19 Le double du carré d'un nombre négatif, diminué de ce nombre, vaut 1. Quel est ce nombre ?

❒ **a.** – 2 ❒ **b.** –1 ❒ **c.** $\frac{-1}{2}$ ❒ **d.** $\frac{1}{2}$ ❒ **e.** 1

20 Sur la barre ci-dessous, la somme des nombres contenus dans trois cases consécutives est toujours égale à 36. Que vaut alors $(x - y)$?

			x					y		11				19		

❒ **a.** –13 ❒ **b.** – 8 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** 17 ❒ **e.** 25

21 Calculer : – 1 + 2 – 3 + 4 – 5 + 6 – … + 998 – 999 + 1 000 = …

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 1 – (10 – 100) – (100 – 1 000) = 1 – (– 90) – (– 900)
= 1 + 90 + 900 = 991

On peut calculer les parenthèses d'abord, mais on aurait pu les faire disparaître et regrouper les termes positifs d'une part et les termes négatifs d'autre part.

2 7,8 + 1 – (4,9 – 2) – (7,1 + 3) = 8,8 – 2,9 – 10,1
= 5,9 – 10,1 = – 4,2

3 On peut calculer de proche en proche à partir de la gauche…
– 7,5 – 5,5 + 4 – 10 + 12 = – 13 + 4 – 10 + 12
= – 9 – 10 + 12 = – 19 + 12 = – 7

4 E = – a + b – c = 4 + 6 + 6 = 16.

5 Le nombre de passagers qui restent peut s'obtenir par le calcul :

49 – 5 + 3 – 12 + 5 = 57 – 17 = 40

(On a regroupé les termes positifs et les termes négatifs.)

6 Le solde est donné par la différence entre les crédits et les débits :

(3 872 + 154,5 + 68,5) – (73 + 1 257 + 192) = 4 095 – 1 522 = 2 573

Il reste 2 573 euros.

7 Si on soustrait à la somme de (– 13) et (– 5) la différence de (– 3) et (– 1), le calcul à faire est :

[– 13 + (– 5)] – [– 3 – (– 1)]= (– 18) – (– 3 + 1)
= – 18 – (– 2) = – 18 + 2 = – 16

8 Cléopâtre était née en : – 44 – 25 = – 69 avant J.-C.

Niveau 2

9 La grande sœur pèse : 19 + 18 = 37 kg.

Mon poids en kilos est :

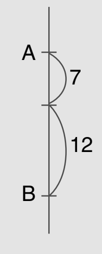
1 500 – (1 200 + 63 + 85 + 57 + 18 + 37) = 1 500 – 1 460 = 40 kg.

10 (– 6) + (– 9) + (– x) = 3 donc – 15 – x = 3, puis – 15 – 3 = x.

On obtient x = – 18.

11 Réponses a., c. et d.

Il y a bien 12 + 7 = 19 cm de plus pour Alice qui est la plus grande.
On peut faire un dessin en forme de thermomètre…



12 Réponse b.

Une distance est toujours positive. Ici c'est 7 + 3,5 = 10,5.

13 Réponses d. et e.

Il faut essayer chaque proposition.

Vérifier que : 4 – 3 = 3 – 2, et que – 2 + 3 = – 3 + 4.

14 Réponse b.

$$[8 - (20 - 12)] \times 7 = (8 - 8) \times 7 = 0 \times 7 = 0$$

Niveau 3

15 Réponses b. et d.

Les nombres a et b sont opposés ; leur somme est nulle.

Pour le c. : 7,6 + 7,6 = 15,2 et non 14,12.

Pour le e. : le quotient donne – 1, et les nombres entiers font partie des nombres décimaux. Le e. est donc faux.

16 Réponses a., b., c., d. et e. : elles sont toutes justes !

On calcule d'abord a = 44/7, b = – 54/7, c = 54/7, d = – 44/7. On vérifie facilement les quatre propositions a, b, c, e.

On calcule : (b – d) = – 10/7 et (a – c) = – 10/7 d'où l'on déduit que d. est vraie.

17 Réponses a., d. et e.

On sait que 5 ≤ a ≤ 12. On peut soustraire 5 à tous les membres de l'encadrement donc 0 ≤ a – 5 ≤ 7.

Comme (a – 5) est positif, son opposé (5 – a) est bien négatif.

On peut multiplier un encadrement par un nombre positif donc :

$$10 \leq 2a \leq 24$$

puis on peut soustraire 20 à tous les membres et : $-10 \leq 2a - 20 \leq 4$.

18 Réponse d.

En réduisant au même dénominateur 4 « en haut » et « en bas » on obtient :

$$[(3-10)/4]/[(7-10)/4] = (-7)/(-3) = 7/3$$

On peut remarquer aussi que la seule réponse positive proposée est le d. alors que la fraction donne un négatif divisé par un négatif…

19 Réponse c.

Il n'est pas nécessaire de savoir résoudre une équation du second degré comme $2x^2 - x = 1$. On essaie les nombres négatifs proposés uniquement, et seul $-1/2$ convient, car :

$$2 \times 1/4 - (-1/2) = 1/2 + 1/2 = 1$$

20 Réponse a.

Entre les cases y et 11 se trouve une case $(25 - y)$ de façon à avoir 36 en trois cases. De proche en proche, vers la gauche, on calcule les cases et on obtient que $x = 25 - y$. De même, vers la droite, on obtient que la case 19 vaut y, d'où ensuite $x = 6$, et $x - y = 6 - 19 = -13$.

			x	11	y	$25 - y$	11	y	$25 - y$	11	y	$25 - y$	11	19		

21 La somme $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 \ldots - 999 + 1\,000$ peut se décomposer en regroupant les deux premiers termes, puis les deux suivants, etc.

Chaque somme de deux termes vaut 1.

Il fallait remarquer que le dernier nombre du calcul étant 1 000, il y a un nombre pair de termes, qu'on peut regrouper deux par deux.

Le nombre de paires est : $1\,000/2 = 500$, d'où le résultat $500 \times 1 = 500$.

Pourcentages 7

L'essentiel à retenir

Pour appliquer un taux de pourcentage p % à un nombre x, on le multiplie par $\frac{p}{100}$

Par exemple, 20 % de 50 euros, c'est : $50 \times \frac{20}{100} = 50 \times 0{,}2 = 10$ euros.

Pour calculer un taux de pourcentage directement

Le taux de pourcentage de x par rapport à y est égal à : $\frac{x}{y} \times 100$.

> Exemple
>
> Si dans une classe de 30 élèves, 18 sont des garçons, le pourcentage de garçons est de $18/30 \times 100 = 60$ %.

Pour calculer un taux de pourcentage avec un produit en croix

En reprenant l'exemple ci-dessus :

Nombre d'élèves	30	100
Nombre de garçons	18	?

$30 \times ? = 18 \times 100$ donc on trouve la solution en calculant $(18 \times 100)/30$, et on trouve bien 60.

Pour augmenter un nombre de x %, on le multiplie par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$

> Exemple
>
> Un article coûte 200 euros. On veut l'augmenter de 3 %.
>
> On calcule : $1 + 3\ \% = 1{,}03$ puis $200 \times 1{,}03 = 206$ euros.

Pour diminuer un nombre de x %, on le multiplie par $\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

Remarque : augmenter un nombre de 3 %, cela revient à lui appliquer un taux de pourcentage de 103 % (1 + 0,03 = 1,03 = 103 %), tandis que diminuer un nombre de 3 %, c'est lui appliquer un taux de 97 % (car 1– 0,03 = 0,97 = 97 %).

Augmenter de 200 %, c'est multiplier par 3

$x \times (1 + 200/100) = x \times (1 + 2) = 3\,x$, on a bien multiplié par 3.

Pour retrouver la valeur initiale après application d'un pourcentage

- Pour une augmentation de t % :

$$\text{valeur initiale} = (\text{valeur finale})/\left(1+\frac{t}{100}\right)$$

- Pour une baisse de t % on a :

$$\text{valeur initiale} = (\text{valeur finale})/\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

> Exemple
>
> Si un prix est de 75 € après une diminution de 20 %, c'est qu'on a multiplié par 0,8 (= 1 – 20 %) la valeur initiale, qui était donc :
>
> $$(\text{valeur finale})/0{,}8 = 75/0{,}8 = 93{,}75\ €$$

Pour composer (enchaîner) des pourcentages, il ne faut pas les ajouter

> Exemple
>
> Un effectif augmente successivement de 10 % puis de 20 %. En appelant E l'effectif de départ, il est devenu 1,10 × E après la première augmentation (1 + 10 % = 1,10), puis 1,2 × (1,1 × E) = 1,32 E.
>
> Le passage de E à 1,32 E est une augmentation de 32 % (on a bien 1,32 E = E × (1 + 32/100)).
>
> Le résultat n'est donc pas 10 % + 20 % = 30 %, mais 32 %.

Baisser de 10 % puis augmenter de 10 %, est-ce revenir au point de départ ?

En appelant x le nombre de départ, on a : $\underbrace{1{,}1 \times \underbrace{0{,}9 \times x}_{\text{diminution de }10\%}}_{\text{augmentation de }10\ \%} = 0{,}99\,x$, soit un taux de pourcentage de 99 % c'est-à-dire une baisse de 1 %. La réponse est non.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Au cours de l'année, la masse totale des déchets ménagers d'un habitant est de 378 kg. Sur ceux-ci actuellement seuls 75,6 kg sont recyclés. Quel est le pourcentage de la masse des déchets qui n'est pas recyclée ?

2 Un épicier achète des marchandises pour 2 354 €. Il paye comptant et donne en paiement 23 billets de 100 €.

Quel pourcentage de remise lui a-t-on fait ?

3 Une ville propose pour les transports en bus deux tarifs :

Tarif A : 3 € le ticket à l'unité.

Tarif B : 40 € le carnet composé de 20 tickets.

Exprimer en pourcentage l'économie réalisée par rapport au prix des 20 tickets vendus au tarif A, pour une personne qui choisit le tarif B.

4 Un morceau de viande pèse 4 kg. Il contient 12 % d'os. Quel est le poids, en grammes, de la viande désossée qu'il donnera ?

5 J'achète 25 quintaux de pommes de terre à 120 € le quintal. On me fait l'escompte du vingtième. Que dois-je ?

6 De combien est le capital qui, placé à 3 % rapporte 2 400 € en un an ?

7 Le blé fournit 75 % de son poids de farine. Pour obtenir 300 kg de farine, combien faut-il de kilogrammes de blé ?

8 Chaque côté d'un carré est réduit de 10 %, alors…

❒ **a.** son périmètre est réduit de 40 %

❒ **b.** son périmètre est réduit de 10 %

❒ **c.** son aire est réduite de 40 %

❒ **d.** son aire est réduite de 10 %

❒ **e.** son aire est réduite de 10^2 %

9 J'augmente les côtés d'un cube de 10 %, alors…

❒ **a.** la surface totale augmente de $(10)^2$ %

❒ **b.** le volume total augmente de $(10)^3$ %

❒ **c.** la surface totale augmente de 10 %

❒ **d.** le volume total augmente de 10 %

❒ **e.** le volume total est multiplié par $1,1^3$

Niveau 2

10 Une pièce de toile blanchie mesure 4,85 m. Elle a perdu au lavage 3 % de sa longueur. Quelle était sa longueur avant d'être lavée ?

11 À quel taux d'intérêts simples a été placé un capital de 24 000 € qui rapporte 1 760 € en un an et deux mois ? (Donner deux décimales.)

12 Un capital de 4 200 € a rapporté en 8 mois 120 €. À quel taux annuel d'intérêts simples était-il placé ? (Donner deux décimales.)

13 Si un prix baisse de 20 % puis augmente de 20 % quel est le bilan des deux opérations par rapport au prix d'origine ?

14 Le premier janvier, on a prêté une somme à 5 % jusqu'au premier avril. Le capital et les intérêts réunis s'élèvent à 5 265 €.
Quelle était la somme prêtée ?

15 Sur un paquet de 300 g de Chips, on lit « 50 % de produit en plus, gratuit », donc…
❒ **a.** il y a 150 g de chips gratuits
❒ **b.** il y a 100 g de chips gratuits
❒ **c.** il y a 30 % du poids total gratuit
❒ **d.** il y a 50 % du poids total gratuit
❒ **e.** cela revient à une réduction de 50 %

16 Baisser un prix de 50 % deux fois de suite, cela revient à…
❒ **a.** une réduction de 25 %
❒ **b.** une réduction de 75 %
❒ **c.** une réduction de 50 %
❒ **d.** un prix nul
❒ **e.** un prix négatif

17 Si 60 % des élèves du collège sont des filles, dont 60 % sont des externes, alors…
❒ **a.** 60 % des élèves sont des filles externes
❒ **b.** 60 % des externes sont des filles
❒ **c.** 40 % des élèves sont des garçons externes
❒ **d.** les filles externes représentent 3,6 % des élèves
❒ **e.** les filles externes représentent $\frac{60}{100} \times \frac{60}{100}$ des élèves

Niveau 3

18 Si t % de A est égal à la moitié de A, alors…
❒ **a.** $t = 0{,}5$
❒ **b.** $t = 50$
❒ **c.** $t = 100$
❒ **d.** $t = \frac{A}{2}$
❒ **e.** $2 \times t\,\% \times A = A$

19 Si 20 % de A est égal à 40 % de B alors…

❒ **a.** $A = 2 \times B$ ❒ **c.** A = 40 % de B ❒ **e.** $20 \times A = 40 \times B$

❒ **b.** $B = 2 \times A$ ❒ **d.** B = 20 % de A

20 Soit A un nombre strictement positif. Si t % de A est égal à 3A, alors…

❒ **a.** $t = 3$ ❒ **b.** $t = 300$ ❒ **c.** $t = 200$ ❒ **d.** $t = 2$ A ❒ **e.** $t = 3$ A

21 Avec une photocopieuse, on réduit de 20 % l'aire d'un carré de 10 cm de côté. On s'aperçoit que la figure est trop petite, mais l'original a été détruit. De quel pourcentage faut-il agrandir l'aire du carré obtenu pour retrouver le carré initial ?

❒ **a.** 20 % ❒ **b.** 25 % ❒ **c.** 30 % ❒ **d.** 80 % ❒ **e.** 14,14 %

22 Diminuer A de B % cela donne A : c'est impossible à moins que…

❒ **a.** $B = 0$ ❒ **b.** $B = 100$ ❒ **c.** $A = 0$ ❒ **d.** $A = B$ ❒ **e.** $A = 100$

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Masse non recyclée : $378 - 75{,}6 = 302{,}4$ kg.

Pourcentage de la masse non recyclée : $100 \times 302{,}4/378 = 80$.

Donc 80 % de la masse n'est pas recyclée.

2 Il paie $23 \times 100 = 2\,300$ € au lieu de 2 354 €. On lui fait donc une remise de 54 € sur 2 354 €.

Le taux de pourcentage de remise est : $100 \times 54/2\,354$ soit environ 2,29 %.

3 Prix de 20 tickets A : $3 \times 20 = 60$ €. Prix de 20 tickets B : 40 €. L'économie au carnet est de 20 € pour 20 tickets, sur une somme de 60 €. On économise un tiers (20 par rapport à 60), la réduction est donc d'environ 33,3 %.

4 S'il y a 12 % d'os, il reste : 100 % – 12 % = 88 % de viande.

La masse de viande désossée est : $4 \times 88/100 = 3{,}520$ kg.

5 Si l'on baisse le prix d'un vingtième, il reste à payer 19 vingtièmes.

La somme due est : $25 \times 120 \times 19/20 = 2\,850$ €.

6 Soit C le capital en euros. On a : $C \times 3/100 = 2400$, puis :

$$C = 2\,400 \times 100/3 = 80\,000 \text{ €}$$

7 On peut dresser un tableau de proportionnalité.

Blé	100	
Farine	75	300

Le poids de blé nécessaire est : $300 \times 100/75 = 400$ kg.

8 Réponse b.

Si le côté vaut c, le périmètre du carré est 4 c.

Si le côté est réduit de 10 % il reste 90 % donc il vaut 0,9 c. Le périmètre devient : $4 \times 0{,}9\ c = 3{,}6\ c$. Il a donc été réduit de : $(4\ c - 3{,}6\ c) = 0{,}4\ c$, ce qui représente un dixième de 4 c : une réduction de 10 %.

! L'aire est multipliée par $0{,}9^2 = 0{,}81$, elle baisse donc de 19 %.

9 Réponse e.

Augmenter les longueurs de 10 %, c'est les multiplier par 1,1. Le périmètre augmente de 10 %.

Les aires sont alors multipliées par $1{,}1^2 = 1{,}21$; donc elles augmentent de 21 %.

Les volumes sont multipliés par $1{,}1^3 = 1{,}331$; donc ils augmentent de 33,1 %.

! Augmenter de 10^2 %, c'est augmenter de 100 %, c'est-à-dire doubler.

Niveau 2

10 Quand 3 % sont perdus, il reste 97 %.

On peut dresser un tableau de proportionnalité.

Avant lavage	100 %	
Après lavage	97 %	4,85 m

Le nombre à trouver s'obtient par : $4{,}85 \times 100/97$.

On trouve 5. Avant d'être lavée, la toile mesurait 5 mètres.

11 Un an et deux mois font 14 mois. Soit t % le taux d'intérêts simples annuels :

$24\,000 \times (t/100) \times (14/12) = 1\,760$ donne $2\,800\ t = 1760$,

puis $t = 1\,760/2\,800 = 6{,}29$. Les intérêts sont de 6,29 %.

12 Huit mois font huit douzièmes d'années.

Les fractions du calcul suivant pourront utilement être simplifiées :

$$4\,200 \times (t/100) \times (8/12) = 120 \text{ donc } 28\ t = 120$$

puis $t = 120/28$ soit environ 4,28. L'intérêt était de 4,28 %.

13 Baisser de 20 %, c'est multiplier par 0,80. Ajouter 20 % c'est multiplier par 1,20.
Dans l'histoire, les prix sont multipliés par : $0{,}80 \times 1{,}20 = 0{,}96$.
Le bilan est donc une baisse de 4 % (car 100 % – 96 % = 4 %).

14 Du premier janvier au premier avril, il y a 3 mois (et non douze).
Soit S la somme en euros.

$$S + [S \times (5/100) \times (3/12)] = 5\,265$$
$$S + 0{,}0125\ S = 5\,265$$
$$1{,}0125\ S = 5\,265$$
$$S = 5\,265/1{,}0125 = 5\,200$$

Il s'agit d'une somme de 5 200 €.

15 Réponse b.
Si on met 50 % en plus, on passe de 100 à 150 donc on multiplie par 1,5.
Si l'on a ainsi 300 c'est qu'au départ on avait : $300/1{,}5 = 200$.
Le poids normal était 200 g, on a mis 100 g gratuits en plus.

16 Réponse b.
Baisser de 50 % c'est multiplier par (1/2). Si on le fait deux fois de suite, on multiplie par $(1/2)^2$ soit (1/4). S'il ne reste qu'un quart, cela veut dire qu'on a enlevé (3/4).

17 Réponse e.
« Prendre 60 % de », c'est multiplier par 60/100.
Donc 60 % de 60 % c'est le total multiplié par $(60 \times 60)/(100 \times 100)$ ce qui revient à prendre 36 %.

Niveau 3

18 Réponses b. et e.
50 % de A représente la moitié de A, donc $t = 50$ et le b. est juste.

Le e. est juste aussi car : $2 \times 50\ \% \times A = 100\ \% \times A = A$.

19 Réponses a. et e.
20 % de A c'est $0{,}2 \times A$; 40 % de B c'est $0{,}4 \times B$.
$0{,}2\ A = 0{,}4\ B$ donne en multipliant par 10 les deux membres : $2A = 4B$ puis $A = 2B$.
Le a. est donc vrai.

Le e. est juste aussi : $20 \times A = 20 \times 2B = 40 \times B$.

20 Réponse b.
$A \times t/100 = 3A$ donc : $t/100 = 3$ et $t = 3 \times 100 = 300$.

21 Réponse b.

Le contraire d'enlever 20 %, c'est ajouter 25 %. On passe de 100 à 80, puis on revient à 100 en ajoutant 20 à 80, or $\frac{20}{80}$ c'est un quart.

22 Réponses a. et c.

Au a., 0 % de A c'est 0 ; A – 0 = A.

Au c., B % de 0 c'est 0 ; 0 – 0 = 0 = A.

Calculs, priorités et sens des opérations 8

L'essentiel à retenir

Priorités de calcul

1. La multiplication et la division sont effectuées en priorité sur l'addition et la soustraction.
2. Dans un calcul avec parenthèses, les calculs entre parenthèses sont effectués en priorité.
3. Lorsqu'on a des parenthèses emboîtées, on commence par les parenthèses les plus internes.

> Exemple
> $N = (5 + (4 \times (3 - 2)) - 6) = (5 + (4 \times 1) - 6) = (5 + 4 - 6) = 9 - 6 = 3$

Distributivité de la multiplication

Quels que soient les nombres a, b, c :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \quad \text{et} \quad a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Ces résultats se notent également :

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad a(b - c) = ab - ac$$

Fractions

Si b et k ne sont pas nuls : $\frac{a}{b} = \frac{(a \times k)}{(b \times k)}$ et $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$

Quand on ne peut plus simplifier une fraction on a obtenu une fraction irréductible.

> Exemple La fraction irréductible égale à 12/18 est 2/3.

Produit de deux fractions

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a \times c)}{(b \times d)}$$

Somme et différence de deux fractions

Pour deux fractions de même dénominateur :

- on additionne ou on soustrait les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{(a+b)}{c}\ ;\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{(a-b)}{c}$$

Pour deux fractions dont les dénominateurs sont différents, on commence par écrire des fractions qui sont égales aux fractions données mais qui ont le même dénominateur (pour cela on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs).

Exemple
$$\frac{2,5}{3,2}+\frac{1}{1,6}=\frac{25}{32}+\frac{10}{16}=\frac{25}{32}+\frac{20}{32}=\frac{(25+20)}{32}=\frac{45}{32}$$

Inverse d'un nombre et quotients de fractions

L'inverse d'un nombre « a » non nul est le nombre qui multiplié par a donne 1.

On le note : « $\frac{1}{a}$ ». Pour toute valeur de a non nulle : $a \times \frac{1}{a} = 1$. Si a, b, c, d sont des nombres avec b, c, d différents de zéro, alors :

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}\ ;\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Division euclidienne

Effectuer une division euclidienne d'un entier a (le dividende) par un entier b (le diviseur), c'est trouver deux nombres entiers, le quotient q et le reste r tels que :

dividende = (diviseur × quotient) + reste ; soit $a = bq + r$.

Exemple

Division de 82 par 14. Le quotient est 5 et le reste est 12 (on rappelle que 14 est le diviseur et que 82 est le dividende).

dividende $\qquad$ diviseur

$$\begin{array}{r|l} 82 & 14 \\ \cline{2-2} 12 & 5 \end{array}$$

reste $\qquad$ quotient

On a ici la relation $82 = (14 \times 5) + 12$.

En général, le reste est toujours inférieur strictement au diviseur. Il est nul (la division tombe juste avec un quotient entier) quand le dividende est un multiple du diviseur.

On ne peut pas diviser par zéro.

Critères de divisibilité

- Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, ou 2, 4, 6, 8.
- Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

> Exemple
>
> 2 028 est divisible par 4 car 28 l'est ; 2 018 n'est pas divisible par 4 car 18 ne l'est pas.

- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Par exemple : 2 007 est divisible par 9 et par 3 car $2 + 0 + 0 + 7 = 9$ est divisible par 9 et par 3.
- Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 5 ou 0.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Un chapelier a livré 24 chapeaux à 30 € l'un. Il reçoit en échange un costume et 180 €. Combien vaut le costume ?

2 Un propriétaire de vergers récolte 194 sacs de pomme. Il en utilise 81 pour faire du cidre. Il vend ce qui lui reste à raison de 10 euros le sac. Combien cela lui rapporte-t-il ?

3 Je paye deux caisses de viande de mouton désossé, de même valeur, avec 18 billets de 50 € et 4 billets de 20 €. Combien vaut chaque caisse de viande ?

4 Un paysan a récolté 3 000 litres d'avoine. Son cheval en mange 5 litres par jour. Combien lui en restera-t-il à la fin de l'année ?

5 Une dame est née en 1945. Elle s'est mariée à 20 ans et elle est morte 42 ans après son mariage. En quelle année est-elle morte ?

6 J'ai acheté une barrique de vin pour 540 euros. Les frais de transport ont coûté 30 euros. Je veux la revendre en gagnant 50 euros. Combien devrai-je la revendre ?

7 Une grand-mère donne à son plus jeune petit-fils 40 €, au cadet le double, et à l'aîné autant qu'aux deux autres réunis. Combien d'euros a-t-elle distribué ?

8 Une maison a deux étages. Le locataire du deuxième étage paie 625 € de loyer mensuel, celui du premier 65 € de plus, et celui du rez-de-chaussée 105 € de plus que celui du premier étage.

Quel revenu annuel donne la maison ?

9 En revendant 3 780 euros un violon acheté sur internet, on perd 250 €. Combien faudrait-il le revendre pour gagner 500 euros ?

Niveau 2

10 Si un vin contient 10 cL d'alcool par litre, on dit qu'il a 10 degrés. D'après cela, trouver la quantité d'alcool contenue dans 7 barriques de chacune 225 litres de vin à 10 degrés.

11 Une salle rectangulaire mesure 8,5 m de long et 6,7 m de large. Elle a deux portes de 90 cm de large chacune. Quelle est la longueur de la plinthe qui fait le tour de la salle ?

12 La ligne de chemin de fer coupait perpendiculairement la route entre deux villages. Au passage à niveau, le premier village était à 1 570 m et le deuxième à 585 m. On dévie la ligne de façon qu'elle coupe la route à égale distance des deux villages : quelle sera cette distance ?

13 Le « sommetriple » de 2 et 3 est 15 ; le « sommetriple » de 5 et 8 est 39. Quel est le « sommetriple » de 7 et 13 ?

14 Le « multiplieles » de 45 est 20 ; le « multiplieles » de 27 est 14.

Quel est le « multiplieles » de 10 ?

15 46 kg de café ont coûté 105 € plus 33 euros de frais de port. À combien revient le kg ?

16 Une barrique est pleine de 480 litres de vin. On en met la moitié en bouteilles de 80 cL et le reste en bouteilles de 3/4 litres. Combien emplira-t-on de bouteilles en tout ?

17 Le « concacarré » de 37 est 949 ; le « concacarré » de 81 est 641.

Quel est le « concacarré » de 56 ?

18 Sur la plage un revendeur de beignets a gagné 60 euros en vendant 28 sacs à 4,50 € pièce. Combien vend-il le sac de beignets ?

19 Un amateur de jeux mathématiques se rend dans un salon avec 100 euros à dépenser. Il achète un maximum de jeux de stratégie à 13 euros pièce, puis avec ce qui lui reste des revues à 1,50 euro chacune. Combien aura-t-il de revues ?

20 Soit le nombre $N = 3 + \frac{14}{10} + \frac{0,5}{100}$;

❒ **a.** *N* est plus grand que 3 et plus petit que 4
❒ **b.** Le chiffre des dixièmes de *N* est 14
❒ **c.** *N* vaut $\frac{300 + 140 + 0,5}{100}$
❒ **d.** $N = 3 + 0,14 + 0,005$
❒ **e.** $N = 3 + 1,4 + 0,0005$

21 Sachant que $\frac{7,35}{0,6} = 12,25$ alors…

❒ **a.** $\frac{735}{6} = 1225$
❒ **b.** $\frac{735}{60} = 1\,225$
❒ **c.** $\frac{7,35}{60} = 1225$
❒ **d.** $\frac{735}{0,6} = 1225$
❒ **e.** $\frac{735}{60} = 0,1225$

22 Le résultat de $\dfrac{\frac{5}{6}}{7}$ est égal à :

❒ **a.** $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{7}}$ ❒ **b.** $\dfrac{\left(\frac{5}{7}\right)}{6}$ ❒ **c.** $\dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)}{7}$ ❒ **d.** $\dfrac{5 \times 7}{6}$ ❒ **e.** $\dfrac{5 \times 6}{7}$

Niveau 3

23 Un marchand achète 72 vases pour 528 €. Il en casse 3. Comme il veut gagner 80 € sur son achat, combien devra-t-il revendre chaque vase ?

24 Un entrepreneur emploie 14 ouvriers sur un chantier et 18 sur un autre. Il leur paye un salaire journalier total de 1 750 €. Sachant que chaque ouvrier du premier chantier gagne 50 € par jour, calculer le salaire journalier d'un ouvrier du deuxième chantier.

25 Un copiste de partitions musicales peut copier 3 pages en un quart d'heure ; un autre en copie 10 pages à l'heure. Combien d'heures mettront-ils ensemble pour copier un manuscrit musical de 286 pages ?

26 Un débitant a vendu dans un mois 7 hl de vin : il en a reçu 4 400 €. Sachant qu'il fait ainsi un bénéfice de 800 €, et qu'il avait payé 120 € de transport pour ce vin, trouver le prix d'achat d'un litre.

27 Un libraire achète des livres 260 € la douzaine. On lui en donne un de plus par douzaine. Il revend ces livres 25 € pièce. Sachant qu'il a gagné 390 € dans la journée, combien a-t-il vendu de livres ?

28 Une commune avait, au dernier recensement, 1 752 habitants. Depuis il y a eu 94 naissances et 63 décès ; de plus 21 habitants ont quitté la commune et 32 nouveaux s'y sont installés. Quelle est maintenant la population de la commune ?

29 Quel est le total de quatre nombres dont le plus petit est 111, les autres nombres croissant de 63 en 63 ?

30 L'hexaplus de deux nombres est le produit par 6 de leur somme ; l'hexaminus de deux nombres est le produit par 6 de leur différence positive. Combien vaut le résultat de la division de l'hexaplus des nombres 3 et 7 par leur hexaminus ?

31 Dans une maison il y a deux locataires qui paient l'un 680 € et l'autre 550 € d'impôts. Le montant de l'impôt est pour chacun le dixième du loyer annuel. Sachant que le propriétaire fait en moyenne 1 800 € de réparations, trouvez combien la location de sa maison lui rapporte en moyenne chaque année.

32 Le résultat de $\dfrac{5}{\left(\dfrac{6}{7}+\dfrac{2}{7}\right)}$ est égal à :

❒ **a.** $\dfrac{5}{\frac{6}{7}}+\dfrac{5}{\frac{2}{7}}$ ❒ **b.** $\dfrac{5}{\frac{8}{7}}$ ❒ **c.** $\dfrac{5+\frac{6}{7}}{5+\frac{2}{7}}$ ❒ **d.** $5\times\left(\dfrac{7}{6}+\dfrac{7}{2}\right)$ ❒ **e.** $\left(5\times\dfrac{7}{6}\right)+\left(5\times\dfrac{7}{2}\right)$

33 Quel est le nombre qui complète la suite $\dfrac{6}{9}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{10}{15}$?

❒ **a.** $\dfrac{3}{2}$ ❒ **b.** $\dfrac{45}{9}$ ❒ **c.** $\dfrac{8}{12}$ ❒ **d.** $\dfrac{12}{8}$ ❒ **e.** $\dfrac{9}{45}$

34 Quel est le nombre qui complète la suite $\dfrac{5}{18}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{15}{2}$?

❒ **a.** $\dfrac{18}{5}$ ❒ **b.** $\dfrac{15}{6}$ ❒ **c.** $\dfrac{30}{2}$ ❒ **d.** $\dfrac{45}{2}$ ❒ **e.** $\dfrac{15}{5}$

35 Le résultat du calcul $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$ est égal à :

❒ **a.** $\dfrac{1+1+1}{2+4}$ ❒ **b.** $\dfrac{1+1+1}{1+2+4}$ ❒ **c.** $\dfrac{4+2+1}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{3}{4}$ ❒ **e.** $2-\dfrac{1}{4}$

36 On obtient un résultat entier à partir du quotient $\frac{42}{0{,}01}$ …

❐ **a.** en le divisant par 100
❐ **b.** en le multipliant par 100
❐ **c.** en le divisant par 0,01
❐ **d.** en le multipliant par 0,01
❐ **e.** en ne faisant rien du tout

37 Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ alors…

❐ **a.** $a + b = 1$
❐ **b.** $a + b = a \times b$
❐ **c.** $a = b$
❐ **d.** $b = 1 - \frac{1}{a}$
❐ **e.** $\frac{2}{a+b} = 1$

38 Si l'impression de 1 000 livres coûte 30 000 €, et si chaque millier de plus coûte 7 000 €, alors…

❐ **a.** avec 54 500 € j'imprime 4 500 livres
❐ **b.** avec 51 000 € j'imprime 3 000 livres
❐ **c.** avec 47 500 €, j'imprime 2 500 livres
❐ **d.** avec 100 000 €, j'imprime 70 000 livres
❐ **e.** avec 70 000 €, j'imprime 100 000 livres

39 Parmi les cinq propositions, trouvez le nombre pair dont les chiffres sont tous différents, dont le chiffre de centaines est le double du chiffre des unités, et dont le chiffre des dizaines est plus grand que le chiffre des milliers…

❐ **a.** 1 246 ❐ **b.** 3 874 ❐ **c.** 4 689 ❐ **d.** 4 874 ❐ **e.** 8 472

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Le prix du costume est : $(24 \times 30) - 180 = 720 - 180 = 540$ euros.

2 Nombre de sacs restants : $194 - 81 = 113$. Prix de vente des sacs : $113 \times 10 = 1\,130$ euros.

3 Prix d'une caisse : $[(18 \times 50) + (4 \times 20)]/2 = 980/2 = 490$ €.

4 On a $3\,000/5 = 600$. Il y a de quoi faire manger le cheval 600 jours. En fin d'une année de 365 jours, il restera $600 - 365 = 235$ jours de nourriture, soit $5 \times 235 = 1\,175$ litres d'avoine.

5 La dame est morte à $20 + 42 = 62$ ans. Elle est donc morte en $1945 + 62 = 2007$.

6 Le prix de revente est : $540 + 30 + 50 = 620$ €.

7 Somme donnée au cadet : $40 \times 2 = 80$ €.
Somme donnée à l'aîné : $40 + 80 = 120$ €.
Somme totale donnée : $40 + 80 + 120 = 240$ €.

8 Loyer du premier étage : $625 + 65 = 690$ €.
Loyer du rez-de-chaussée : $690 + 105 = 795$ €.
Montant total des loyers sur un an :

$$12 \times (625 + 690 + 795) = 12 \times 2\,110 = 25\,320 \text{ €}.$$

9 Il faudrait revendre le violon : $3\,780 + 250 + 500 = 4\,530$ €.

Niveau 2

10 Il y a 10 cL soit 0,1 L d'alcool dans un litre de vin. La quantité d'alcool cherchée est donc $225 \times 7 \times 0{,}1 = 157{,}5$ L.

11 Périmètre de la salle : $2 \times (8{,}5 + 6{,}7) = 2 \times (15{,}2) = 30{,}4$ m.
De plus 90 cm = 0,9 m. D'où, longueur de la plinthe : $30{,}4 - (2 \times 0{,}9) = 28{,}6$ m.

12 C'est la moyenne arithmétique des deux distances qui donne le kilométrage au bout duquel la route devra être coupée :
$(585 + 1\,570)/2 = 1\,077{,}5$ m.

13 On ajoute les deux nombres puis on multiplie le résultat par 3.
On obtient : $7 + 13 = 20$ puis $20 \times 3 = 60$. Le sommetriple de 7 et 13 est 60.

14 On multiplie les deux chiffres. Ainsi $1 \times 0 = 0$. Le multiplieles de 1 et 0 est 0.

15 Prix de revient des 46 kg : $105 + 33 = 138$ €.
Prix de revient d'un kilogramme : $138/46 = 3$ €.

16 Quantité de vin attribuée à chaque sorte de bouteilles : $480/2 = 240$ L.
Nombre de bouteilles de 80 cL (soit 0,8 L) : $240/0{,}8 = 300$ bouteilles.
Nombre de bouteilles de 3/4 L (soit 0,75 L) : $240/0{,}75 = 320$ bouteilles.
Nombre total de bouteilles : $300 + 320 = 620$ bouteilles.

17 On écrit l'un après l'autre les carrés des chiffres du nombre. Le concacarré de 56 est 2 536.

18 Prix de vente de 28 sacs : $28 \times 4{,}5 = 126$ €.
Prix d'achat des 28 sacs : $126 - 60 = 66$ €.
Prix d'achat d'un sac : $66/28 = 2{,}36$ € environ.

19 Comme $100 = 13 \times 7 + 9$, il achète 7 jeux et il lui reste 9 €.
Ensuite $9/1{,}5 = 6$ il peut donc acheter 6 revues.

20 Réponse c.
On calcule $N = 4{,}405$ donc seule la proposition c. est juste.

21 Réponse d.

> Attention aux résultats dans le membre de droite, il s'agit souvent de 1 225 et non de 12,25 comme dans l'énoncé.

22 Réponse d.

Le résultat de $\dfrac{5}{\dfrac{6}{7}}$ est $5 \times 7/6$ soit $35/6$.

Niveau 3

23 Prix de vente des vases : $528 + 80 = 608$ €.
Nombre de vases à vendre : $72 - 3 = 69$.
Prix de revente d'un vase : $608/69 = 8{,}81$ euros environ.

24 Salaire des ouvriers du premier chantier : $14 \times 50 = 700$ €.
Salaires des ouvriers du deuxième chantier : $1\,750 - 700 = 1\,050$ €.
Salaire journalier d'un ouvrier du deuxième chantier : $1\,050/18 = 58{,}33$ €.

25 En une heure, à eux deux, ils copient $(3 \times 4) + 10 = 22$ pages.
Pour copier 286 pages il leur faudra : $286/22 = 13$ heures.

26 Prix d'achat du vin : $4\,400 - 800 - 120 = 3\,480$ €.
De plus 7 hl = 700 l. Prix d'achat d'un litre : $3\,480/700 = 4{,}97$ €.

27 On a $12 + 1 = 13$. Prix d'achat d'un livre : $260/13 = 20$ €.
Le libraire gagne sur chaque livre : $25 - 20 = 5$ €.
Nombre de livres vendus : $390/5 = 78$ livres.

28 La population de la commune est : $1\,752 + 94 + 32 - 63 - 21 = 1\,794$ habitants.

29 Le total est : $111 + 174 + 237 + 300 = 822$.

30 L'hexaplus de 3 et 7 est : $6 \times (3 + 7) = 6 \times 10 = 60$.
L'hexaminus de 3 et 7 est : $6 \times (7 - 3) = 6 \times 4 = 24$.
Le résultat de la division de 60 par 24 est 2,5.

31 Les loyers annuels sont : $680 \times 10 = 6\,800$ € et $550 \times 10 = 5\,500$ €.

Le total des loyers en un an est : $6\,800 + 5\,500 = 12\,300$ €.

En déduisant 1 800 € il reste : $12\,300 - 1\,800 = 10\,500$ € par an.

32 Réponse b.

Il faut trouver : $5/(8/7) = 5 \times 7/8 = 35/8$.

Le résultat du a. est $35/6 + 35/2 = 140/8 = 35/2$. Celui du e. est égal.

Le c. vaut $41/37$. Le d. vaut $5 \times (28/3) = 70/3$.

33 Réponse c.

Toutes les fractions de l'énoncé, après simplification, sont égales à $2/3$.

Parmi les propositions, seul le c. est juste, avec $8/12 = 2/3$.

34 Réponse d.

On passe d'un nombre au suivant en multipliant par 3. La valeur recherchée est donc $3 \times (15/2) = 45/2$ soit le d.

35 Réponses c. et e.

En réduisant au même dénominateur 4 on obtient la réponse c. soit $7/4$.

Le e. donne le même résultat : $2 - 1/4 = 7/4$.

36 Toutes les réponses sont bonnes.

Le quotient est 4 200. En le divisant par 100 ou en le multipliant par 100 le résultat reste entier. Remarquer que diviser par 0,01 c'est multiplier par 100.

37 Réponse b.

Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ alors $(b + a)/(ab) = 1$ donc $a + b = ab$.

Le b. seul conduit à cette formule. Pour le d., on obtient $ab = a - 1$ ce qui est différent.

38 Réponses a. et c.

Pour le a., $54\,500 - 30\,000 = 24\,500$ et $24\,500/7\,000 = 3{,}5$. Si on ajoute 3,5 milliers de livres à 1 000 livres on a bien 4 500 livres.

Pour le b., $3\,000 = 1\,000 + 2\,000$. Pour les 2 000 livres on paie 14 000 €, donc avec 44 000 € et non avec 51 000 € on aurait le nombre voulu de livres.

Pour le c., 1 500 livres de plus c'est 10 500 € de plus et on arrive à une dépense de 40 500 €, et non 47 000 €. Cependant, qui peut le plus peut le moins, donc il est possible d'imprimer avec 47 000 € les livres voulus.

Pour le d., $100\,000 - 30\,000 = 70\,000$ soit 10 fois 7 000; on peut avoir $1\,000 + 10\,000 = 11\,000$ livres, mais pas 70 000.

Pour le e., 70 000 – 30 000 = 40 000. Si on divise ce nombre par 7 000 on obtient environ 5,7 milliers de livres de plus et le total de 6 700 est loin des 100 000 voulus.

39 **Réponse b.**

On vérifie l'une après l'autre les conditions : seul le b. est satisfaisant.

Attention à la proposition d. : toutes les consignes sauf une seraient vérifiées, car les chiffres ne sont pas tous différents.

Puissances 9

L'essentiel à retenir

Quel que soit le nombre entier positif n supérieur à 1 et le nombre a, réel non nul : $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (avec n facteurs égaux à « a »)

et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

De plus $a^1 = a$, $a^0 = 1$; bien noter que $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Exemples $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$; $2007^1 = 2007$; $2006^0 = 1$.

Produits et quotients de puissances

Pour tous nombres non nuls a et b et pour tous les nombres m et n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$
$$(a^m)^n = a^{(m \times n)} = a^{mn}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (avec a non nul)}$$

Exemples

$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$; $7^4 \times 7 = 7^4 \times 7^1 = 7^5$;

$2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4$; $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$; $\dfrac{5^3}{5^9} = 5^{3-9} = 5^{-6}$

Règles de priorité

- En l'absence de parenthèses on calcule les puissances avant d'effectuer les autres opérations ;
- En présence de parenthèses les calculs entre parenthèses sont prioritaires.

Cas particulier des puissances de dix

$10^n = 10 \dots 0$ avec un 1 suivi de n zéros ;
$10^{-n} = 0{,}0 \dots 01$ avec n zéros précédant 1, sans oublier la virgule.

Exemples $10^5 = 100\,000$; $10^{-5} = 0{,}000\,01$.

Notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où :

- a est un nombre décimal compris entre 1 (inclus) et 10 (non inclus)
- et où n est un nombre entier positif ou négatif.

> Exemples
>
> $6{,}39 \times 10^2$ est une notation scientifique, mais 0,117 n'est pas une notation scientifique. Il faudrait écrire ce nombre $1{,}17 \times 10^{-1}$.

Il est facile de ranger des nombres en comparant leurs notations scientifiques :

- on range les nombres dans l'ordre de leur exposant ;
- pour ceux qui ont le même exposant, on compare alors le nombre qui multiplie la puissance de dix.

Conduire un calcul avec des puissances de dix

Lorsqu'il n'y a que des produits ou des quotients dans lesquels figurent des puissances de dix, on commence en général par regrouper les puissances de dix.

> Exemple
>
> $$\frac{78 \times (10^3)^4 \times 10^{-5}}{26 \times 10^5} = \frac{78}{26} \times \frac{(10^3)^4 \times 10^{-5}}{10^5} = 3 \times \frac{10^{12} \times 10^{-5}}{10^5}$$
>
> $$= 3 \times \frac{10^7}{10^5} = 3 \times 10^2 = 300$$

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Le nombre B suivant est une puissance de dix. Laquelle ?

$$B = 0{,}987\ 654\ 321 - 0{,}987\ 654\ 320$$

2 Le nombre C suivant est une puissance de dix. Quel est son exposant ?

$$C = 3{,}125 \times 3\ 200$$

3 Le nombre D suivant est une puissance de dix. Quel est son exposant ?

$$D = \frac{10^{100}}{10^{-30}}$$

4 Le nombre E suivant est une puissance de dix. Quel est son exposant ?

$$E = \frac{0,2}{2\ 000\ 000}$$

5 Quel nombre faut-il mettre à la place des pointillés ?

$$\frac{10^{\cdots}}{10^{-4}} = 10^3$$

6 Quel nombre faut-il mettre à la place des pointillés ?

$$\frac{10^8}{(10^{\cdots})} = 10^{-1}$$

7 Quel nombre faut-il mettre à la place des pointillés ?

$$0,003 \times 10^{-5} = 3 \times 10^{\cdots}$$

8 Calculer la somme du triple de 3^3 et du tiers de 3^3.

9 On construit un tableau de nombres en multipliant deux cases A et B de la même ligne pour trouver la case C située à la ligne du dessous et entre les colonnes de A et B.

A		B
	C = A × B	

Compléter le tableau ci-dessous et trouver la case centrale de la ligne du bas.

7^{-4}		7^6		7^{-2}

10 Soit le nombre N = 12,34. Alors…

❒ **a.** $N = 1\ 234 \times 10^2$ ❒ **c.** $N = 0,1234 \times 10^{-2}$ ❒ **e.** $N \times 10^2$ est entier

❒ **b.** $N = 1\ 234 \times 10^{-2}$ ❒ **d.** $N \times 10^{-2}$ est entier

11 Le résultat de $\frac{10^n}{10^m}$ est égal à :

❒ **a.** 10^{n-m} ❒ **b.** 10^{m-n} ❒ **c.** $10^{n/m}$ ❒ **d.** $10^{m/n}$ ❒ **e.** $10^{n \times m}$

12 10^{m+n} est égal à :

❒ **a.** $10^m + 10^n$ ❒ **c.** $(10^n)^m$ ❒ **e.** 1 si $m + n = 0$

❒ **b.** $10^m \times 10^n$ ❒ **d.** 0 si $m + n = 0$

13 $\dfrac{10^a}{10^{-b}}$ est égal à :

❒ **a.** 10^{a+b} ❒ **c.** $(10^a)^b$ ❒ **e.** 1 si $a+b=0$

❒ **b.** 10^{a-b} ❒ **d.** $\dfrac{10^b}{10^{-a}}$

Niveau 2

14 Combien vaut le quart de 2^{84} ?

❒ **a.** 2^{42} ❒ **b.** 2^{21} ❒ **c.** 2^{82} ❒ **d.** 2^{80} ❒ **e.** 2^{88}

15 Soient les nombres $a = 3 \times 10^{-3}$, $b = 3 \times 10^3$, $c = -3 \times 10^{-3}$ et $d = -3 \times 10^3$, alors…

❒ **a.** $0 \leq d$ ❒ **c.** $a + c = 0$ ❒ **e.** $c \leq d \leq a \leq b$

❒ **b.** $d \leq c$ ❒ **d.** $0 \leq a + c$

16 Quel est le plus petit nombre ?

❒ **a.** 2^{32} ❒ **b.** 4^{14} ❒ **c.** 8^{11} ❒ **d.** 16^8 ❒ **e.** 32^5

17 Le nombre $(3 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-1})$ vaut :

❒ **a.** $0{,}333$ ❒ **c.** 3×10^{-6} ❒ **e.** $10 \times [3^{-3} + 3^{-2} + 3^{-1}]$

❒ **b.** $\dfrac{1}{3}$ ❒ **d.** $\dfrac{1}{3\,000} + \dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{30}$

18 La somme du produit du carré de 3 par le cube de 2 avec le produit du cube de 3 par le carré de 2 est égale à :

❒ **a.** $(3 \times 2)^{2 \times 3} + (2 \times 3)^{3 \times 2}$ ❒ **d.** $(3^2 + 2^3) \times (3^3 + 2^2)$

❒ **b.** $3^2 \times 2^3 + 3^3 \times 2^2$ ❒ **e.** $(3 \times 2)^2 \times (2 + 3)$

❒ **c.** $(3 \times 2)^{2+3} + (3 \times 2)^{3+2}$

19 Le nombre $(3^2 + 2^3) \times 3^3 - 3^3$ vaut :

❒ **a.** $5^5 \times 3^2 - 3^2$ ❒ **c.** $3^2 + 6^3 - 3^3$ ❒ **e.** $3^4 + 2^5 - 3^2$

❒ **b.** 17×0 ❒ **d.** $(3^2 + 2^3 - 1) \times 3^3$

Niveau 3

20 Le dernier chiffre (en système décimal) de 2137^{753} est :

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 7 ❒ **d.** 9 ❒ **e.** 5

21 Soit n un entier. Alors $a \times 10^n$ est décimal lorsque…

❒ **a.** a est entier ❒ **c.** a est décimal et n positif ❒ **e.** $1 < a < 10$

❒ **b.** a est décimal et n négatif ❒ **d.** $a = 0$ et $n = 0$

22 Les nombres 10^{p} et 10^{-p} sont entiers…

❒ **a.** quand p est un entier positif
❒ **b.** quand p est un entier négatif
❒ **c.** quand $p = 0$
❒ **d.** quand $p = 1$
❒ **e.** ils ne sont jamais entiers ensemble

23 Sachant que a est un entier, alors $\dfrac{a^{n}}{a^{m}}$ est entier…

❒ **a.** quand m divise n
❒ **b.** quand $m \leq n$
❒ **c.** quand m est l'opposé de n
❒ **d.** quand $(n - m)$ est positif
❒ **e.** quand $(n + m)$ est positif

24 Quel est le dernier chiffre de 3^{458} ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 9 ❒ **c.** 7 ❒ **d.** 3 ❒ **e.** 4

25 L'égalité $10^{a} + 10^{b} = 10^{a+b}$ est possible lorsque…

❒ **a.** $a = -b$
❒ **b.** $a = 0$ ou $b = 0$
❒ **c.** $a = 0$ et $b = 0$
❒ **d.** $a = b$
❒ **e.** c'est toujours faux !

26 Que vaut $\dfrac{2^{12}}{12^{2}}$?

❒ **a.** $\dfrac{2^{8}}{3^{2}}$ ❒ **b.** $\dfrac{2^{10}}{12}$ ❒ **c.** $\dfrac{2^{6}}{6}$ ❒ **d.** $\dfrac{1}{6}$ ❒ **e.** 1

27 Soient les nombres $a = 2^{100}$, $b = 2^{-100}$, $c = -2^{100}$ et $d = (-2)^{-100}$, alors…

❒ **a.** $a + b = 0$
❒ **b.** $a \times b \leq 0$
❒ **c.** $a + d = 0$
❒ **d.** $c \leq d \leq b \leq a$
❒ **e.** $\dfrac{a}{b} = -1$

28 Le nombre de chiffres de l'écriture décimale du résultat de l'opération $4^{5} \times 5^{13}$ est :

❒ **a.** 11 ❒ **b.** 12 ❒ **c.** 13 ❒ **d.** 16 ❒ **e.** 17

29 Le nombre 231^{57} est divisible par :

❒ **a.** 121 ❒ **b.** 273 ❒ **c.** 63^{29} ❒ **d.** 81^{14} ❒ **e.** 7^{57}

30 Le nombre $2^{32} - 1$ est égal à :

❒ **a.** 4294967295
❒ **b.** 4294967297
❒ **c.** 4294967290
❒ **d.** 4294967285
❒ **e.** 4294967293

31 Une barre de métal s'allonge de $13{,}6 \times 10^{-6}$ m lorsque la température augmente de 1 degré. À quelle différence de température, mesurée en degrés, cette barre a-t-elle été soumise si un allongement de $10{,}2 \times 10^{-5}$ m est constaté ?

❒ **a.** 4
❒ **b.** 0,133 …
❒ **c.** 7,5
❒ **d.** $8{,}84 \times 10^{-5}$
❒ **e.** une autre valeur

32 Si $x = 2^{2007} + 2^{-2007}$ et $y = 2^{2007} - 2^{-2007}$, que vaut $(x^2 - y^2)$?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 2 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 2007 ❒ **e.** 2^{4014}

33 En septembre, je gagnais en euros : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 12^3 + 13^3$.
En octobre, je gagne : $(1 + 2 + 3 + \ldots + 13)^2$. De combien ai-je été augmenté ?

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 $B = 0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$.

2 $C = 3{,}125 \times 3\,200 = 10\,000 = 10^4$. L'exposant est 4.

3 $D = \dfrac{10^{100}}{10^{-30}} = 10^{130}$. L'exposant est 130.

4 $E = \dfrac{0{,}2}{2\,000\,000} = (2 \times 10^{-1})/(2 \times 10^6) = 10^{-1-6} = 10^{-7}$.
L'exposant demandé est – 7.

5 Si $\dfrac{10^{\cdots}}{10^{-4}} = 10^3$ alors, en mettant le nombre x à la place des pointillés, on a :
$x - (-4) = 3$ donc $x + 4 = 3$ et $x = -1$.
Les pointillés cachent le nombre (– 1).

6 Si $\dfrac{10^8}{(10^{\cdots})} = 10^{-1}$ alors, en mettant le nombre x à la place des pointillés, on a :

$$8 - x = -1 \text{ donc } 8 + 1 = x \text{ et } x = 9$$

Les pointillés cachent le nombre 9.

7 Si $0{,}003 \times 10^{-5} = 3 \times 10^{\cdots}$ alors, en simplifiant par 3 et en mettant le nombre x à la place des pointillés, on a :
$10^{-3} \times 10^{-5} = 10^x$ puis $10^{-8} = 10^x$ et enfin $x = -8$.
Les pointillés cachent le nombre – 8.

8 La somme du triple de 3^3 et du tiers de 3^3 est :

$$3 \times 27 + (27/3) = 81 + 9 = 90$$

9 On obtient :

7^{-4}		7^6		7^{-2}
	7^2		7^4	
		7^6		

La case centrale vaut : 7^6.

10 **Réponses b. et e.**

$1\ 234 \times 10^{-2} = 12{,}34$. Multiplier par 10^{-2}, c'est diviser par 100.

$$12{,}34 \times 10^2 = 1\ 234$$

11 **Réponse a.**

Voir le rappel de cours sur les puissances et les formules.

12 **Réponses b. et e.**

Voir le rappel de cours sur les puissances et les formules pour le b).

Pour le e) on a en effet : $10^0 = 1$.

13 **Réponses a., d. et e.**

Voir le rappel de cours sur les puissances et les formules pour le a.

Pour le d., on obtient : $10^{b-(-a)} = 10^{a+b}$.

Pour le e., on obtient : $10^{a+b} = 10^0 = 1$.

Niveau 2

14 **Réponse c.**

Penser à soustraire les exposants : 2^{84} divisé par 4 (soit 2^2) donne 2^{82}.

15 **Réponses b., c. et d.**

$$a = 0{,}003\,;\ b = 3\ 000\,;\ c = -\,0{,}003\,;\ d = -\,3\ 000$$

Donc $d \leq c$ est vrai; $a + c = 0$ est vrai; $0 \leq a + c$ est vrai.

16 **Réponse e.**

Il faut trouver une comparaison sous forme de puissances d'un même nombre, ici ce sera 2 :

$$4^{14} = 2^{28}\,;\ 8^{11} = 2^{33}\,;\ 16^8 = 2^{32}\,;\ 32^5 = 2^{25}$$

Le plus petit nombre est le dernier.

17 **Réponse a.**

$$(3 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-1}) = 0{,}003 + 0{,}03 + 0{,}3 = 0{,}333$$

18 **Réponses b. et e.**

La traduction mathématique de la phrase est le b.

On peut factoriser par le produit commun $(3^2 \times 2^2)$ et on obtient aussi le e. : $3^2 \times 2^3 + 3^3 \times 2^2 = (3 \times 2)^2 \times (2 + 3)$.

19 Réponse d.

Le résultat est : $(9 + 8) \times 27 - 27 = 17 \times 27 - 27 = 459 - 27 = 432$.

Il peut servir à éliminer certaines propositions comme la b. ou, en raison de son ordre de grandeur, la a., la c., la e.

On peut aussi mettre en facteur 3^3 et on obtient :

$$(3^2 + 2^3) \times 3^3 - 3^3 = (3^2 + 2^3 - 1) \times 3^3$$

C'est l'expression d.

Niveau 3

20 Réponse c.

La succession des chiffres des unités est 7 (pour 2137^1), puis 9 (l'opération à effectuer pour obtenir le chiffre des unités de 2137^2 est $7 \times 7 = 49$), puis 3 ($9 \times 7 = 63$), enfin 1 ($3 \times 7 = 21$), ce qui nous ramène à 7 après un cycle de 4 opérations.

Comme $753 = 4 \times 188 + 1$, tout se passe pour les unités comme si c'était puissance 1 au lieu de puissance 753, le résultat est donc 7.

21 Réponses a., b., c. et d.

Rappelons qu'un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre limité de chiffres après la virgule et que les entiers sont des décimaux particuliers. D'autre part, le produit de deux décimaux est un décimal. Le nombre $a \times 10^n$ est, quand a est décimal, un décimal (et ceci que n soit positif ou négatif). Par contre, si a n'est pas décimal, le produit n'est pas décimal non plus. Par exemple, si $a = 1/3$ (écriture illimitée après la virgule, le chiffre 3 se répétant à l'infini), les fractions 10/3, 100/3, etc., ont encore une écriture illimitée de 3 après la virgule : il ne s'agit pas de décimaux. Le e. est donc faux.

En ce qui concerne le d., on obtient $0 \times 1 = 0$ qui est bien décimal.

22 Réponse c.

Les deux nombres 10^p et 10^{-p} sont inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire que leur produit fait 1 (car ce produit vaut $10^{p-p} = 10^0 = 1$). Le seul nombre entier dont l'inverse est entier également, c'est le nombre 1. Or pour que $10^p = 10^{-p} = 1$, il faut prendre $p = 0$.

23 Réponses a., b. et d.

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Ce nombre est entier quand $(n - m)$ est positif, ce qui revient à avoir $m \leq n$. Les réponses b. et d. sont justes.

Attention au a. : si m divise n, alors m est inférieur ou égal à n donc le a. est aussi juste.

Attention encore au c. : il n'est pas juste car on peut avoir n négatif et m positif, d'où une puissance d'exposant négatif du nombre a, qui ne donnerait pas un résultat entier.

24 Réponse b.

Les puissances de 3 finissent alternativement par 3, 9, 7, 1, puis de nouveau 3, 9, 7, 1, etc. avec un cycle de longueur 4.

Comme $458 = 4 \times 114 + 2$, le chiffre des unités est le même que si 458 était remplacé par 2, donc celui de 3^2, soit 9.

25 Réponse e.

La formule proposée serait toujours juste s'il y avait un $\times$ au lieu d'un $+$ entre les deux puissances.

$10^0 = 1$ donc $10^0 + 10^0 = 1 + 1 = 2$, le c. est faux car 1 n'est pas égal à 2.
Attention encore : $10^0 + 10^b = 1 + 10^b$ n'est pas égal à 10^b, le b. est donc faux.

26 Réponse a.

On sait que $12 = 2^2 \times 3$ d'où le calcul $\dfrac{2^{12}}{2^4 \times 3^2} = \dfrac{2^8}{3^2}$.

27 Réponse d.

$b = 2^{-100} = 1/2^{100}$ est un nombre positif et d est égal à b (le signe moins à une puissance paire donne un signe +).

Les nombres a et c sont opposés. Seul c est négatif, c'est lui le plus petit des quatre.

Si $d = b$ alors $d \leq b$ est vrai ; la proposition d. est vraie et c'est la seule.

28 Réponse c.

On remplace 4 par 2^2, d'où $4^5 = 2^{10}$ et on cherche à utiliser $2 \times 5 = 10$ pour simplifier les calculs ; comme $5^{13} = 5^{10} \times 5^3$, on obtient $2^{10} \times 5^{13} = 10^{10} \times 5^3$; le résultat est donc 125 suivi de dix zéros. Il comporte ainsi 13 chiffres.

29 Réponses a., d. et e.

$231 = 11 \times 7 \times 3$ donc $231^{57} = 11^{57} \times 7^{57} \times 3^{57}$ peut se diviser par 11 cinquante-sept fois, donc par 121 qui vaut 11^2 ; 231^{57} peut se diviser aussi par 3^{57} donc par $81^{14} = (3^4)^{14} = 3^{56}$, et il peut se diviser par 7^{57}.

Par contre, il ne peut pas se diviser par $273 = 13 \times 3 \times 7$ car il ne se divise pas par 13, et il ne peut pas se diviser par $63^{29} = (7 \times 3 \times 3)^{29} = 7^{29} \times 3^{58}$ car ce nombre contient 3^{58}, c'est-à-dire un facteur 3 de trop.

30 Réponse a.

Les puissances de 2 finissent par 2, 4, 8, 6, 2, etc. avec un cycle de longueur 4. Comme $32 = 4 \times 8$, le nombre 2^{32} se termine comme $2^4 = 16$, donc par un 6. En enlevant 1, on obtient un 5.

Comment choisir entre les réponses a. et d. ? Avant d'enlever 1, le nombre doit être divisible par 4, ce qui s'observe sur les deux derniers chiffres à droite (voir « l'essentiel à retenir » du chapitre *Calcul, priorités et sens des opérations*) : 96 serait divisible par 4 mais pas 86, donc la bonne réponse est a.

31 **Réponse c.**

Combien de fois $10{,}2 \times 10^{-5}$ contient-il $13{,}6 \times 10^{-6}$?

Autant de fois que 10,2 contient 1,36, soit 7,5 fois.

32 **Réponse c.**

On utilise l'identité $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ et le calcul simplifié des parenthèses donne $(2 \times 2^{2007})(2 \times 2^{-2007}) = 2^{2008} \times 2^{-2006} = 2^2 = 4$.

33 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 12^3 + 13^3 = 8\,281$; $(1 + 2 + 3 + \ldots + 13)^2 = 8\,281$.

C'est dommage, je n'ai pas été augmenté !

Il existe des formules permettant de calculer :

– la somme des nombres entiers de 1 à n :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

– la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On voit que la somme des cubes en question est le carré de la somme des entiers de 1 à n, d'où l'égalité des résultats ci-dessus.

Règle de trois
Proportionnalité 10

L'essentiel à retenir

Grandeurs proportionnelles

- On peut dire que deux grandeurs x et y sont proportionnelles s'il existe un nombre « a » tel que $y = a\,x$ (le nombre « a » est le coefficient de proportionnalité).
- Toutes les grandeurs ne sont pas proportionnelles.

  Exemple Les âges d'un père et de son fils ne le sont pas.

Tableau de proportionnalité

C'est un tableau où les deux lignes sont proportionnelles entre elles. En voici un, par exemple, qui donne le prix de certaines quantités d'essence à 1,20 € le litre.

nombre de litres	1	5	10	n
prix en euros	1,20	6	12	$1{,}20 \times n$

Les nombres de la deuxième ligne sont calculés en multipliant les nombres de la première ligne par le nombre 1,20 qui est appelé le « coefficient de proportionnalité ».

Diverses façons de compléter un tableau de proportionnalité…

$\times 1{,}2$

nombre de litres	1	5	$12/1{,}20 = 10$	$10 \times n$	15	$\dfrac{15 \times 20{,}4}{18}$
prix en euros	1,20	$5 \times 1{,}20 = 6$	12	$12 \times n$	18	20,4

$\div 1{,}2$

Pour compléter ce type de tableau, on peut :

1. **Utiliser l'opérateur** (le coefficient de proportionnalité) par lequel multiplier les nombres de la première ligne pour obtenir ceux de la deuxième. Si le coefficient n'est pas apparent, il faut commencer par le calculer. Ici, 1 l d'essence coûte 1,20 €. Le coefficient est donc : $1{,}2/1 = 1{,}20$. On en déduit le prix de 5 L d'essence : $5 \times 1{,}20 = 6$.

2. **Faire un produit en croix**, si on connaît le contenu de trois cases et si on cherche la quatrième case :

première grandeur	a	b
deuxième grandeur	c	d

Connaissant a, b, c, si on cherche le nombre d, on obtient :

$$a \times d = b \times c \text{ donc } d = \frac{(b \times c)}{a}$$

Comment s'assurer qu'il y a proportionnalité si on connaît diverses valeurs de deux grandeurs ?

On dresse un tableau, mais attention à mettre sur la première ligne les valeurs d'une même grandeur, et sur la deuxième ligne les valeurs correspondantes de la deuxième.

Partages proportionnels

> Exemple
>
> Partager une somme de 2 400 € en deux parties x et y proportionnelles à 7 et 5, ceci signifie que $\frac{x}{7} = \frac{y}{5}$ avec $x + y = 2\,400$.

Dans un tableau de proportionnalité, on forme une nouvelle colonne en additionnant horizontalement les cases des deux colonnes précédentes :

x	y	x + y
7	5	12

Comme $x + y = 2\,400$, on obtient $\frac{x}{7} = \frac{2\,400}{12}$ d'où $\frac{x}{7} = 200$ et $x = 7 \times 200 = 1\,400$; puis $y = 2\,400 - 1\,400 = 1\,000$.

Les deux sommes seront partagées ainsi : 1 400 euros et 1 000 euros.

Échelle

Quand les dimensions réelles et celles du dessin d'un objet sont proportionnelles, on appelle « échelle » le quotient d'une longueur du dessin par la longueur réelle correspondante :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le dessin}}{\text{longueur réelle}}$$

Les longueurs sont exprimées avec la même unité.

Une échelle de $\frac{1}{10\,000}$ signifie que 1 cm représente en réalité 10 000 cm.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 J'ai 4 boîtes contenant chacune 45 dragées; je les partage entre 5 enfants équitablement. Combien de dragées chacun aura-t-il ?

2 L'hectolitre de blé pèse 75 kg. Combien y a-t-il d'hectolitres dans 6 quintaux de blé ?

3 J'achète 1 248 petits casse-tête ludiques. On m'en donne finalement 13 pour 12. Combien en ai-je ?

4 Un propriétaire a une maison qui vaut 288 000 €. Le montant du loyer annuel est le seizième du prix de la maison. Que paye le locataire chaque trimestre ?

5 Pour obtenir 7 kg de café torréfié, il faut 8 kg de café vert. Sachant que le kilo de café vert vaut 2,68 €, quel est le prix de revient d'un kilo de café torréfié ?

6 La longueur d'une salle de classe rectangulaire est de 7 m et sa largeur 6 m. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{50}$, quel serait le périmètre de la salle, en cm ?

7 L'eau en se congelant augmente du douzième de son volume. Calculer le volume de glace, en décimètres cubes, que donneront 17 litres d'eau. (Arrondir à un dixième de décimètre cube.)

8 Une personne achète pour 7 560 € de marchandises. Elle paie le cinquième de cette somme comptant, le reste en 9 mensualités égales. Combien paie-t-elle pendant chacun des 9 mois ?

9 Un homme boit à chaque repas les $\frac{2}{3}$ d'une bouteille qui contient $\frac{3}{4}$ de litre. Quelle fraction de litre boit-il à chaque repas ?

10 La hauteur d'un paquet de 52 cartes dont on a prélevé les as est de 1,2 cm. Quelle est la hauteur du paquet, en millimètres, quand il est complet ?

❒ **a.** 1,6 ❒ **b.** 16 ❒ **c.** 13 ❒ **d.** 1,3 ❒ **e.** 15

11 Si un gros homard pèse 4 livres de plus que la moitié de son propre poids, combien pèse-t-il en livres ?

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 8 ❒ **c.** 6 ❒ **d.** 5 ❒ **e.** 10

12 Pour faire des truffes au chocolat, il faut 40 g de chocolat pour 20 g de beurre et 10 g de sucre. Combien faut-il de chocolat pour faire 1,4 kg de truffes ?

❒ **a.** 800 g ❒ **b.** 600 g ❒ **c.** 400 g ❒ **d.** 700 g ❒ **e.** 500 g

Niveau 2

13 Trois ouvriers ont fait ensemble un travail. Le premier a travaillé 18 jours, le deuxième 12 jours, le troisième 10 jours. Ils ont reçu en tout 2 600 €. Quel est le salaire de chacun ? Quel est le salaire journalier d'un ouvrier ?

14 Quand on fait du pain, 100 kg de farine absorbent 58 kg d'eau; pendant la cuisson il s'évapore 23 kg de cette eau.

Combien 20 kg de farine donnent-ils de kilogrammes de pain ?

15 Partager une somme de 685 € entre deux personnes de manière que la première ait quatre fois plus que la deuxième.

16 Une balle élastique rebondit à chaque fois aux $\frac{2}{5}$ de sa hauteur. Si on la lâchait depuis la Tour Eiffel à une hauteur de 300 m, quelle hauteur atteindrait-elle lors de son troisième rebond ?

17 Un piéton fait dans la matinée les $\frac{3}{5}$ du chemin qu'il doit parcourir. Dans l'après midi, il parcourt les $\frac{2}{3}$ de ce qui lui restait.

Quelle fraction du parcours reste-t-il ?

18 Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{2\,500}$, un terrain est représenté par un rectangle de 6 cm sur 3,6 cm. Quelle est, en mètres carrés, l'aire du terrain ?

19 Trois frères achètent un tonneau de 72 litres de vin. Le premier en prend un tiers, le deuxième un quart. Combien de litres prend le troisième ?

20 L'hectolitre de blé pèse 80 kg et donne son dixième de poids en son, et le reste en farine. Quel est le poids de farine qu'on obtient à partir d'un hectolitre de blé ?

21 Une pièce de flanelle de 63 m s'est raccourcie d'un neuvième par le lavage. On en coupe une première fois 8 m, et une deuxième fois 25 m. Combien de mètres reste-t-il ?

22 Lors d'une épreuve de triathlon d'une durée totale d'une heure, un concurrent a mis $\frac{2}{9}$ du temps total à nager, et $\frac{4}{9}$ du temps total à pédaler. Il a passé le reste du temps à courir : pendant combien de minutes ?

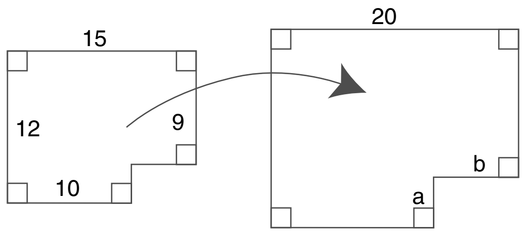
23 Un terrain à bâtir dont l'aire est 2 400 m^2 coûte 15 600 €. Il est acheté par deux personnes qui en prennent l'une 1 000 m^2, l'autre 1 400 m^2.
Quelle somme chacune de ses personnes débourse-t-elle ?

24 Cinq métiers à tisser fonctionnant 6 heures par jour ont produit en 9 jours 567 m de tissu. Quelle longueur de tissu produiraient sept métiers à tisser de même force, fonctionnant 8 heures par jour pendant 15 jours ?

25 J'ai peint en rouge une plaque carrée de 2 m de côté avec 600 g de peinture. Pour le mur de ma chambre, rectangle de 2,5 m sur 6 m, il me faudra…

❒ **a.** 2 kg de peinture ❒ **c.** 3 kg ❒ **e.** 6 kg
❒ **b.** 2,250 kg ❒ **d.** 4,50 kg

26 Observez l'agrandissement d'un dessin à l'autre…



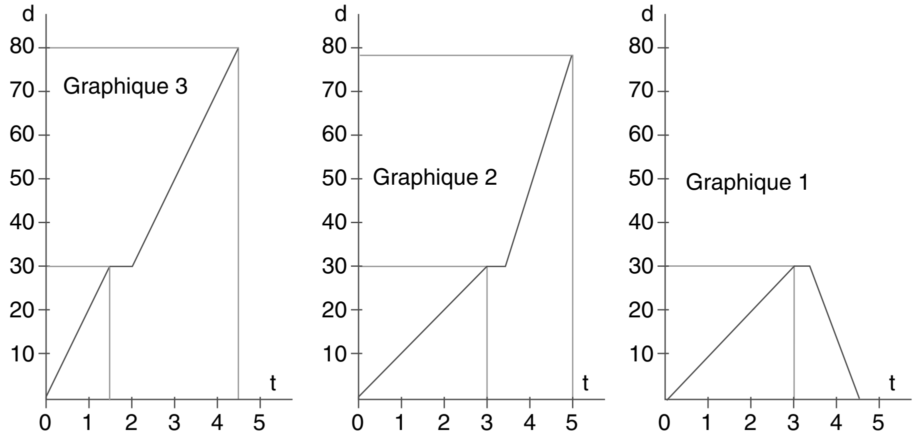
Agrandissement proportionnel

Combien valent a et b ?

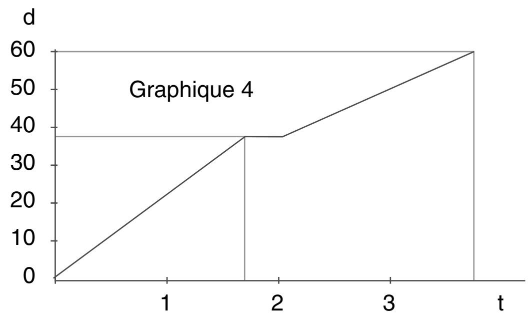
❒ **a.** a = 8, b = 10 ❒ **c.** a = $\frac{9}{4}$, b = $\frac{15}{3}$ ❒ **e.** a = $\frac{9}{4}$, b = 4
❒ **b.** a = 4, b = $\frac{20}{3}$ ❒ **d.** a = 8, b = 12

27 Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte-Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de 10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.

Quel est parmi les 4 graphiques ci-dessous celui qui représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?

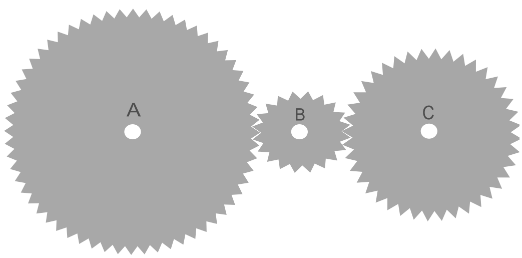


❒ **a.** graphique 1
❒ **b.** graphique 2
❒ **c.** graphique 3
❒ **d.** graphique 4



Niveau 3

28 Dans cet engrenage, on actionne la roue A de 60 dents. Elle entraîne en sens contraire la roue B de 20 dents. Celle-ci entraîne alors la roue C de 40 dents qui tourne dans le même sens que A. De combien de tours la roue C tourne-t-elle quand la roue A fait 100 tours ?



29 Cinquante ouvriers de chemin de fer, en travaillant 8 heures par jour, ont posé 24 km de voie en 18 jours. Avec la même efficacité, mais 10 heures de travail journalier, combien de jours faudra-t-il à 40 ouvriers pour poser 16 km de voie ?

30 On sait que 10 chevaux, en 12 jours ont consommé 200 kg de foin. Combien 30 chevaux en consommeraient-ils en 24 jours ?

31 Un salarié précaire devait travailler 24 jours à raison de 8 heures par jour et toucher 784 €. Il n'a pu faire que 18 jours de 6 heures de travail. Combien lui est-il dû au même tarif horaire ?

32 Si 8 ouvriers ont mis 15 jours pour faire un certain travail, en combien de jours 6 ouvriers équivalents l'accompliront-ils ?

33 Trois nombres sont proportionnels à 150, 72 et 48.
Leur somme vaut 3 510. Quel est le plus petit des trois ?
❒ **a.** 936 ❒ **b.** 1 950 ❒ **c.** 624 ❒ **d.** 412 ❒ **e.** 524

34 Pascal et Marc se sont partagé une somme proportionnellement à leurs âges qui sont 17 ans et 11 ans. Pascal a reçu 234 € de plus que Marc. Combien a reçu celui-ci ?
❒ **a.** 215 € ❒ **b.** 518 € ❒ **c.** 594 € ❒ **d.** 429 € ❒ **e.** 653 €

35 Dix citrons coûtent autant que huit oranges; seize oranges autant que douze pamplemousses; quatre pamplemousses autant qu'un melon; et six melons autant que quarante-huit bananes. Pour le prix de cinq citrons, combien aurez-vous de bananes ?
❒ **a.** 2 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 6 ❒ **d.** 8 ❒ **e.** 9

36 Une usine achète 2 000 litres de lait pur et en retire un certain volume V pour produire du yaourt, le remplaçant par de l'eau. Ensuite on retire encore le même volume V du mélange en le remplaçant toujours par de l'eau. Le mélange final comporte 1 125 litres de lait. Le volume V est…
❒ **a.** 500 L ❒ **b.** 600 L ❒ **c.** 700 L ❒ **d.** 800 L ❒ **e.** 900 L

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Nombre de dragées : $4 \times 45 = 180$. Chaque enfant aura : $180/5 = 36$ dragées.

2 Il y a proportionnalité entre le volume et le poids; 6 quintaux = 600 kg.

nombre d'hectolitres	1	
nombre de kg	75	600

On calcule : $1 \times 600/75 = 8$.
Il y a 8 hl dans 6 quintaux de blé.

3 Le nombre de casse-tête est : 1 248 × 13/12 = 1 352.

4 Montant du loyer annuel : 288 000/16 = 18 000 €.
Montant du loyer trimestriel (4 trimestres dans l'année) : 18 000/4 = 4 500 €.

5 Prix de 8 kg de café vert : 2,68 × 8 = 21,44 €.
On a 7 kg de café torréfié pour 21,44 € donc le prix d'un kg est :

21,44/7 = 3,06 € environ

6 On convertit en centimètres : 7 m = 700 cm ; 6 m = 600 cm.
Longueur en cm sur le plan : 700/50 = 14 cm.
Largeur en cm sur le plan : 600/50 = 12 cm.
Périmètre sur le plan : 2 × (14 + 12) = 52 cm.

7 Le volume de glace représente treize douzièmes du volume d'eau, donc avec 17 litres d'eau on obtient : 17 × 13/12, soit environ 18,4 litres (ou décimètres cubes) de glace.

8 Quand on retire un cinquième, il reste 4/5. Le total des mensualités sera : 7 560 × 4/5 = 6 048 € ; chaque mensualité vaudra : 6 048/9 = 672 €.

9 Il boit : (2/3) ×(3/4) = 1/2 l.

10 Réponse c.
Il y a 48 cartes et la hauteur est 12 mm.
Pour 52 cartes, la hauteur est donc 12 × 52/48 = 13 mm

11 Réponse b.
4 livres représentent la moitié du poids du homard, à ajouter à l'autre moitié. Le homard pèse 2 × 4 = 8 livres.

12 Réponse a.
Les poids de truffes et de chocolat sont proportionnels.

chocolat	40	
truffes	70	1 400

Il faut : 40 × 1 400/70 = 800 g de chocolat.

Niveau 2

13 On dresse un tableau de proportionnalité, le coefficient étant le salaire journalier.

nombre de jours de travail	18	12	10	total : 40 jours
salaire				total : 2 600 €

Le salaire journalier est : 2 600/40 = 65 €.
Celui qui travaille 10 jours touche : $65 \times 10 = 650$ €.
Celui qui travaille 12 jours touche : $65 \times 12 = 780$ €
Celui qui travaille 18 jours touche : $65 \times 18 = 1\ 170$ €.

14 Poids de pain obtenu à partir de 100 kg de farine :

$$100 + 58 - 23 = 135 \text{ kg}$$

Il faut multiplier par 1,35 le poids de farine pour connaître le poids de pain qu'on obtient. Avec 20 kg de farine on aura : $20 \times 1{,}35 = 27$ kg de pain.

15 Si le tout représente 5 parts et 685 €, on a le tableau de proportionnalité suivant entre nombre de parts et montants en euros :

nombre de parts	5	1	4
somme	685		

La première personne aura : 685/5 = 137 €.
La deuxième personne aura : $685 \times 4/5 = 548$ €.

16 Hauteur du premier rebond : $300 \times 2/5 = 120$ m.
Hauteur du deuxième rebond : $120 \times 2/5 = 48$ m.
Hauteur du troisième rebond : $48 \times 2/5 = 19{,}2$ m.

17 Quand on a fait les trois cinquièmes, il reste deux cinquièmes à faire. Si l'après midi le piéton fait 2/3 du reste, il manque 1/3 du reste. On doit donc calculer un tiers de deux cinquièmes. Cela fait :

$$(1 \times 2)/(3 \times 5) = 2/15 \text{ du trajet total}$$

18 Dimensions réelles du terrain en cm :
$6 \times 2\ 500 = 15\ 000$ cm soit 150 m ; et $3{,}6 \times 2\ 500 = 9\ 000$ cm soit 90 m.
Aire réelle du terrain : $150 \times 90 = 13\ 500$ m^2.

19 Proportion du tonneau achetée par le troisième :

$$1 - 1/3 - 1/4 = (12 - 4 - 3)/12 = 5/12$$

Cela représente : $72 \times 5/12 = 30$ litres.

20 La farine représente : $1 - 1/10 = 9/10$ du poids de blé, soit :

$$80 \times 9/10 = 72 \text{ kg}$$

21 Longueur « partie au lavage » : $63 \times 1/9 = 7$ mètres.
Il reste : $63 - 7 = 56$ m.
Après les deux prélèvements, il reste : $56 - 8 - 25 = 23$ m.

22 La fraction de temps mis à courir est, en heures :

$$1 - 2/9 - 4/9 = 3/9 = 1/3$$

Cela représente en minutes : 60 min $\times$ 1/3 = 20 minutes.

23 Le prix du m² est le même dans toutes les situations, c'est le coefficient de proportionnalité du tableau suivant qui fait passer des aires vers les euros :

aire	2 400	1 000	1 400
prix	15 600		

Le prix du terrain de 1 000 m² est : $15\,600 \times 1\,000/2\,400 = 6\,500$ €.

Le prix du terrain de 1 400 m² est : $15\,600 \times 1\,400/2\,400 = 9\,100$ €.

24 Nombre d'heures de travail des 5 métiers en 9 jours : $5 \times 6 \times 9 = 270$ heures. Elles ont donné 567 m de tissu.

Nombre d'heures de travail des 7 métiers en 15 jours : $7 \times 8 \times 15 = 840$ heures.

Le nombre de mètres de tissu est proportionnel au nombre d'heures de travail… $567 \times 840/270 = 1\,764$

On obtient 1 764 m de tissu dans la deuxième situation.

25 Réponse b.

Aire de la plaque peinte : $2^2 = 4$ m². Aire du mur à peindre : $2{,}5 \times 6 = 15$ m².

Le poids de peinture et la surface à peindre sont proportionnels.

aire	4 m²	15 m²
poids de peinture	600 g	

Il faudra : $600 \times 15/4 = 2\,250$ g soit 2,250 kg de peinture.

26 Réponse b.

Quand 15 devient 20 le coefficient multiplicateur est 20/15 soit 4/3.

La longueur a correspond sur le premier dessin à : $12 - 9 = 3$.

La longueur b correspond sur le premier dessin à : $15 - 10 = 5$.

On peut dresser un tableau de proportionnalité dans lequel le coefficient multiplicatif pour aller de la première à la deuxième ligne est 4/3.

premier dessin	3	5
deuxième dessin	a	b

On obtient $a = 3 \times 4/3 = 4$ et $b = 5 \times 4/3 = 20/3$. C'est la réponse b.

27 Réponse b.

L'axe des ordonnées représente la distance qui sépare le cycliste de la ville de départ. Ainsi le graphique 1 avec son dernier segment à droite qui plonge vers l'axe des abscisses correspond à un retour vers la ville de départ : il faut donc l'éliminer. La vitesse peut être appréciée par la pente de la droite : plus la pente est raide (de gauche à droite) plus vite va le cycliste. Comme le dernier segment doit correspondre à une descente plus rapide que la montée, il faut trouver un graphique où la pente du dernier segment est plus forte : c'est le graphique 2.

Remarquons que le graphique 3 donne deux segments qui ont l'air parallèles : ceci correspondrait à des vitesses égales.

Niveau 3

28 Chaque roue tourne du même nombre de dents à chaque fois.

Quand la roue A fait un tour, la roue B doit donc faire 3 tours ($60 = 20 \times 3$). Quand la roue B fait un tour, la roue C n'en fait qu'un demi ($20 = 40 \times 1/2$).

Pour 100 tours de A, la roue B fait 300 tours et la roue C en fait 150.

29 Le nombre d'heures de travail d'un homme dans la première situation est :

$$50 \times 8 \times 18 = 7\,200 \text{ heures}$$

Soit x le nombre de jours de travail dans la deuxième situation, alors le nombre d'heures de travail d'un homme est : $10 \times 40 \times x = 400\,x$.

Il y a proportionnalité entre le nombre d'heures de travail et le nombre de kilomètres de voie.

heures	7 200	$400x$
kilomètres	24	16

Le coefficient pour passer de 24 à 16 est : $16/24 = 2/3$.

Le nombre d'heures est donc : $7\,200 \times 2/3 = 4\,800$. On obtient $400\,x = 4\,800$ d'où $x = 4\,800/400 = 12$. Il faut 12 jours de travail.

30 Il y a double proportionnalité selon le nombre de chevaux et le nombre de jours. On peut dresser un tableau :

– on passe d'une colonne à l'autre par proportionnalité due au nombre de chevaux (ex. de 10 à 30 on multiplie par 3) ;

– on passe d'une ligne à l'autre par proportionnalité liée au nombre de jours (ex. de 12 à 24 on multiplie par 2).

Les valeurs intérieures sont les nombres de kg de foin.

nombre de chevaux / nombre de jours	12	24
10	200	
30	600	1 200

Pour 10 chevaux et 24 jours il faut : $200 \times 3 \times 2 = 1\,200$ kg de foin.

31 Nombre d'heures prévues : $24 \times 8 = 192$ heures de travail.

Nombre d'heures faites : $18 \times 6 = 108$ heures.

Le salaire est proportionnel au nombre d'heures de travail.

nombre d'heures	192	108
salaire en euros	784	

Le salaire dû est : $784 \times 108/192 = 441$ €.

32 Nombre de jours de travail d'un homme : $8 \times 15 = 120$.

S'il y a 6 ouvriers il leur faudrait donc : $120/6 = 20$ jours.

33 **Réponse c.**

Soient x, y et z les trois nombres, on a $x + y + z = 3\,510$; dans une suite de rapports égaux, on peut en former un autre constitué avec la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs :

$$x/150 = y/72 = z/48 = (x + y + z)/(150 + 72 + 48)$$
$$= 3\,510/270 = 39/3 = 13$$

On obtient $x = (13)\,(150) = 1\,950$; $y = 13\,(72) = 936$; $z = 13\,(48) = 624$.

Le plus petit des trois est 624.

34 **Réponse d.**

Soient x et y les âges de Pascal et Marc, on a $x = y + 234$; de plus :

$$x/17 = y/11 = (x + y)/(17 + 11) = (2\,y + 234)/28$$

on obtient $28\,y = 11\,(2\,y + 234)$ puis $28\,y = 22\,y + 2\,574$, et $6\,y = 2\,574$ soit :

$$y = 429$$

ensuite $x = 429 + 234 = 663$, c'est 663 euros que Pascal a reçus; c'est Marc que « celui-ci » désigne, Marc a reçu 429 euros.

35 **Réponse c.**

5 citrons = 4 oranges = 3 pamplemousses = 3/4 melon;

mais 1 melon = 8 bananes, donc 5 citrons = $(3/4) \times 8$ bananes, soit 6 bananes.

36 **Réponse a.**

Cela semble compliqué, mais en tout cas il ne peut y avoir deux réponses différentes. Nous disposons de plusieurs propositions de réponses, essayons donc la première valeur pour comprendre l'énoncé, peut-être aurons-nous la chance de tomber d'entrée sur la solution…

Départ : 2 000 l.

Première étape : il y a 1 500 l de lait et 500 l d'eau.

Deuxième étape : les 500 l qu'on retire seront aux trois quarts du lait donc : $500 \times 3/4 = 375$ l de lait, et un quart d'eau soit : $1/4 \times 500 = 125$ l d'eau. Il y aura donc : $1\,500 - 375 = 1\,125$ l d'eau. C'est la solution a.

Conversions 11

L'essentiel à retenir

Savoir convertir d'une unité vers une autre est indispensable :
- Il faut une unité commune pour additionner des longueurs.
- Quand on calcule une aire ou un volume à l'aide d'une formule : les dimensions doivent toutes être exprimées avec la même unité.

Unités usuelles de longueur : le mètre (m)

- Multiples :

$$1 \text{ dam} = 10 \text{ m}\,;\ 1 \text{ hm} = 100 \text{ m}\,;\ 1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$$

- Sous-multiples :

$$1 \text{ dm} = 0{,}1 \text{ m}\,;\ 1 \text{ cm} = 0{,}01 \text{ m}\,;\ 1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m}$$

Comment convertir les unités de longueur ?

- À l'aide d'un tableau : on met **un chiffre par unité** et on place la virgule selon l'unité choisie.

> Exemple 8,243 hm = 824,3 m.
>
> | km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | | 8 | 2 | 4 | 3 | | |

- Directement en multipliant par 10, ou 100, 1000, etc.

> Exemple 1 hm = 100 m donc 8,243 hm = $8{,}243 \times 100$ m = 824,3 m.

Unités d'aire : le mètre carré (m^2)

- Multiples :

$$1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2\,;\ 1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dam}^2\,;\ 1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2$$

- Sous-multiples :

$$1 \text{ dm}^2 = 0{,}01 \text{ m}^2\,;\ 1 \text{ cm}^2 = 0{,}00\,01 \text{ m}^2\,;\ 1 \text{ mm}^2 = 0{,}01 \text{ cm}^2$$

- **Unités agraires** : l'are (a) et l'hectare (ha) :

$$1 \text{ a} = 1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2\,;\ 1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

Comment convertir les unités d'aire ?

À l'aide d'un tableau : **attention, il y a deux chiffres par unité**.

> Exemples Convertir 5,6 m^2 en cm^2 (penser à 5,60 et non 5,6)
>
> | m^2 | dm^2 | cm^2 | mm^2 |
> |---|---|---|---|
> | 5 | 60 | 00 | |
>
> 5,6 m^2 = 56 000 cm^2. Ou : 5,6 m^2 = 5,6 × 10 000 cm^2 = 56 000 cm^2

Unités de volume : le mètre cube (m^3)

- Sous-multiples :

  1 dm^3 = 0,001 m^3 ; 1 cm^3 = 0,001 dm^3 ; 1 mm^3 = 0,001 cm^3

- **Unités de capacité** : le litre : L, et aussi daL, hL ; dL, cL, mL.

  1 daL = 10 L ; 1 hL = 100 L
  1 L = 1 dm^3 = 10 dL = 100 cL = 1 000 mL
  1 dL = 0,1 L = 10 cL = 100 cm^3
  1 cL = 10 cm^3 ; 1 mL = 1 cm^3

Comment convertir les unités de volume ?

À l'aide d'un tableau : **attention, il y a trois chiffres par unité.**

> Exemple Convertir 6,27 m^3 en cm^3 : 6,27 m^3 = 6 270 000 cm^3
>
> | m^3 | dm^3 | cm^3 | mm^3 |
> |---|---|---|---|
> | 6 | 270 | 000 | |
>
> Directement : 6,27 m^3 = 6,27 × 1 000 000 cm^3 = 6 270 000 cm^3

Comment convertir les unités de capacité ?

- À l'aide d'un tableau : attention il y a un chiffre par unité

> Exemple Convertir 6,238 hL en L : 6,238 hL = 623,8 L
>
> | hL | daL | L | dL | cL | mL |
> |---|---|---|---|---|---|
> | 6 | 2 | 3 | 8 | | |
>
> Directement : 6,238 hL = 6,238 × 100 L = 623,8 L

Comment convertir des unités en « litre » aux unités en « cube » ?

Exemple Convertir 8,1 dL en cm^3 : les 3 cases « cube » sont à remplir

m^3						cm^3			mm^3		
			hL	daL	L	dL	cL	mL			
						8	1	0			

$$8{,}1 \text{ dL} = 810 \text{ mL} = 810 \text{ cm}^3$$

Unités de temps

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}; \ 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \text{ h}; \ 1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min}$$

Comment convertir des unités de temps ?

- En minutes ou en secondes.

Exemple $2 \text{ h } 23 \text{ min} = 2 \times 60 + 23 = 143 \text{ min} = 143 \times 60 \text{ s} = 8\,580 \text{ s}$

- En heures décimales.

Exemple $3 \text{ h } 18 \text{ min} = 3 \times 60 \text{ min} + 18 \text{ min} = 198 \text{ min} = \frac{198}{60} \text{ h} = 3{,}3 \text{ h}$

Unités de vitesse

Vitesse = distance/durée du parcours.

Exemples

pour 200 km en 2 heures, vitesse = 100 km/h ou 100 km $\cdot$ h^{-1}. Pour 5 mètres en 100 secondes, vitesse = 0,05 m/s ou 0,05 m $\cdot$ s^{-1}.

Comment convertir des unités de vitesse ?

$$1 \text{ m/s} = 3\,600 \text{ m/h} = 3{,}6 \text{ km/h}$$

Grandeurs composées

Par exemple, la masse volumique, ou masse par unité de volume d'un objet; on l'exprime souvent en g/cm^3 ou en km/m^3.

Le fer a une masse volumique de 7,8 g/cm^3 : cela signifie qu'un centimètre cube de fer pèse 7,8 g.

$$7{,}8 \text{ g} = 0{,}007\,8 \text{ kg, donc } 7{,}8 \text{ g/cm}^3 = 0{,}007\,8 \text{ kg/cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$0{,}007\,8 \text{ kg/cm}^3 = 0{,}007\,8 \times 1\,000\,000 \text{ kg/m}^3 = 7\,800 \text{ kg/m}^3$$

On conclut : 7,8 g/cm^3 = 7 800 kg/m^3

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Dans les magasins, la plupart des bouteilles d'eau minérale contiennent 1,5…
Quelle est l'unité qu'il faut mettre à la place des pointillés ?

❒ **a.** q ❒ **b.** m^3 ❒ **c.** cm ❒ **d.** cL ❒ **e.** L

2 Un morceau de sucre pèse environ 5…

❒ **a.** t ❒ **b.** km ❒ **c.** cL ❒ **d.** kg ❒ **e.** g

3 La hauteur d'un immeuble de trois étages est 14…

❒ **a.** m^3 ❒ **b.** kg ❒ **c.** dam ❒ **d.** dm ❒ **e.** m

4 Un rouleau de fil de fer pèse 3,900 kg. Un mètre de ce fil pèse 50 g. La longueur de ce fil est :

❒ **a.** 0,78 km ❒ **b.** 78 m ❒ **c.** 7 800 mm ❒ **d.** 780 cm ❒ **e.** 78 dam

5 Une feuille de zinc pèse 6,800 kg et un dm^2 de ce zinc pèse 400 g.
L'aire de la feuille de zinc est :

❒ **a.** 17 dm^2 ❒ **c.** 0,000 17 dam^2 ❒ **e.** 0, 017 m^2
❒ **b.** 170 cm^2 ❒ **d.** 1 700 mm^2

6 Un ruisseau débite 7 litres d'eau par seconde. Combien d'heures mettra-t-il pour remplir un bassin de 378 m^3 ?

❒ **a.** 1,5 h ❒ **c.** 150 h ❒ **e.** un quart d'heure
❒ **b.** 15 h ❒ **d.** 1 500 h

7 Sachant que 5 litres d'huile pèsent 4,550 kg, combien pèsent 2 dL d'huile ?

❒ **a.** 18,2 g ❒ **b.** 182 g ❒ **c.** 1,82 kg ❒ **d.** 91 g ❒ **e.** 2 dag

8 L'unité principale de mesure du bois de chauffage est le stère (st), qui vaut un mètre cube. La conversion en stères de 3 475 dm^3 est :

❒ **a.** 435 st ❒ **b.** 43,5 st ❒ **c.** 34,75 st ❒ **d.** 3,475 st ❒ **e.** 0,3475 st

9 J'ai fait une promenade de 3 heures en bicyclette. La première heure, j'ai fait 12 km. La deuxième heure, j'ai fait 185 hm et la troisième heure 1 450 dam. Combien ai-je fait de kilomètres en tout ?

10 On verse dans un réservoir 13,55 hL d'eau, puis 326,4 daL et enfin 95,8 L. Combien le réservoir contient-il de litres d'eau ?

11 Donner les résultats en mètres :

$$27 \text{ hm} + 43 \text{ dam} + 7\,429 \text{ m} = ?$$
$$81 \text{ km} - 453 \text{ dam} = ?$$
$$428 \text{ dam} - 23 \text{ hm} = ?$$

12 Une ménagère achète 0,5 daL d'huile d'olive vierge pour 20 €. Quel est le prix du litre ?

13 Combien faut-il verser de tonneaux de 125 litres pour emplir une citerne de 5 mètres cubes ?

14 On vend, à un euro le litre, 3 barils de cidre qui contiennent : le premier 80 L, le deuxième 7 daL, le troisième 1 hL. Quelle somme recevra-t-on ?

15 On met le cognac d'un baril de 45 L dans des bouteilles contenant chacune 7,5 dL. Combien de bouteilles a-t-on rempli ?

16 Le litre d'huile pèse 9 hg et vaut 1,17 €. Que vaut le quintal d'huile ?

Niveau 2

17 Un cycliste fait du 14 km/h et un piéton 58 hm/h. Combien de mètres le cycliste fait-il de plus que le piéton en 2 heures ?

18 Un litre de liqueur coûte 15,60 €. Quel bénéfice réalise un débitant en vendant 1,20 € le petit verre de 25 cm^3 ?

19 Pour carreler une chambre de 10 m^2, on a employé des carreaux de 6,25 dm^2. Combien en faudra-t-il au minimum ?

20 On verse 65 cm^3 de vin dans un flacon qui peut contenir un huitième de litre. Combien de centilitres faudra-t-il encore verser pour remplir le flacon ?

21 Un bidon d'essence a la forme d'un pavé droit de 4 dm de long, 20 cm de large et 75 mm de hauteur. Quel poids d'essence, en grammes, contient-il si le litre pèse 82 dag ?

22 Sur un plan dressé par un géomètre, une longueur de 10 000 m est représentée par une droite de 1 m. Quelle sera sur le plan la longueur d'un chemin qui mesure sur le terrain 12 hm ?

23 Un bassin vide reçoit par heure 2,54 hL d'eau; il en perd dans le même temps 18 daL. Combien contient-il de litres d'eau au bout de 3 heures ?

24 On a fait passer deux fils téléphoniques entre deux villes distantes de 140 km. Un mètre de fil pèse 1 hg. Quel est le poids en quintaux de fil utilisé ?

Niveau 3

25 On pèse un seau lorsqu'il est plein d'eau pure : on trouve 12,270 kg. On retire la moitié de l'eau, et en pesant de nouveau on trouve 7,8 kg.
Quelle est la contenance en litres du seau ?

26 Une couturière achète 4 dam de toile pour faire une douzaine de chemises. Les chemises coupées, il reste un bout de 40 cm. Combien faut-il de mètres pour une chemise ?

27 On a acheté 300 œufs à 20 € les cent. On les a revendus à raison de 3 € la douzaine. Combien a-t-on gagné ?

28 La densité de l'huile est 0,915. En choisissant ce qui est le plus avantageux, soit l'achat d'huile à 1,32 € le litre, soit l'achat d'huile à 1,48 € le kilogramme, calculer combien l'on gagne sur l'autre façon d'acheter pour une quantité équivalente à 20 litres.

29 Un récipient plein d'eau pèse 25 kg. Lorsqu'il ne contient que 8 litres d'eau, il pèse 13 kg. Quelle est sa contenance ?
❒ **a.** 21 litres ❒ **b.** 20 litres ❒ **c.** 25 litres ❒ **d.** 0,023 m^3 ❒ **e.** 0,24 hL

30 Pour convertir en degrés Fahrenheit une température T donnée en degrés Celsius, on multiplie T par le nombre 1,8 puis on ajoute 32. Quelle est la mesure de température qui s'exprime par le même nombre dans les deux systèmes ?
❒ **a.** – 40 ❒ **b.** – 32 ❒ **c.** – 18 ❒ **d.** 18 ❒ **e.** 40

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Réponse e. Unité : le litre, une bouteille de 1,5 L.

2 Réponse e. 5 g pour un morceau de sucre.

3 Réponse e. Un immeuble de 14 m.

4 Réponse b.
3,900 kg = 3 900 g et le nombre de mètres de fil de fer est 3 900/50 = 78 m.

5 Réponse a.
6,800 kg = 6 800 g et le nombre de dm^2 de zinc est : 6 800/400 = 17 dm^2.

6 Réponse b.

378 m^3 = 378 000 L et le nombre de secondes nécessaires sera :

$$378\,000/7 = 54\,000 \text{ s} = 54\,000/60 \text{ min} = 900 \text{ min} = 900/60 \text{ h} = 15 \text{ h}$$

7 Réponse b.

Un poids de 4,550 kg = 4 550 g correspond à 5 L = 50 dL.
Pour 2 dL, soit 25 fois moins, le poids est 4 550/25 = 182 g.

8 Réponse d.

$$3\,475 \text{ dm}^3 = 3{,}475 \text{ m}^3 \text{ soit } 3{,}475 \text{ st}$$

9 Distance parcourue :

$$12 \text{ km} + 185 \text{ hm} + 1\,450 \text{ dam} = (12 + 18{,}5 + 14{,}5) \text{ km} = 45 \text{ km}$$

10 Contenance du réservoir :

$$13{,}55 \text{ hL} + 326{,}4 \text{ daL} + 95{,}8 \text{ L} = (1\,355 + 3\,264 + 95{,}8) \text{ L} = 4\,714{,}8 \text{ L}$$

11 27 hm + 43 dam + 7 429 m = (2 700 + 430 + 7 429) m = 10 559 m
81 km – 453 dam = (81 000 – 4 530) m = 76 470 m
428 dam – 23 hm = (4 280 – 2 300) m = 1 980 m

12 Comme 0,5 daL = 5 L, le prix du litre est 20/5 = 4 euros.

13 5 m^3 = 5 000 L donc il faut 5 000/125 = 40 tonneaux.

14 Nombre total de litres :

$$80 \text{ L} + 7 \text{ daL} + 1 \text{ hL} = (80 + 70 + 100) \text{ L} = 250 \text{ L}$$

On obtiendra 250 €.

15 45 L = 450 dL et 450/7,5 = 60 donc on a rempli 60 bouteilles.

16 Un quintal d'huile, c'est 100 kg ou 1 000 hg.
Le nombre de litres dans un quintal est : 1 000/9.
Le prix en euros est : 1,17 × 1 000/9 = 130 euros.

Niveau 2

17 En 2 heures le cycliste parcourt : 2 × 14 km = 28 km = 280 hm, et le piéton : 2 × 58 hm = 116 hm. La différence est : 280 – 116 = 164 hm soit 16 400 m.

18 Un litre de liqueur, soit 1 000 cm^3, représente un nombre de petits verres égal à : 1 000/25 = 40. On obtient pour prix de ces 40 verres :

$$1{,}20 \text{ €} \times 40 = 48 \text{ €}$$

Le bénéfice est donc : 48 – 15,60 = 32,40 € par litre écoulé.

19 10 m^2 = 1 000 dm^2 et le nombre minimum de carreaux sera :

$$1\,000/6{,}25 = 160 \text{ carreaux}$$

20 Un huitième de litre c'est 0,125 L ou 125 cm^3.

Il restera : 125 – 65 = 60 cm^3 à remplir, soit 6 cL (car 1 cL = 10 cm^3).

21 On convertit les longueurs en dm car le volume sera en dm^3 ce qui correspond au litre. On obtient un volume de : $4 \times 2 \times 0{,}75 = 6$ L.

Le poids d'essence est : $82 \times 6 = 492$ dag, soit 4 920 g.

22 L'échelle est 1/10 000. De plus 12 hm = 1 200 m ; la distance sur le plan sera 1 200/10 000 = 0,12 m, soit 12 cm.

23 On convertit tout en litres (2,54 hL = 254 L, 18 daL = 180 L).

En 3 heures, on obtient : $3 \times (254 - 180) = 222$ L.

24 Un mètre de fil fait 100 g. Un kilomètre, soit 1 000 m de fil, font 100 000 g = 100 kg, soit 1 quintal.

Il y a 2 fils donc une longueur de fil égale à 2×140 km = 280 km.

Ceci représente 280 quintaux.

Niveau 3

25 Quand on retire la moitié de l'eau, le poids change de (12,270 – 7,8) kg soit 4,470 kg. Le poids de l'eau dans le seau plein est donc le double soit 8,940 kg. Le seau contient 8,940 L.

26 4 dam = 40 m, il reste 40 cm = 0,4 m ; la longueur utile est : 40 – 0,4 = 39,6 m.

Pour faire une chemise, il faut : 39,6/12 = 3,3 m.

27 Prix d'achat des 300 œufs : $20 \times 3 = 60$ €.

Nombre de douzaines vendues : 300/12 = 25 douzaines.

Prix de vente des 25 douzaines : $3 \times 25 = 75$ €.

Bénéfice : 75 – 60 = 15 €.

28 Prix de 20 litres, au litre : $1{,}32 \times 20 = 26{,}40$ €.

Le poids de 20 L est $20 \times 0{,}915 = 18{,}3$ kg. Prix de 20 L vendus au kilo : $18{,}3 \times 1{,}48 = 27{,}08$ €. Le plus avantageux est l'achat au litre.

On gagne : 27,08 – 26,40 = 0,68 € (pour une quantité de 20 litres).

29 **Réponse b.**

Entre les deux situations, il y a une différence de : 25 – 13 = 12 kg d'eau, ce qui représente 12 L d'eau. Le seau peut donc contenir 12 + 8 = 20 L.

30 **Réponse a.**

On doit obtenir le même résultat avec les deux échelles, soit T pour l'une et pour l'autre (1,8 T + 32) ; d'où l'équation : 1,8 T + 32 = T.

Donc 0,8 T = – 32 et T = – 32/0,8 = – 40.

La température – 40 degrés Celsius est égale à la température – 40 degrés Fahrenheit.

Racines carrées 12

L'essentiel à retenir

Racine carrée d'un nombre positif

- Soit « a » un nombre positif, il existe un nombre positif dont le carré est égal à « a ». Ce nombre se note $\sqrt{a}$, et se nomme racine carrée de a. Ainsi :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

> Exemples
>
> $\sqrt{16}$ est le nombre positif dont le carré est 16, donc $\sqrt{16} = 4$.
>
> $\sqrt{0,25} = 0,5$ car c'est le nombre positif dont le carré vaut 0,25.
>
> $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ car c'est le nombre positif dont le carré vaut $\frac{4}{9}$.
>
> $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré est 2.

- Une racine carrée peut être un nombre positif entier (exemple $\sqrt{16}$), ou un décimal positif (exemple $\sqrt{0,25}$), ou un rationnel (une fraction, exemple $\sqrt{\frac{4}{9}}$), ou un nombre irrationnel ($\sqrt{2}$) ce dernier n'entrant pas dans les catégories précédentes de nombres.
- Quel que soit le nombre a positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Opérations sur les racines carrées

- Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit. Autrement dit, quels que soient les nombres a et b positifs :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

- le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient. Autrement fit, quels que soient les nombres a et b positifs avec b non nul :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemples d'utilisation

Des calculs…

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{27}{48}} = \sqrt{\frac{3\times 9}{3\times 16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{32}\times\sqrt{2} = \sqrt{32\times 2} = \sqrt{64} = 8$$

Des simplifications…

$$\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{5\times 2}{\sqrt{2}} = \frac{5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Des développements de produits et réductions d'écritures…

$$\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$
$$= 3\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} - \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\times\sqrt{2} - \sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$= 6\times 3 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2 = 16 + \sqrt{6}$$

- Pour $a > 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$
- De même, $\sqrt{a-b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.
- Quand on calcule la racine d'une expression compliquée, il faut donner la priorité au calcul de ce qui est sous le radical, avant d'extraire la racine carrée.
- Pour comparer des nombres positifs s'écrivant avec des racines carrées : il revient au même de comparer leurs carrés.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Résoudre l'équation suivante d'inconnue x :

$$x\sqrt{3} = \sqrt{27}$$

2 On a payé 19 600 euros un terrain cultivable carré, à raison de 25 euros le mètre carré. Combien mesure le côté du terrain ?

3 Quelle est la valeur de l'entier « a » dans l'égalité (juste) suivante :

$$\sqrt{245} - 3\sqrt{180} + 5\sqrt{605} = a\sqrt{5}$$

4 Un triangle rectangle a une aire de 8 cm^2; un de ses côtés de l'angle droit mesure $\sqrt{8}$ cm. Combien mesure l'autre ?

5 Le nombre suivant peut se calculer sans calculatrice, combien vaut-il ?

$$\sqrt{20} \times \sqrt{5} + \sqrt{0{,}1} \times \sqrt{3{,}6} = ?$$

6 Le nombre suivant peut se calculer sans calculatrice, combien vaut-il ?

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = ?$$

7 Lorsque a = 7 et b = – 3, l'expression $\sqrt{a^2 + b^2}$ a pour valeur :

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 10 ❒ **c.** $\sqrt{53}$ ❒ **d.** $2\sqrt{13}$ ❒ **e.** $\sqrt{58}$

Niveau 2

8 Effectuer le calcul suivant et mettre le résultat sous la forme a + $b\sqrt{c}$.

$$\left(2\sqrt{3} + 7\right)\left(2\sqrt{3} - 4\right) = ?$$

9 Un trapèze a pour bases $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ cm; sa hauteur mesure $2\sqrt{5}$ cm. Calculer son aire en cm^2.

10 Calculer en cm^3 le volume d'une pyramide dont la base est un carré de $3\sqrt{2}$ cm de côté, et dont la hauteur mesure $\sqrt{0{,}36}$ dm.

11 Les nombres a et b étant positifs, alors $2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \ldots$

❒ **a.** $5\sqrt{a+b}$ ❒ **c.** $5\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$ ❒ **e.** $\sqrt{4a} + \sqrt{9b}$

❒ **b.** $5\sqrt{ab}$ ❒ **d.** $\sqrt{4a + 9b}$

12 Les trois longueurs proposées sont celles des côtés d'un triangle rectangle, dans tous les cas sauf un. Lequel ?

❒ **a.** $\sqrt{10}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ ❒ **c.** $\sqrt{53}, \sqrt{47}, 10$ ❒ **e.** 9, 6, $\sqrt{46}$

❒ **b.** $\sqrt{169}$, 12, 5 ❒ **d.** $3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}, \sqrt{7}$

13 $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$, c'est possible si…

❒ **a.** $a = 0$ et $b > 0$
❒ **b.** $b = 0$ et $a > 0$
❒ **c.** c'est toujours possible
❒ **d.** $a = -b$
❒ **e.** $a = b$

Niveau 3

14 Résoudre l'équation suivante d'inconnue x :

$$x\sqrt{5} - \sqrt{5} = 1 - x$$

15 On donne les deux nombres $x = \sqrt{3} + 1$ et $y = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$. Calculer $(x - y)$.

16 Le nombre $\sqrt{a^2+b^2}$ est égal à :

❒ **a.** $a + b$
❒ **b.** $\sqrt{(a+b)^2}$
❒ **c.** 0 si $a = b$
❒ **d.** a si $b = 0$ et $a \geq 0$
❒ **e.** $a\sqrt{2}$ si $a = -b$

17 Si $0 < a < b$ alors…

❒ **a.** $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$
❒ **b.** $\sqrt{a^2-b^2} = a - b$
❒ **c.** $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$
❒ **d.** $\sqrt{(a-b)^2} = b - a$
❒ **e.** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

18 Le nombre $\dfrac{3\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ est égal à :

❒ **a.** $15 - 6\sqrt{5}$
❒ **b.** $15 + 6\sqrt{5}$
❒ **c.** $\dfrac{3}{2}$
❒ **d.** $1 - \sqrt{5}$
❒ **e.** $\sqrt{5} - 3$

19 Toutes les propositions suivantes sauf une présentent une erreur mathématique. Quelle est la proposition juste ?

❒ **a.** $\sqrt{4^2+13} = 4\sqrt{13}$
❒ **b.** $2 + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
❒ **c.** $\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{7}$
❒ **d.** $-\sqrt{(-8)^2+6^2} = 2x$ donne $x = -5$
❒ **e.** $a^2 - b = 0$ si $b = \sqrt{a}$

20 Le nombre $(9a^2 + 16b^2)$ vaut…

❒ **a.** $\left(\sqrt{9a^2+16b^2}\right)^2$
❒ **b.** $\sqrt{(9a^2)^2} + \sqrt{(16b^2)^2}$
❒ **c.** $\sqrt{(3a+4b)^4}$
❒ **d.** $(3a + 4b)^2$
❒ **e.** $\sqrt{81a^4 + 256b^4}$

21 Je sais ce que je vaux et mon caractère est entier !

$$(1+2+3)\times\sqrt{12\,321\times\sqrt{1+2+3+2+1}}$$

❒ **a.** 6 ❒ **b.** 54 ❒ **c.** 111 ❒ **d.** 1 998 ❒ **e.** 5 994

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Si $x\sqrt{3} = \sqrt{27}$ alors $x = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$.

2 L'aire en mètres carrés du terrain est : 19 600/25 = 784 m^2.

L'aire est le carré du côté donc le côté est la racine carrée de l'aire.

Ici la racine carrée de 784 est 28, donc le côté du carré mesure 28 m.

3 Soit : $\sqrt{245} - 3\sqrt{180} + 5\sqrt{605}$. On va « sortir de sous chaque radical le plus grand entier possible ». Ainsi :

$245 = 49\times 5$ donc $\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$; $180 = 36\times 5$ donc $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

$605 = 121\times 5$ donc $\sqrt{605} = 11\sqrt{5}$.

On obtient :

$$\sqrt{245} - 3\sqrt{180} + 5\sqrt{605} = 7\sqrt{5} - 3\left(6\sqrt{5}\right) + 5\left(11\sqrt{5}\right)$$

$$= (7 - 18 + 55)\sqrt{5}$$

$$= 44\sqrt{5}$$

Le nombre « a » cherché est 44.

4 Un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle, l'aire de ce rectangle serait : 2×8 cm^2 = 16 cm^2. Le produit des côtés de l'angle droit vaut donc 16 cm^2.

Si l'un des côtés est $\sqrt{8}$ l'autre vaut : $16/\sqrt{8} = 2\times 8/\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ cm, soit encore $4\sqrt{2}$ cm.

5

$$\sqrt{20}\times\sqrt{5} + \sqrt{0,1}\times\sqrt{3,6} = \sqrt{100} + \sqrt{0,36} = 10 + 0,6 = 10,6$$

6

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{2}\times 3\sqrt{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}} + (3 \times 2) - \frac{25}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + 6 - \frac{25}{4}$$

$$= 6 - \frac{24}{4} = 6 - 6 = 0 \text{ (Tout simplement !)}$$

7 Réponse e.

$a^2 + b^2 = 49 + 9 = 58$, donc la racine est la valeur du e.

Niveau 2

8 On développe :

$$\left(2\sqrt{3} + 7\right)\left(2\sqrt{3} - 4\right) = (2 \times 2 \times 3) + 14\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 28$$

$$= 12 + 6\sqrt{3} - 28 = -16 + 6\sqrt{3}$$

Donc $a = -16$, $b = 6$ et $c = 3$.

9 L'aire du trapèze se calcule par la formule (voir le chapitre « Aires ») :

$$\frac{(B + b) \times h}{2}$$

On trouve donc : $\dfrac{\left(3\sqrt{5} + \sqrt{5}\right) \times 2\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}^2$.

10 Le volume de la pyramide se calcule par la formule (voir le chapitre « Volumes ») :

$$\frac{\text{aire de base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Ici l'aire de la base carrée est : $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}^2$

Convertissons la hauteur : $\sqrt{0,36} \text{ dm} = 0,6 \text{ dm} = 6 \text{ cm}$

Le volume vaut donc : $\dfrac{18 \times 6}{3} = 36 \text{ cm}^3$

11 Réponse e.

$$\sqrt{4a} + \sqrt{9b} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$$

Attention aux formules inventées à tort pour les autres lignes !

12 Réponse e.

Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'applique. Il faut voir si le carré du plus grand côté proposé est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Dans les quatre premières propositions, la formule est vérifiée.

Dans le **e.**, on obtient 81 pour le carré du grand côté et 36 + 46 = 82 pour la somme des carrés des deux autres. Il n'y a pas égalité entre 81 et 82, donc le triangle ne peut pas être rectangle.

13 Réponses a. et b.

Pour le **a.** : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0+b^2} = \sqrt{b^2} = b$ car b est positif (donc = a + b).

Pour le **b.** : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+0} = \sqrt{a^2} = a$ car a est positif (donc = a + b).

Les autres propositions sont fausses.

Niveau 3

14 Si $x\sqrt{5} - \sqrt{5} = 1 - x$ alors : $x\sqrt{5} + x = \sqrt{5} + 1$ puis :

$$x\left(\sqrt{5}+1\right) = \sqrt{5}+1 \text{ d'où } x = 1$$

15 Remarquons que : $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$.

La racine carrée de $\left(4+2\sqrt{3}\right)$ est donc le nombre positif $\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Le nombre y est donc égal à x, d'où $(x - y) = 0$.

16 Réponse d.

La racine de a^2 est a, quand a est positif.

Pour le e. il faut se méfier, le nombre a pouvant être négatif le résultat peut être $(-a)\sqrt{2}$ et non $a\sqrt{2}$ (il faudrait a positif pour cela).

Attention aussi aux formules inventées à tort…

17 Réponse d.

Attention à toutes les formules inventées à tort…

Une racine carrée est un nombre positif.

La racine du carré d'un nombre est égale à ce nombre quand il est positif, mais elle est égale à l'opposé de ce nombre s'il est négatif.

Ici b est le plus grand des deux nombres donc le résultat doit être (b – a) et non (a – b).

18 Réponse a.

Il faut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur…

$$\frac{3\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} = \frac{6\sqrt{5}-15}{4-5} = 15-6\sqrt{5}$$

19 Réponse d.

On peut vérifier que $-\sqrt{100} = 2 \times (-5) = -10$.

20 Réponses a et b.

Pour les propositions c. et e., penser à l'absence du double produit pourtant nécessaire dans une identité remarquable du genre $(x+y)^2$.

21 Réponse d.

$$(1+2+3) \times \sqrt{12\,321} \times \sqrt{1+2+3+2+1} = 6 \times 111 \times 3 = 1\,998$$

Aires 13

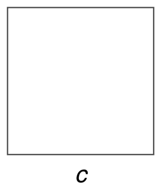
L'essentiel à retenir

- Des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
- La mesure de l'aire dépend de l'unité choisie. (Changements d'unités d'aires : voir le chapitre « Conversions ».)
- Pour **déterminer l'aire d'une figure** on peut utiliser un pavage, appliquer une formule quand on reconnaît une forme célèbre, ou retrouver dans la figure des morceaux de formes connues à ajouter ou soustraire.
- Vous trouverez page suivante un **formulaire** d'aires usuelles.
- **L'aire totale** d'un prisme, d'un cylindre, d'un cône, d'une pyramide, est l'aire de son patron. (Dessins de patrons : voir le chapitre « Volumes »).
- **L'aire latérale** d'un prisme, d'un cylindre, est la somme des aires de toutes ses faces autres que les bases. L'aire latérale d'un cône, d'une pyramide est égale à l'aire du patron diminuée de l'aire de la base. L'aire latérale d'un prisme, d'un cylindre, est égale au produit de sa hauteur par le périmètre de sa base.
- Un cube de côté « a » a une aire totale égale à : $6a^2$.

Compléments

- **L'apothème d'un polygone régulier** est la distance du centre de ce polygone à l'un quelconque de ses côtés.
- **L'apothème d'une pyramide régulière** est la distance du sommet de la pyramide à l'un quelconque des côtés de sa base.
- **L'apothème d'un cône droit** est la distance du sommet à l'un quelconque des points de sa base.

Carré

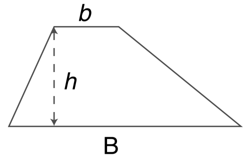


Aire : c^2

Rectangle

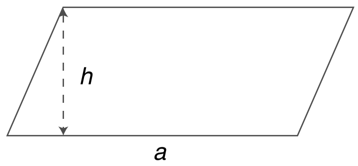
Aire : Ll

Trapèze



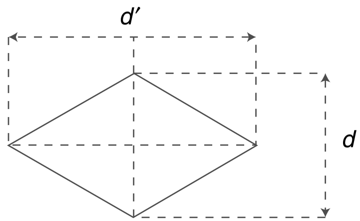
Aire : $\dfrac{B + b}{2}\, h$

Parallélogramme



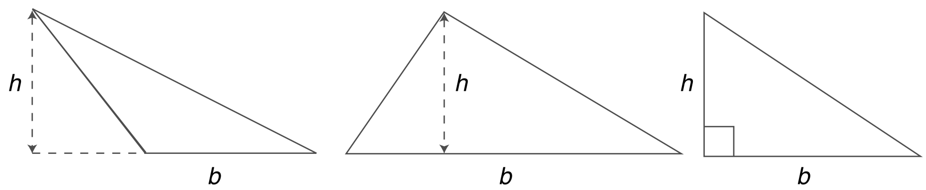
Aire : ah

Losange



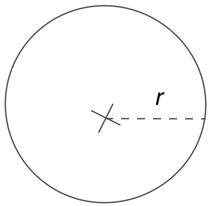
Aire : $\dfrac{dd'}{2}$

Triangles



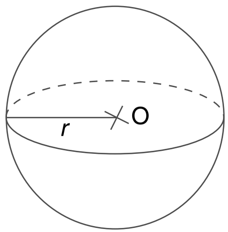
Aire : $\dfrac{bh}{2}$

Cercle et disque



Aire du disque : πr^2
(Périmètre du cercle : $2\pi r$)

Sphère



Aire : $4\pi r^2$

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Quelle est l'aire d'un carré de 8 cm de diagonale ?

2 Combien faut-il au minimum de pavés de 75 dm^2 chacun pour carreler une salle de 6 m de long sur 3 m de large ?

3 Un terrain carré constructible de 50 m de côté a coûté 150 000 €. À combien revient le mètre carré ?

4 Un linoléum carré a un périmètre de 18 mètres. Quelle est son aire en mètres carrés ?

5 Dans une pelouse rectangulaire de 15 m sur 24 m, on a placé un bac à sable carré de 4 m de côté. Quelle est l'aire de la zone qui reste à tondre ?

6 On veut recouvrir les six faces d'un cube de 40 cm de côté par de la feutrine colorée à 2,20 € le m^2. Quelle est la dépense ?

7 Combien coûtera le revêtement en ciment des parois et du fond d'une citerne cubique contenant 125 m^3, à raison de 8 € le m^2 ?

8 Une table ronde a 1,60 m de diamètre. On la recouvre d'une toile cirée qu'on veut faire dépasser les bords de 20 cm en tous sens. Quelle est l'aire de la toile utilisée ?

9 Sur le quadrillage ci-dessous toutes les circonférences ont le même centre. L'aire colorée en sombre est égale à…

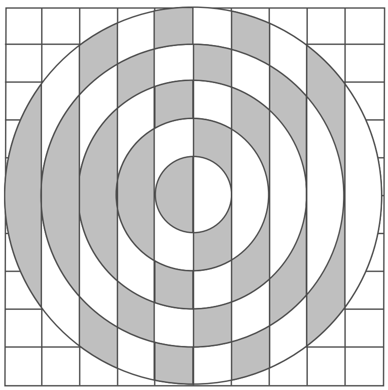
❒ **a.** deux cinquièmes de l'aire du disque le plus grand

❒ **b.** trois septièmes de l'aire du disque le plus grand

❒ **c.** la moitié de l'aire du disque le plus grand

❒ **d.** quatre septièmes de l'aire du disque le plus grand

❒ **e.** trois cinquièmes de l'aire du disque le plus grand



Niveau 2

10 Combien prendra-t-on pour dorer une boule de 8 cm de rayon, si la dorure revient à 6 euros le décimètre carré ?

11 On coud tout autour d'un tapis carré de 2,50 m de côté une bande de 15 cm de large. Quelle est l'aire totale de l'objet obtenu ?

12 Un dallage contient 275 losanges ayant ensemble une surface de 13,75 m^2. La petite diagonale du losange mesure 25 cm. Quelle est la longueur de la grande diagonale ?

13 Un jardin carré de 38 m de côté a été partagé en quatre régions équivalentes par deux allées perpendiculaires de 85 cm de large qui se coupent en son centre. Quelle est la surface à cultiver ?

14 Le plan cadastral d'une commune donne comme dimensions d'un terrain rectangulaire 5 cm et 42 mm. Le plan est à l'échelle 1/2 500. Quelle est la superficie réelle du terrain ?

15 Un pré de forme trapézoïdale a une hauteur de 160 m, et des bases de 270 m et 180 m. On l'ensemence, à raison de 12 kg par hectare, la semence valant 8 € le kilogramme. Quelle est la dépense ?

16 Quelle est la proposition vraie parmi les suivantes ?

❒ **a.** un carré de 4 cm de côté a une aire de 4 cm^2

❒ **b.** le décimètre carré est dix fois plus petit que le mètre carré

❒ **c.** un rectangle de 6 hm sur 100 m a pour aire 0,06 km^2

❒ **d.** l'aire d'un triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 cm est 10 cm^2

❒ **e.** l'aire d'un disque de 10 cm de rayon, est 20 π cm^2

17 Combien faut-il mettre au minimum de gommettes carrées de 5 mm de côté pour recouvrir un rectangle de 7,5 cm de large sur 12 cm de long ?

❒ **a.** 190 ❒ **b.** 36 ❒ **c.** 360 ❒ **d.** 19 ❒ **e.** 390

Niveau 3

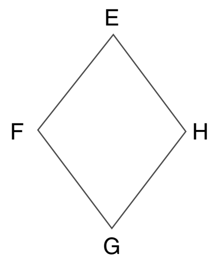
18 Observez la figure
et les données numériques…
Quelle est l'aire de EFGH ?

❒ **a.** 20 cm ❒ **d.** 48 cm^2

❒ **b.** 25 cm^2 ❒ **e.** 24 cm^2

❒ **c.** 28 cm

Mesures :
EF = 5 cm
FG = 5 cm
GH = 5 cm
HE = 5 cm
EG = 8 cm
FH = 6 cm



19 Un journal quotidien paraît sur 16 pages de format 33 cm sur 50 cm. Il est tiré chaque jour à 40 000 exemplaires. Quelle superficie de papier utilise-t-on environ chaque jour ?

❒ **a.** 1 000 m^2 ❒ **c.** 1 km^2 ❒ **e.** 100 dam^2
❒ **b.** 100 ha ❒ **d.** un milliard de cm^2

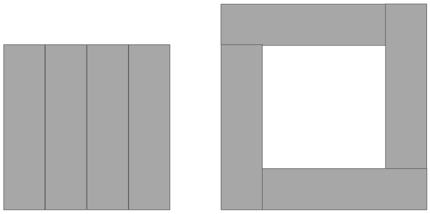
20 Quel est le rapport entre le périmètre P et l'aire A d'un cercle de rayon R ?

❒ **a.** $A = \dfrac{RP}{2}$ ❒ **b.** $P = 2AR$ ❒ **c.** $A = \dfrac{R}{2P}$ ❒ **d.** $A = \dfrac{P}{R}$ ❒ **e.** $P = \dfrac{2A}{R}$

21 ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. Le point O est le milieu de [BC]. Alors…

❒ **a.** aire ABC $= \dfrac{AB \times AC}{2}$
❒ **b.** aire ABC $= \dfrac{OA \times BC}{2}$
❒ **c.** aire ABC $= OA \times OB$
❒ **d.** $OA = OB = OC$
❒ **e.** périmètre ABC $= AB \times \left(2 + \sqrt{2}\right)$

22 Un carré d'aire 1 a été divisé en quatre rectangles identiques.
On a ensuite juxtaposé les quatre rectangles, sans chevauchement, en un nouveau carré comportant un trou central également carré ; quelle est son aire ?



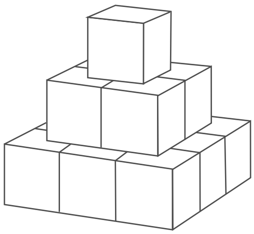
❒ **a.** $\dfrac{1}{2}$ ❒ **b.** $\dfrac{9}{16}$ ❒ **c.** $\dfrac{16}{25}$ ❒ **d.** $\dfrac{3}{4}$ ❒ **e.** 1

23 Soient deux cercles de rayons R_1 et R_2, de périmètres P_1 et P_2, et d'aires A_1 et A_2, alors si $R_2 = 2\ R_1$…

❒ **a.** $A_2 = 2 \times A_1$ ❒ **c.** $P_2 = 2 \times P_1$ ❒ **e.** $A_2 = 2^2 \times A_1$
❒ **b.** $A_2 = \pi \times A_1$ ❒ **d.** $P_2 = 2^2 \times P_1$

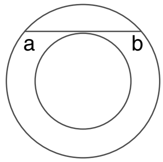
24 Un artiste dispose en pile de trois étages carrés, comme sur le dessin, 14 cubes de 1 m d'arête. Quelle est alors, en mètres carrés, l'aire à peindre de cet édifice ?

❒ **a.** 21 ❒ **c.** 33 ❒ **e.** 42
❒ **b.** 24 ❒ **d.** 37



25 Une tour cylindrique est entourée d'un chemin bordé par une clôture circulaire concentrique. Pour déterminer l'aire du chemin, un arpenteur tend une corde [ab] tangente à la base du cylindre.

Sachant que la corde mesure 14,4 m, quelle est l'aire du chemin (en m^2) ?



❒ **a.** 28,8 π ❒ **c.** 23,04 π
❒ **b.** 207,36 π ❒ **d.** 51, 84 π
❒ **e.** les données sont insuffisantes pour répondre

26 La toiture d'un clocher a la forme d'une pyramide à base carrée de 4 m de côté. Chaque triangle latéral a une hauteur de 6 m. Combien d'ardoises faudra-t-il pour la couvrir, chaque ardoise couvrant utilement une aire de 1,20 dm^2 ?

27 Un réservoir d'eau circulaire de 8 m de diamètre est entouré d'un mur de 25 cm de large et d'un sentier de 80 cm de large. Quelle est l'aire du sentier, à un dixième de m^2 près ?

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Les deux diagonales du carré sont égales à 8 cm.
L'aire vaut donc $1/2 \times (8 \times 8) = 32$ cm^2.

2 Si le pavage se fait sans problème (pas de recouvrement…), on obtient le minimum de pavés. Pour le connaître, il suffit de diviser l'aire de la salle par l'aire d'un pavé.
Aire de la salle : $6 \times 3 = 18$ m^2. Aire d'un pavé : 75 dm^2 = 0,75 m^2.
Nombre de pavés nécessaires : $18/0{,}75 = 24$.

3 Aire du carré : $50 \times 50 = 2\,500$ m^2.
Prix d'un mètre carré : $150\,000/2\,500 = 60$ euros.

4 Le périmètre du carré vaut 4 fois le côté.
Ce côté mesure $18/4 = 4{,}5$ m.
L'aire du linoléum est : $4{,}5^2 = 20{,}25$ m^2.

5 L'aire totale du terrain est : $15 \times 24 = 360$ m^2.
L'aire du bac à sable est : $4 \times 4 = 16$ m^2.
L'aire de pelouse à tondre est : $360 - 16 = 344$ m^2.

6 L'aire totale des six faces du cube est : $6 \times 40^2 = 9\,600$ cm^2 ou 0,96 m^2. La dépense en feutrine est donc : $2{,}20 \times 0{,}96 = 2{,}112$ arrondi à 2,12 euros.

7 Le revêtement de la citerne correspond à l'aire de seulement 5 des 6 faces d'un cube.
Si le volume du cube est 125 m^3, le côté vaut 5 m (car $5 \times 5 \times 5 = 125$).

L'aire des 5 faces est : $5 \times 5^2 = 125$ m^2.

Le prix du revêtement est : $8 \times 125 = 1\ 000$ euros.

8 Le diamètre de la toile doit être : $1{,}60 + 2 \times 0{,}20 = 2$ m. Donc le rayon doit être 1 m. L'aire de la toile cirée est : $\pi \times 1^2 = \pi$ en m^2, soit environ 3,14 m^2.

9 **Réponse c.**

Il y a une symétrie par rapport au point qui est le centre de tous les cercles. L'aire sombre est ainsi égale à l'aire blanche, c'est donc la moitié de l'aire du disque le plus grand.

Niveau 2

10 L'aire de la boule est $4\pi R^2 = 4\pi \times 64 = 256\pi$ (en cm^2) soit environ 804,25 cm^2 ou 8,0425 dm^2.

Prix de la dorure : $6 \times 8{,}0425 = 48{,}255$ arrondi à 48,26 euros.

11 Le tapis auquel on a cousu la bande de 15 cm (= 0,15 m) a la forme d'un carré de coté : $2{,}5 + 2 \times 0{,}15 = 2{,}80$ m.

L'aire totale de l'objet est : $2{,}8^2 = 7{,}84$ m^2.

12 L'aire d'un losange est : $13{,}75 : 275 = 0{,}05$ m^2 soit 5 dm^2 ou 500 cm^2.

Le produit des deux diagonales vaut le double de l'aire du losange, donc 1 000 cm^2. La diagonale cherchée mesure donc $1\ 000/25 = 40$ cm.

13 Une allée a une aire de $38 \times 0{,}85 = 32{,}3$ m^2. Les deux allées se coupent selon un carré d'aire $0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}722\ 5$ m^2.

L'aire de la figure constituée des deux allées est :

$2 \times 32{,}3 - 0{,}722\ 5 = 63{,}877\ 5$ m^2.

L'aire du jardin est : $38^2 = 1\ 444$ m^2.

L'aire de la surface à cultiver est : $1\ 444 - 63{,}877\ 5 = 1\ 380{,}122\ 5$ m^2.

14 D'après l'échelle, les vraies dimensions s'obtiennent en multipliant par 2 500 les dimensions du plan.

Ainsi 5 cm deviennent : $2\ 500 \times 5 = 12\ 500$ cm soit 125 m.

42 mm deviennent : $2\ 500 \times 42 = 105\ 000$ mm $= 105$ m.

L'aire réelle du terrain est donc : $125 \times 105 = 13\ 125$ m^2.

15 L'aire du trapèze est : $1/2 \times (270 + 180) \times 160 = 36\ 000$ m^2 soit 3,6 ha.

Le poids de semence est : $12 \times 3{,}6 = 43{,}2$ kg.

La dépense est alors : $8 \times 43{,}2 = 345{,}60$ euros.

16 **Réponse c.**

Au a., l'aire est $4 \times 4 = 16$. Au b., le dm^2 vaut un centième du m^2.

Au c., 6 hm = 600 m, et l'aire est $600 \times 100 = 60\ 000$ m^2 soit 6 hm^2 ou 0,06 km^2. Au d., le côté le plus long (5) est l'hypoténuse, les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4 et l'aire est $3 \times 4/2 = 6$. Au e., il y a confusion entre la formule du périmètre du cercle et celle donnant l'aire du cercle.

17 Réponse c.

D'abord 5 mm = 0,5 cm et on pourra placer les gommettes en largeur et en longueur facilement (en nombre entiers), soit 24 en long et 15 en large, d'où le résultat : $15 \times 24 = 360$ gommettes.

Niveau 3

18 Réponse e.

En observant les données, on remarque que la figure a quatre côtés égaux, et est donc un losange. On trouve alors les mesures des deux diagonales, et l'on sait que l'aire d'un losange est la moitié du produit de ses diagonales, d'où :

$$6 \times 8/2 = 24$$

19 Réponse d.

D'abord 50 cm = 0,5 m et 33 cm = 0,33 m. L'aire de papier nécessaire en un jour est, en m^2 : $0{,}5 \times 0{,}33 \times 40\,000 \times 16$. En lisant « environ », on comprend qu'on peut se contenter d'un calcul approché.

D'une part $0{,}5 \times 40\,000$ fait 20 000, et d'autre part $0{,}33 \times 16$ n'est pas loin de 16/3 et donc de 5. On poursuit par $5 \times 20\,000 = 100\,000$ m^2 soit 1 000 dam^2 ou 10 ha ou 0,10 km^2, ce qui élimine les réponses autres que d.

On vérifie que 100 000 m^2 = 1 000 000 000 cm^2, donc le d. est juste.

20 Réponses a. et e.

On conçoit que des cm multipliés par des cm donnent des cm^2, et qu'en divisant des cm par des cm on ne peut trouver des cm^2, ou encore qu'en multipliant des cm^2 par des cm, on ne peut trouver des cm. Ceci permet de ne pas perdre de temps à étudier les formules b., c. et d. : elles ne peuvent être justes à cause des unités de mesure.

On sait que $P = 2\pi R$ donc $P \times R = 2\pi R^2$ et la moitié de $P \times R$ vaut donc πR^2 soit A. Le a. est donc juste.

Attention le e. et le a. reviennent au même, mis à part que l'un exprime P à l'aide de A, et que l'autre exprime A à l'aide de P. Le e. est juste lui aussi.

21 Les six propositions a., b., c., d., e. sont justes !

L'aire du triangle rectangle est égale à la moitié du produit de ses côtés de l'angle droit. Le segment [AO] du triangle isocèle est axe de symétrie, donc l'aire de la figure est deux fois celle du triangle AOC. La médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse. L'hypoténuse BC est la diagonale d'un carré de côté AB, donc elle vaut $AB \times \sqrt{2}$ et le périmètre vaut :

$$AB + AB + AB\sqrt{2} = AB\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

22 Réponse b.

La largeur d'un rectangle est 1/4.

La nouvelle figure (contour extérieur) est un carré qui a pour côté $1 + 1/4 = 5/4$. Son aire est $(5/4)^2 = 25/16$.

Le trou a pour aire la différence entre 25/16 et l'aire des rectangles qui vaut 1 m², d'où : $25/16 - 1 = 9/16$ de m².

23 Réponses c. et e.

Si on multiplie le rayon par un nombre k, le périmètre est multiplié par k et l'aire par k^2. Ici $k = 2$, et $P_2 = 2 \times P_1$, $A_2 = 2 \times A_1$.

24 Réponse c.

Pour le dessus : il y a une surface équivalant à 9 carrés à peindre en tout, même s'ils ne sont pas à la même hauteur; devant et derrière : 6 carrés chacun; enfin gauche et droite : 6 carrés chacun; pour un total de 33 mètres carrés.

25 Réponse d.

Soit x la longueur de la demi-corde, on a $x = 14,4/2 = 7,2$. Si on trace la médiatrice de la corde, cette demi-corde de 7,2 m devient l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est le petit rayon r, et dont l'hypoténuse est le grand rayon R. Le théorème de Pythagore donne $R^2 = r^2 + x^2$ d'où $R^2 - r^2 = x^2 = 7,2^2 = 51,84$.

Mais l'aire du chemin est celle d'une couronne, différence de deux disques, soit :

$$(\pi R^2 - \pi r^2) = \pi\,(R^2 - r^2) = 51,84\pi$$

C'est la réponse d.

26 Le toit est constitué de 4 triangles de base 4 m et de hauteur 6 m.

L'aire d'un tel triangle est : $1/2 \times 4 \times 6 = 12$ m².

L'aire du toit est : $12 \times 4 = 48$ m², soit 4 800 dm².

Le nombre d'ardoises nécessaire est : $\dfrac{4\,800}{1,20} = 4\,000$.

27 Le sentier a la forme d'une couronne comprise entre deux cercles.

Le diamètre intérieur est : $8 + 2 \times 0,25 = 8,50$ m.

Le diamètre extérieur est : $8,50 + 2 \times 0,8 = 10,10$ m.

L'aire d'un cercle de diamètre d est égale à : $(\pi \times d^2)/4$.

L'aire du cercle intérieur est :

$$(\pi \times 8,5^2)/4 = (72,25\pi)/4 \text{ soit environ } 56,72 \text{ m}^2$$

L'aire du cercle extérieur est :

$$(\pi \times 10,1^2)/4 = (102,01\pi)/4 \text{ ou environ } 80,08 \text{ m}^2$$

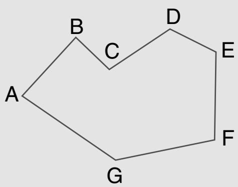
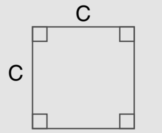
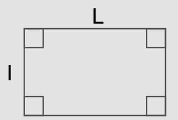
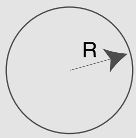
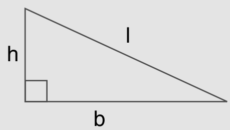
L'aire du sentier est donc environ :

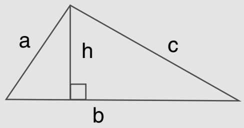
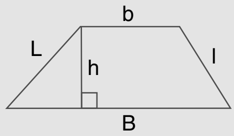
$$80,08 - 56,72 = 23,36 \text{ m}^2 \text{ soit } 23,4 \text{ m}^2 \text{ à un dixième de m}^2 \text{ près}$$

Périmètres et aires : comparons… 14

L'essentiel à retenir

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour

Formule du périmètre	Figure	Formule de l'aire
P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA		Il faut décomposer en figures dont on connaît les aires; des triangles par exemple
$P = 4 \times C$		$A = C \times C$
$P = 2 \times (L + l)$		$A = L \times l$
$P = 2 \times \pi \times R$		$A = \pi \times R \times R$
$P = b + h + l$		$A = \dfrac{b \times h}{2}$

Formule du périmètre	Figure	Formule de l'aire
$P = a + b + c$		$A = \dfrac{b \times h}{2}$
$P = B + b + L + l$		$A = (B + b) \times h/2$

- Quand on compare les périmètres et les aires de figures différentes, il faut faire attention : **ce n'est pas toujours la figure de plus grande aire qui a le plus grand périmètre.**

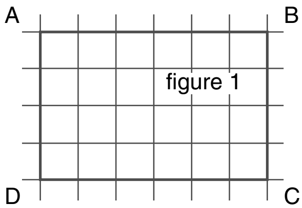
Exercices d'entraînement

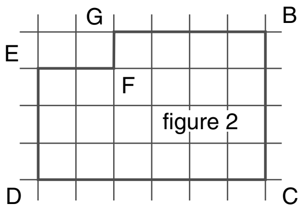
Niveau 1

1 Quel est le périmètre d'un rectangle de 9 cm sur 7 cm ?

2 Mon terrain rectangulaire mesure 28,5 m de long et 14,25 m de large. Je veux le clôturer avec de la brande. Quelle longueur de brande me faudra-t-il si je laisse une entrée de 5,25 m ?

3 L'unité de longueur étant le côté des petits carreaux du quadrillage, combien y a-t-il d'unités de différence entre les périmètres des deux figures ?





4 Une corde s'enroule 25 fois autour d'une roue de 50 cm de rayon. Quelle est la longueur de la corde à un mètre près ?

5 Un triangle ABC isocèle en B a pour périmètre 37 cm, et AB = 11 cm. Calculer AC.

6 Le périmètre d'un rectangle de largeur l et de longueur $2l$ est :

❒ **a.** $3l$ ❒ **b.** $4l$ ❒ **c.** $5l$ ❒ **d.** $6l$ ❒ **e.** $8l$

7 Si on multiplie les dimensions d'un triangle par 3, alors…

❒ **a.** son aire est multipliée par 6
❒ **b.** son aire est multipliée par 9
❒ **c.** son périmètre est multiplié par 6
❒ **d.** son périmètre est multiplié par 9
❒ **e.** son périmètre est multiplié par 3

8 Le périmètre d'un losange est égal…

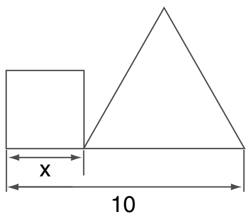
❒ **a.** au demi produit de ses diagonales
❒ **b.** à la somme de ses diagonales
❒ **c.** au carré de son côté
❒ **d.** au quadruple de son côté
❒ **e.** au double de la somme de ses diagonales

Niveau 2

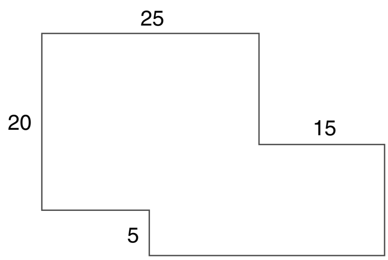
9 Je possède un champ rectangulaire de 28 m sur 15 m. J'achète un terrain contigu par la largeur faisant 17 m sur 15 m. J'ai maintenant un plus grand terrain rectangulaire : quel est son périmètre ?

10 Si l'on compare le périmètre d'un losange de 4,5 cm de côté et celui d'un rectangle de longueur 11 cm, on passe du simple au double !
Quelle est la largeur du rectangle ?

11 Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre…

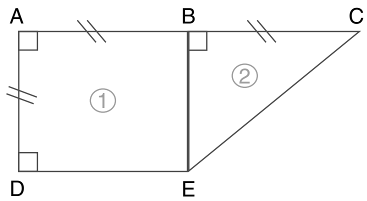


12 Quel est le périmètre de cette figure ? (Les dimensions sont en millimètres. Tous les angles sont droits)



❒ **a.** 130 mm
❒ **b.** il manque des données
❒ **c.** 95 mm
❒ **d.** 120 mm
❒ **e.** 125 mm

13 Observez la figure constituée de deux parties…



❒ **a.** périmètre total = périmètre de la partie 1 + périmètre de la partie 2

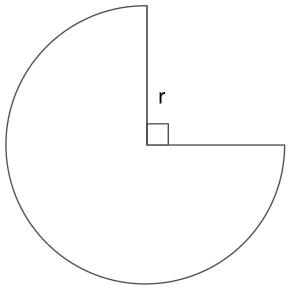
❒ **b.** périmètre total = $2 \times (AE + AC)$

❒ **c.** aire totale = aire 1 + aire 2

❒ **d.** aire totale = Aire 1 × Aire 2

❒ **e.** aire totale = 2 × aire 1 − aire 2

14 Observez la figure…



❒ **a.** périmètre = $\frac{3}{4} \times 2\pi \times r + 2r$

❒ **b.** périmètre = $\frac{3}{4} \times 2\pi \times r - 2r$

❒ **c.** aire = $\frac{3}{4} \times \pi \times r^2 + r^2$

❒ **d.** aire = $\frac{3}{4} \times \pi \times r^2 - r^2$

❒ **e.** aire = $\frac{3}{4} \times \pi \times r^2$

Niveau 3

15 Un triangle isocèle a pour périmètre 37 cm. L'un de ses côtés mesure 9 cm. Trouver la longueur de la base de ce triangle.

16 Un cône a pour volume $V = 18\pi$ cm^3. Sa hauteur est 6 cm. On note P le périmètre de sa base, en centimètres. Calculer en cm^2 le rapport $\frac{V}{P}$.

17 Une seule affirmation ci-dessous n'est pas fausse, laquelle ?

❒ **a.** plus le périmètre d'une figure est grand, plus son aire est étendue

❒ **b.** si deux figures ont la même aire leur périmètre est le même

❒ **c.** on peut fabriquer des figures d'aire très petite et de périmètre très grand

❒ **d.** l'aire d'une figure est toujours plus grande que son périmètre

❒ **e.** si une figure a un périmètre double d'une autre, son aire est multipliée par 4

18 Une seule affirmation ci-dessous n'est pas vraie, laquelle ?

❒ **a.** si une figure a une aire double d'une autre, son périmètre est multiplié par le nombre $\sqrt{2}$

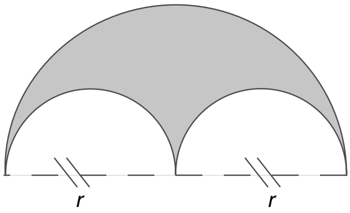
❒ **b.** pour enfermer l'aire la plus grande à l'intérieur d'une corde de 1 m de longueur, il faut disposer celle-ci en cercle

❒ **c.** on ne peut pas fabriquer des figures d'aire très grande et de périmètre très petit

❒ **d.** si toutes les dimensions d'une figure sont multipliées par 2, son aire est multipliée par 4

❒ **e.** l'aire d'une figure n'est pas proportionnelle à son périmètre

19 Observez la figure dont le contour est formé de 3 demis cercles…



❒ **a.** périmètre total $= 2 \times \pi \times r$

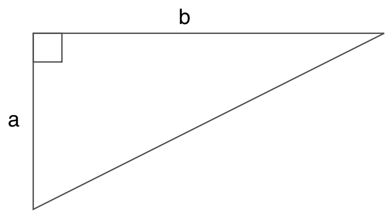
❒ **b.** périmètre total $= \pi \times r - \pi \times \dfrac{r}{2}$

❒ **c.** le périmètre du grand demi-cercle est égal au total des périmètres des 2 petits

❒ **d.** périmètre total $= 3 \times \pi \times r^2$

❒ **e.** périmètre total $= 3 \times \pi \times \dfrac{r}{2}$

20 Observez le triangle rectangle…



❒ **a.** périmètre $= 2 \times (a + b)$

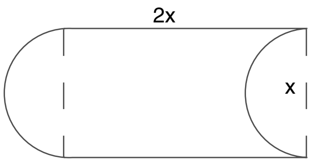
❒ **b.** périmètre $= a \times \dfrac{b}{2}$

❒ **c.** périmètre $= a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$

❒ **d.** aire $= \dfrac{a + b + (a^2 + b^2)}{2}$

❒ **e.** aire $= \dfrac{a \times b \times (a^2 + b^2)}{2}$

21 Observez la figure limitée par les traits pleins…



❒ **a.** périmètre $= 4x + \pi x$

❒ **b.** périmètre $= 4x + 2 \times \pi \times x$

❒ **c.** aire $= 2x^2$

❒ **d.** aire $= 2x \times x - \pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

❒ **e.** aire $= \pi\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\pi x$

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Le périmètre du rectangle est $2(L + l) = 2(9 + 7) = 32$ cm.

2 Le périmètre du rectangle est : $2(28{,}5 + 14{,}25) = 85{,}50$ m.
Il faut enlever la porte soit 5,25 m. Il reste : 80,25 m de longueur pour la brande.

3 Les deux figures ont le même périmètre (donc la différence demandée est nulle).

> C'est l'aire de la figure de gauche qui a 2 carreaux de plus que l'aire de la figure de droite.

4 La longueur de la corde est le périmètre d'un cercle de 50 cm de rayon donc : $2 \times \pi \times 50 = 314{,}159$ cm environ.
Pour 25 tours on obtient 25 fois plus soit environ 7 853,975 cm, ce qu'on arrondit à 79 mètres.

5 Le triangle est isocèle en B donc il y a un deuxième côté de longueur 11, et le côté AC (la base) mesure : $37 - 2 \times 11 = 15$ cm.

6 Réponse d.
Le périmètre vaut $2(L + l) = 2(2l + l) = 2(3l) = 6l$.

7 Réponses b et e.
Si on multiplie les dimensions par k, le périmètre est multiplié par k et l'aire est multipliée par k^2. Ici, $k = 3$ et $k^2 = 9$.

8 Réponse d.

> Attention au a. : le demi-produit des diagonales, c'est l'aire du losange.

Niveau 2

9 Le nouveau terrain a toujours une largeur de 15 m. La longueur est devenue :

$$28 + 17 = 45 \text{ m}$$

Le périmètre est : $2 \times (45 + 15) = 2 \times 60 = 120$ m.

10 Le périmètre du losange est : $4 \times 4{,}5 = 18$ cm.
Le périmètre du rectangle est donc $2 \times 18 = 36$ cm.
C'est aussi $(2L + 2l)$ soit :

$$2 \times 11 + 2l = 22 + 2\,l$$

d'où $2l = 36 - 22$, et $2l = 14$ puis $l = 7$ cm.

11 Le périmètre du carré est $4x$. Le côté du triangle équilatéral est $(10 - x)$.

Son périmètre est : $3(10 - x) = 30 - 3x$.

On obtient : $4x = 30 - 3x$ puis $7x = 30$ et $x = 30/7$.

12 Réponse a.

Le périmètre de la figure est le même que celui d'un rectangle de largeur $20 + 5 = 25$ mm et de longueur $25 + 15 = 40$ mm.

On obtient : $2 \times (25 + 40) = 2 \times 65 = 130$ mm.

13 Réponses c. et e.

Dans le a., le côté BE serait compté (et même deux fois) : c'est faux.

Attention au b. qui est faux également :

AE = EC = diagonale du carré. Si on note x le côté du carré, le périmètre est :

$$4x + EC = 2(2x) + EC = 2AC + EC$$

mais pas $2(AE + EC)$.

De façon évidente, le c. est juste et le d. est faux.

On a : Aire 2 = (1/2) Aire 1, et :

$$\text{aire totale} = 3 \times \text{Aire } 2 = 2 \times \text{Aire } 2 + \text{Aire } 2 = \text{Aire } 1 + \text{Aire } 2$$

donc le e. est juste.

14 Réponses a. et e.

Le périmètre est constitué des trois quarts d'un cercle auxquels on ajoute deux rayons mesurant r.

L'aire est celle des trois quarts d'un disque (le carré n'a rien à y voir).

Niveau 3

15 Attention, on peut envisager deux cas selon que 9 est la base ou l'un des deux côtés égaux. Si la base mesure 9, il reste $37 - 9 = 28$ à se partager entre les deux côtés égaux, chacun fait donc 14 cm et les trois côtés du triangle mesurent 9, 14, et 14 cm.

Si l'on suppose qu'un des deux côtés égaux mesure 9, l'autre fait aussi 9 et la base mesure $37 - 2 \times 9 = 37 - 18 = 19$ cm. Mais il y a alors un ennui : un côté d'un triangle doit toujours être plus petit que la somme des deux autres (le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite) ; or ici 19 ne serait pas plus court que $9 + 9 = 18$. Cette possibilité est donc à rejeter.

Conclusion : la seule solution est que la base fait 9 cm.

16 Le volume du cône est donné par la formule : $1/3 \times (\pi R^2 h)$ et il est égal à 18π. En simplifiant par π et en remplaçant h par 6 on obtient :

$$2 R^2 = 18 \text{ puis } R^2 = 9 \text{ et } R = 3 \text{ (en cm)}$$

Le périmètre de la base du cône devient : $2\pi R = 6\pi$ (en cm) ;

Le rapport demandé V/P vaut : $(18\pi)/(6\pi) = 3$.

17 Réponse c.

a. Pour une même forme, un périmètre plus grand indique une aire plus grande, mais si on n'a pas de renseignement sur la forme, le périmètre peut être plus grand avec une aire plus petite (il suffit d'entortiller le contour).

b. Il faudrait la même forme pour que deux figures de même aire aient le même périmètre.

c. C'est vrai : un rectangle de 0,000 000 1 mm de large et de 1 000 km de long a une aire de 1 cm^2, donc très petite, alors que son périmètre est très grand (plus de 2 000 km).

d. Pour les nombres, l'exemple du c. prouve le contraire; de plus, aires et périmètres ne sont pas comparables car ces deux notions ne s'expriment pas avec la même unité.

e. On ne peut pas savoir, cela dépend de la forme des figures.

18 Réponse a.

a. Cela dépend de la forme de la figure : l'affirmation est fausse, c'est donc la bonne réponse.

b. C'est vrai. Pour un carré, le côté est 1/4 et on obtient une aire de $\frac{1}{16}$ m^2, pour un triangle équilatéral le côté est 1/3 et l'aire $\frac{\sqrt{3}}{36}$ m^2, pour le cercle le rayon est $1/2\pi$ et l'aire $\frac{1}{4\pi}$.

Les valeurs (approchées pour les deux dernières) à comparer sont 0,062 50 puis 0,048 11 et enfin 0,079 57.

Les affirmations c., d. et e. sont exactes.

19 Réponses a. et c.

Le périmètre du demi-grand cercle est πr.

Les deux demi-cercles correspondent à un cercle entier de rayon r/2, donc son périmètre est : $2 \times \pi \times r/2 = \pi r$. Le a. et le c. sont donc justes.

20 Réponse c.

Le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle rectangle donne que l'hypoténuse mesure $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Le périmètre est bien la proposition c.

Les propositions sur les aires sont fantaisistes, l'aire vaut $(a \times b)/2$.

21 Réponses a. et c.

En observant bien le contour en trait plein, on voit que la partie gauche limitée par l'arc de cercle pourrait s'emboîter à droite : l'aire de l'objet est la même que celle d'un rectangle de côtés 2x et x, donc c'est $2x^2$.

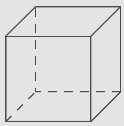
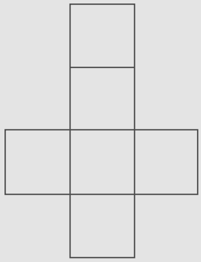
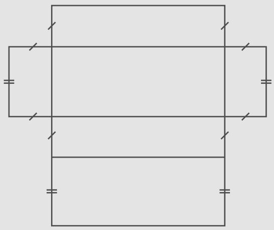
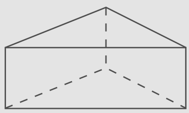
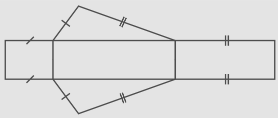
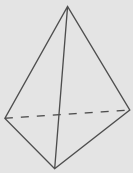
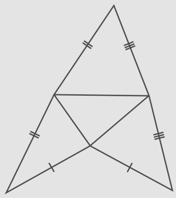
Le c. est donc juste.

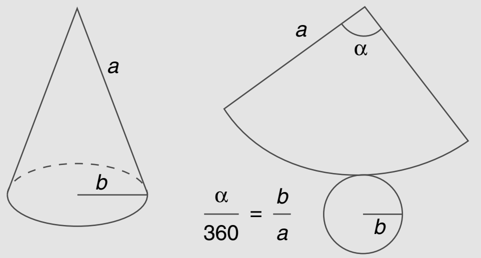
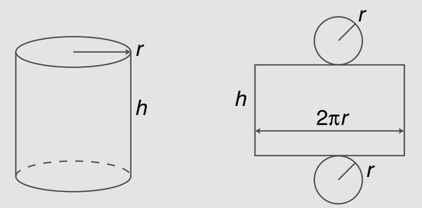
Le périmètre de la figure s'obtient en additionnant le périmètre d'un cercle de diamètre x (donc πx) avec deux fois un segment de longueur 2x. On obtient donc la valeur proposée au a. soit $4x + \pi x$.

Volumes 15

L’essentiel à retenir

- Voici quelques solides usuels représentés accompagnés de la forme d’un patron permettant de les construire (parmi d’autres patrons possibles).

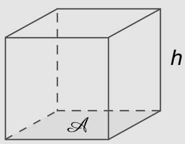
Cube	 
Parallélépipède rectangle	 
Prisme droit	 
Pyramide à base triangulaire	 

Côn e de révolution	
Cylindre droit	

- Le volume d'un solide dépend de l'unité choisie.
- Les problèmes de changements d'unité sont abordés au chapitre « conversions ». Les aires des solides sont abordées au chapitre « aires ».
- Voici un formulaire des volumes des solides usuels.

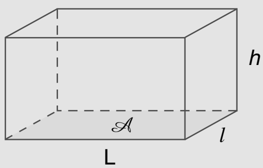
Toutes les dimensions doivent être exprimées avec la même unité avant d'utiliser la formule.

Cube



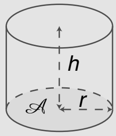
Volume : $\mathcal{A}h = h^3$

Parallélépipède rectangle



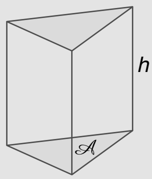
Volume : $\mathcal{A}h = lLh$

Cylindre de révolution



Volume : $\mathcal{A}h = \pi r^2 h$

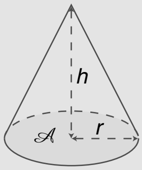
Prisme droit



Volume : $\mathcal{A}h$

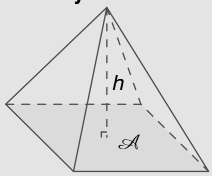
Volume : $\mathcal{A}h$
$\mathcal{A}$: aire de la base
h : hauteur du solide

Cône de révolution



Volume : $\dfrac{\mathscr{A}h}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Pyramide



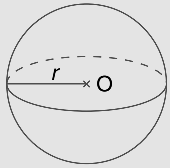
Volume : $\dfrac{\mathscr{A}h}{3}$

Volume : $\dfrac{\mathscr{A}h}{3}$

$\mathscr{A}$: aire de la base

h : hauteur du solide

Boule



Volume : $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

- Pour déterminer le volume d'un solide composé de plusieurs solides usuels **on additionne les volumes de ces morceaux**. Il est possible aussi de procéder par décomposition et soustraction, par exemple pour des solides troués.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Dans tous les prismes droits, on a…

❒ **a.** autant de faces latérales qu'une base a d'arêtes

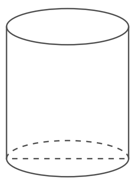
❒ **b.** autant de faces latérales qu'une base a de sommets

❒ **c.** au moins 4 faces latérales

❒ **d.** plus de sommets que de faces latérales

❒ **e.** autant de sommets que la somme du nombre de faces latérales et du nombre de bases

2 Pour le cylindre de diamètre [BC] dont [AB] est une hauteur :



❒ **a.** volume $= \pi \times BC^2 \times AB$

❒ **b.** aire de la base $= BC^2 \times \dfrac{\pi}{2}$

❒ **c.** aire latérale $= AB \times BC$

❒ **d.** volume $= \pi \times BC^2 \times \dfrac{AB}{4}$

❒ **e.** aire latérale $= \pi \times BC \times AB$

3 Dans toutes les pyramides on a…

❒ **a.** autant de sommets que d'arêtes
❒ **b.** autant de faces latérales que de côtés de la base
❒ **c.** autant de sommets que d'arêtes de la base
❒ **d.** autant de faces latérales que de sommets de la base
❒ **e.** les faces latérales qui sont des triangles isocèles

4 Un seau cylindrique a 36 cm de diamètre, et 4 dm de haut. Quelle est sa contenance en litres ?

5 Une salle d'examen renferme 43 candidats et 2 surveillants. Elle mesure 9 m de long, 6 m de large et 2,5 m de haut. Quel est le volume d'air, arrondi au litre, par personne ?

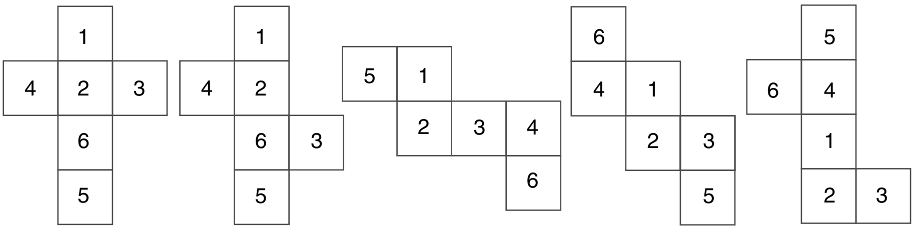
6 Un pain de sucre conique de 30 cm de diamètre a 7 dm de hauteur ; le décimètre cube de sucre pèse 1,6 kg. Quel est le poids du pain de sucre ?

7 Un tuyau de zinc est cylindrique. Le rayon de la base est 15 cm, la longueur du tuyau 15 m ; le zinc coûte 80 € le mètre carré. Calculer le prix du tuyau.

8 Un bol hémisphérique a 14 cm de diamètre. Quelle est sa capacité en centilitres ?

Niveau 2

9 Un dé normal, de forme cubique, est fabriqué de façon que la somme de ses faces opposées soit toujours 7. Sans tenir compte de l'orientation des écritures de chiffres sur les faces, écrire les patrons possibles parmi les suivants :



❒ **a.** ❒ **b.** ❒ **c.** ❒ **d.** ❒ **e.**

10 Dans un cube dont les arêtes sont de longueur 1, quelle est la longueur d'une grande diagonale ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** $1 + \sqrt{2}$ ❒ **c.** $\sqrt{3}$ ❒ **d.** $2 + \sqrt{2}$ ❒ **e.** $2\sqrt{2}$

11 Soit une sphère de diamètre [AB], alors…

❒ **a.** son volume mesure $\frac{4}{3} \times \pi \times \frac{AB^3}{2}$

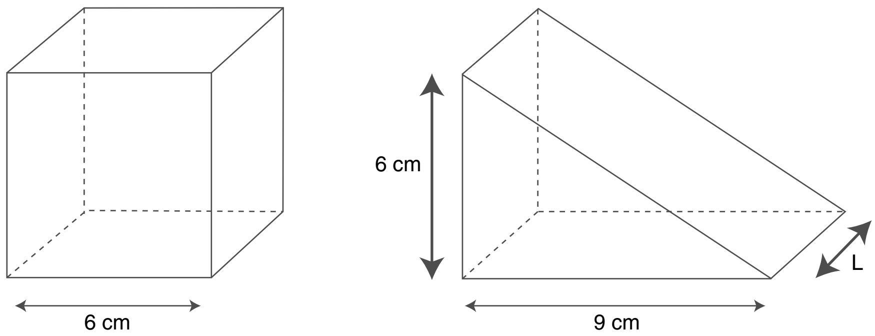
❒ **b.** son aire mesure $4\pi \times \frac{AB^2}{2}$

❒ **c.** son volume mesure $\frac{4}{3} \times \pi \times \frac{AB^3}{6}$

❒ **d.** son aire mesure $\pi \times AB^2$

❒ **e.** son volume mesure $\pi \times \frac{AB^3}{6}$

12 Les deux solides suivants, cube et prisme ayant pour base un triangle rectangle, ont le même volume.
La longueur L du prisme est telle que :



❒ **a.** L < 6 cm ❒ **b.** L = 8 cm ❒ **c.** L > 6 cm ❒ **d.** L = 6 cm ❒ **e.** L = 4,8 cm

13 Une fontaine qui fournit 36 litres d'eau par minute remplit en deux heures et quart un bassin circulaire dont le diamètre est 4 m. Quelle est la profondeur du bassin, au centimètre près ?

14 Quel est le volume d'un objet qui, plongé dans l'eau d'un vase cylindrique de 12 cm de diamètre, fait monter le niveau de 10 cm ?

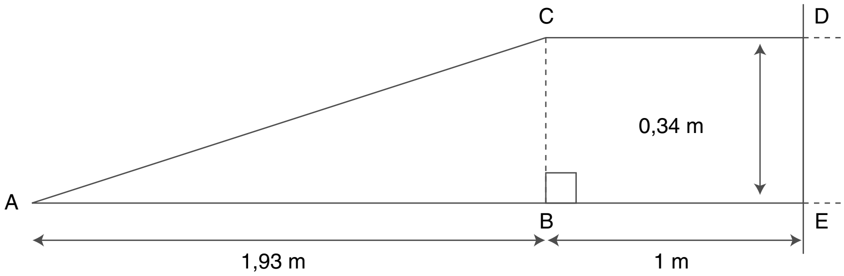
15 Calculer le poids d'une pyramide de pierre de 2,50 m de hauteur, dont la base est un triangle de base 1,2 m et hauteur 80 cm. Le décimètre cube de cette pierre pèse 3 kg.

16 Un verre à champagne de forme conique contient 14,14 cL. Quelle est sa profondeur à 1 mm près si le diamètre de ce verre est 6 cm ?

17 Le clocheton d'une cathédrale a la forme d'une pyramide hexagonale. Les côtés de l'hexagone de base mesurent 0,80 m. L'apothème des faces latérales est égal à 1,75 m. Calculer la surface latérale du clocheton.

Niveau 3

18 On doit transformer un escalier en une rampe afin de faciliter l'accès aux personnes à mobilité réduite. Voici la coupe de cette rampe AEDC en béton dont la largeur de passage sera 2 mètres.



Quel sera le volume (en mètres cubes) de béton utilisé ?

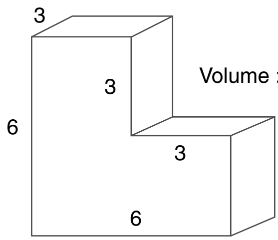
19 On a recouvert de sable une cour de 42 m de long sur 25 m de large. On a dépensé 240 € à raison de 5 € par tombereau de $\frac{3}{4}$ de m^3.

Quelle est l'épaisseur de la couche de sable à 1 mm près ?

20 La tente d'un cirque se compose d'un cylindre de 12 m de rayon et de 3 m de haut, et aussi d'un toit en forme de cône dont l'apothème est égal à 15 m. Quelle surface de toile a-t-il fallu pour faire cette tente (à 1 m^2 près) ?

21 Observez l'objet… Quel est son volume ?

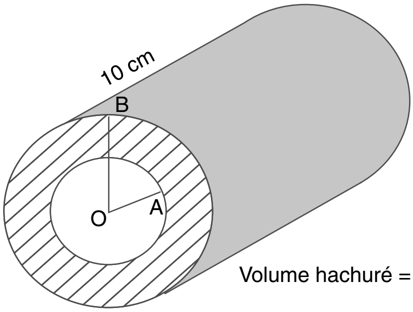
❒ **a.** $6 \times 6 \times 3$
❒ **b.** $3 \times (6 \times 6 - 3 \times 3)$
❒ **c.** $36 \times 3 - 9 \times 3$
❒ **d.** 81
❒ **e.** $6 \times 6 \times 6$



Volume :

22 Observez ce tuyau creux… Quel est son volume en cm^3 ?

❒ **a.** $\pi \times 2^2 \times 10$
❒ **b.** $\pi \times 5^2 \times 10 - \pi \times 3^2 \times 10$
❒ **c.** $\pi \times 16 \times 10$
❒ **d.** $\pi \times 3^2 \times 10$
❒ **e.** $\pi \times 4^2 \times 10$



OA = 3 cm
OB = 5 cm

Volume hachuré =

23 Une sphère de volume V_2 est à l'intérieur d'une autre de volume V_1. R = 2r donc :

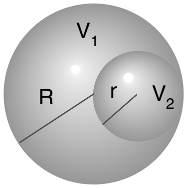
❒ **a.** $V_1 = 2\ V_2$

❒ **b.** $V_1 - V_2 = R - r$

❒ **c.** $V_1 = 8\ V_2$

❒ **d.** la surface de la grosse boule vaut 4 fois celle de la petite

❒ **e.** $V_1 = 16\ \pi\ \frac{r}{3}$



24 Quelle est la hauteur de la cuve qui contient en partie de l'eau ?

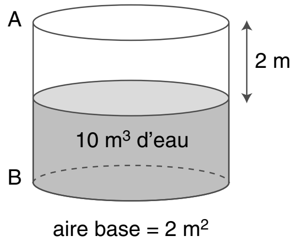
❒ **a.** 5 mètres

❒ **b.** 7 m

❒ **c.** (10 – 2) m

❒ **d.** $\frac{10}{2} + 2$ m

❒ **e.** 10×2 m



25 Le nombre de cubes de 6 cm de côté que l'on peut placer dans un cube de 36 cm de côté est…

❒ **a.** 6 ❒ **b.** 6×6 ❒ **c.** $6 \times 6 \times 6$ ❒ **d.** 3×6 ❒ **e.** $3 \times 6 \times 6$

26 Observez le patron du prisme de volume 120 unités…
Et calculez sa hauteur.

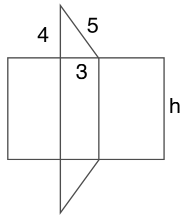
❒ **a.** 2

❒ **b.** 20

❒ **c.** $\frac{120}{4 \times 3}$

❒ **d.** $\frac{120}{2 \times 3}$

❒ **e.** $\frac{120}{4 \times 3 \times 5}$



vol. = 120 donc h =

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Réponses a., b. et d.

Il peut suffire de trouver un contre-exemple pour voir que c. et e. sont faux. Pour c., on peut imaginer un prisme droit dont la base est un triangle : le nombre de faces latérales sera 3.

Pour e., le même objet a 6 sommets alors que le total des 3 faces latérales et des 2 bases est 5.

Le d. est juste car le nombre de sommets est le double du nombre de faces latérales (donc il est plus grand).

2 Réponses d. et e.

Pour l'aire du disque de base, il faut multiplier π par le carré du rayon, et non du diamètre; si on multiplie π par le diamètre, il faut diviser par 4 pour obtenir l'aire.

L'aire latérale est un rectangle dont une dimension est la hauteur de l'objet, et l'autre dimension le périmètre du cercle (soit le produit de π par le diamètre).

3 Réponses b. et d.

Le nombre d'arêtes est le double du nombre de sommets de la base.

Pour avoir le nombre de sommets de la pyramide :

- on peut ajouter 1 au nombre de sommets de la base;
- on peut diviser le nombre d'arêtes par 2, puis ajouter 1.

4 Il s'agit de trouver le volume d'un cylindre de 18 cm de rayon et de 40 cm de haut.

$$V = \pi \times R^2 \times h = \pi \times 18^2 \times 40 = 12\,960\pi$$

soit environ 40 715 cm^3 qu'on convertit en 40,715 dm^3 ou litres.

5 Volume de la salle : $9 \times 6 \times 2{,}5 = 135$ m^3.

Nombre de personnes : $43 + 2 = 45$.

Volume d'air par personne : $135/45 = 3$ m^3, soit 3 000 litres.

6 Ne pas oublier d'exprimer tout avec la même unité.

30 cm = 3 dm; le rayon est 1,5 dm.

Le volume du cône est : $\dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \dfrac{\pi \times 1{,}5^2 \times 7}{3} = 16{,}5$ dm^3 environ.

Le poids du pain de sucre est donc : $1{,}6 \times 7{,}5 = 12$ kg.

7 Le prix du mètre carré de zinc suggère que c'est l'aire latérale du tuyau cylindrique qu'il faut calculer et non un volume.

$$2\pi \times R \times h = 2 \times \pi \times 0{,}15 \times 15 = 14{,}137 \text{ m}^2 \text{ environ}$$

Prix à payer : $80 \times 14{,}137 = 1\,130{,}97$ €.

8 Le volume du bol est celui d'une demie sphère, soit :

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2 \times \pi \times 7^3}{3} = 718 \text{ cm}^3 \text{ environ,}$$

soit 0,718 L ou encore 71,8 cL.

Niveau 2

9 Réponses a. et b.

Pour toutes les autres réponses, on trouve des faces opposées dont le total n'est pas 7.

10 **Réponse c.**

Le théorème de Pythagore appliqué sur une face donne une diagonale de $\sqrt{2}$, puis la grande diagonale du cube est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont 1 et $\sqrt{2}$, et son carré vaut donc $1 + 2 = 3$; la grande diagonale du cube de côté 1 vaut $\sqrt{3}$.

11 **Réponses d. et e.**

Le volume est $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{AB^3}{8} = \pi \times \frac{AB^3}{6}$ soit la réponse e.

L'aire mesure $4 \times \pi \times R^2 = 4 \times \pi \times \frac{AB^2}{4} = \pi \times AB^2$ soit la réponse d.

12 **Réponses b. et c.**

Volume du cube : $6^3 = 216$ cm^3

Volume du prisme = aire de base × hauteur = $\frac{6 \times 9}{2} \times L = 27$ L

27 L = 216 donc $L = \frac{216}{27} = 8$ cm. Donc b. et c. sont vraies.

13 D'abord : 2 h 15 min = 135 min

Volume d'eau : $36 \times 135 = 4\,860$ litres $= 4\,860\,000$ cm^3

Rayon du bassin : $4/2 = 2$ m $= 200$ cm

Aire de la base circulaire : $\pi \times R^2 = 40\,000\pi$ (cm^2)

Le volume d'eau s'obtient en multipliant l'aire de la base par une hauteur h donc celle-ci est égale au quotient du volume par l'aire :

$h = \frac{4\,860\,000}{40\,000\pi} = 38{,}7$ cm environ qu'on arrondit à 39 cm.

14 Le volume de l'objet est égal au volume d'eau déplacé; il correspond au volume d'un cylindre de hauteur 10 cm et de rayon 6 cm.

$$\pi \times R^2 \times h = \pi \times 6^2 \times 10 = 1\,130 \text{ cm}^3 \text{ environ}$$

15 Aire de la base $= 1{,}2 \times 0{,}8/2 = 0{,}48$ m^2.

Volume de la pyramide = (1/3) × aire de base × hauteur

$= (1/3) \times 0{,}48 \times 2{,}5 = 0{,}4$ m^3 $= 400$ dm^3

Poids de pierre : $3 \times 400 = 1\,200$ kg.

16 Soit h la profondeur en cm du verre.

$$14{,}14 \text{ cL} = 141{,}4 \text{ cm}^3$$

Volume du cône en cm^3 : $\dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \dfrac{\pi \times 9h}{3} = 3\pi h$

Donc $3\pi h = 141{,}4$ et $h = \dfrac{141{,}4}{3\pi} = 15$ cm environ, soit 15 mm.

17 La surface latérale du clocheton est celle de 6 triangles identiques de base 0,80 m et de hauteur 1,75 m (l'apothème de la pyramide).

On trouve : $6 \times (0{,}8 \times 1{,}75)/2 = 42$ m^2.

Niveau 3

18 Aire de la coupe trapézoïdale :

$$(B + b) \times h/2 = (1 + 2{,}93) \times 0{,}34/2 = 0{,}6681 \text{ m}^3$$

Le béton occupe la forme d'un prisme dont la hauteur est aussi la largeur de la rampe, soit 2 m.

Volume du béton (prisme) = aire de base × hauteur

$= 0{,}668\,1 \times 2 = 1{,}336\,2$ m^3

19 Aire de la cour : $42 \times 25 = 1\,050$ m^2.

Nombre de tombereaux nécessaires : $240/5 = 48$.

Volume total des tombereaux : $48 \times (3/4) = 36$ m^3.

Le volume du sable de hauteur x est : $1\,050x = 36$.

donc $x = 36/1\,050$ soit environ 0,034 m ou 34 mm.

20 Le périmètre du cercle de base est : $2 \times 12 \times \pi = 24\pi$.

Aire latérale du cylindre : $2\,\pi \times R \times h = 2 \times 12 \times \pi \times 3 = 72\pi$

L'aire latérale du cône est celle d'un morceau de disque. Le périmètre de ce morceau de disque doit s'enrouler parfaitement sur le périmètre du disque de base, ce n'est donc pas le périmètre d'un cercle de 15 m de rayon (qui vaut $2 \times 15 \times \pi = 30\pi$), mais une partie. Laquelle ?

C'est la fraction : $(24\pi)/(30\pi)$ soit 4/5.

L'aire latérale du cône est les quatre cinquièmes de l'aire d'un disque de rayon 15 m, soit :

$$(4/5) \times \pi \times R^2 = (4/5) \times \pi \times 15^2 = 180\pi$$

Aire totale de la tente : $72\,\pi + 180\pi = 252\,\pi$. On trouve environ 791 m^2.

Il y avait intérêt à conserver la lettre π pour les calculs, et la remplacer seulement à la fin (aire totale) par une valeur approchée.

21 Réponses b., c. et d.

Le volume de l'objet est celui d'un pavé droit de dimensions 6, 6, 3 diminué de celui d'un cube de côté 3.

On trouve donc : $6 \times 6 \times 3 - 3 \times 3 \times 3 = 108 - 27 = 81$ cm^3.

Les réponses b., c. et d. sont justes.

22 **Réponses b., c. et e.**

Le volume d'un cylindre est donné par la formule : $\pi \times R^2 \times h$.

Le volume hachuré est la différence de deux volumes de cylindres de rayons 5 cm et 3 cm, ayant la même hauteur 10 cm.

On trouve donc : $\pi \times 5^2 \times 10 - \pi \times 3^2 \times 10$. C'est la réponse b.

Mais en calculant on trouve que cela vaut : $\pi \times 160$, et on obtient alors les propositions c. et e.

23 **Réponses c. et d.**

L'aire de la sphère est donnée par la formule : $4 \times \pi \times R^2$.

Le volume de la sphère est donné par la formule : $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

Si on double le rayon, l'aire est multipliée par $2^2 = 4$ et le volume est multiplié par $2^3 = 8$.

Le volume de la grosse sphère vaut 8 fois celui de la petite.

L'aire de la grosse sphère vaut 4 fois celle de la petite.

24 **Réponses b. et d.**

Soit h la hauteur d'eau.

Volume d'eau = aire de base × hauteur = $2 \times h = 10$ (en m^3).

On en tire $h = 5$ m. La hauteur de la cuve est donc : $5 + 2 = 7$ m.

On trouve ce résultat dans deux propositions.

25 **Réponse c.**

Comme $36/6 = 6$ on peut imaginer que dans la longueur de 36 cm il rentre 6 cubes de 6 cm de côté, dans la largeur de 36 cm il rentre 6 cubes de 6 cm, et de même 6 cubes dans la hauteur.

Finalement il rentre : $6 \times 6 \times 6 = 216$ petits cubes.

On peut aussi imaginer un cube dont les dimensions sont multipliées par 6 et donc dont le volume est multiplié par le cube de 6 soit 216.

26 **Réponses b. et d.**

La base est un triangle rectangle d'aire $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ cm^2.

Le volume vaut : $6 \times h = 120$ donc $h = \frac{120}{6} = 20$ cm. C'est la valeur du b., mais attention, la réponse d. donne le même résultat.

Distances, vitesses, temps, débits… 16

L'essentiel à retenir

- Lorsque dans un mouvement la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet, le coefficient de proportionnalité s'appelle la **vitesse moyenne**.
- Une vitesse s'exprime généralement en kilomètres par heure ou en mètres par seconde, unités qu'on note km/h ou $km \cdot h^{-1}$, et m/s ou $m \cdot s^{-1}$.
- La **distance** parcourue d s'exprime en fonction de la durée du trajet t et de la vitesse moyenne v par la formule : $\mathbf{d = v \times t}$.

Comment calculer une distance ?

> Exemple
>
> Un TGV roule à 250 km/h pendant 1 h 30 min, quelle est la distance parcourue ? 1 h 30 min = 1,5 h et $d = 250t$, la distance recherchée est : $250 \times 1{,}5 = 375$ km.

Comment calculer une durée ?

> Exemple
>
> Un cycliste parcourt 56 km à 28 km/h de moyenne, pendant combien de temps a-t-il roulé ? $d = v \times t$ donc $t = \frac{d}{v}$. Ici $t = \frac{56}{28} = 2$. Le cycliste a roulé 2 heures.

Comment calculer une vitesse ?

> Exemple
>
> Un chauffeur routier a parcouru 315 km en 4 h 30 min. Quelle est sa vitesse moyenne ? $d = v \times t$ donc $v = \frac{d}{t}$. Ici, t = 4 h 30 min = 4,5 heures donc $v = \frac{315}{4{,}5} = 70$ km/h.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Un train fait 1 800 m en 1 min 30 s, quelle est sa vitesse en km/h ?

2 Un cavalier parcourt 600 m à la minute. Il part de chez lui à 10 h 15 min, et s'arrête faire une pause au bout de 12 km. Quelle heure est-il ?

3 Un robinet coule dans un bassin de 12 hL, et y verse 25 litres par minute. Combien de minutes mettra-t-il pour le remplir ?

4 Ce 21 juin, le soleil s'est levé à 3 h 48 min et s'est couché à 19 h 56 min. Le 21 décembre, le soleil s'était levé à 7 h 44 min et couché à 15 h 55 min. De combien la durée du jour solaire du 21 juin dépasse-t-elle celle du 21 décembre ?

5 Un laboureur a fait 105 sillons de 48 m chacun. Combien de temps lui a-t-il fallu s'il trace par minute un sillon de 36 m de long ?

6 Ce jour, les heures de la marée haute au Havre seront 9 h 30 min et 21 h 45 min. Quels seront les horaires de marée haute dans une ville jumelée où il faut ajouter 6 h 40 min aux horaires précédents ?

7 Une personne part en auto à 13 h 10 min et arrive à 17 h 36 min, après avoir fait deux arrêts de 12 minutes chacun. Elle a roulé en moyenne à 60 km/h. Quelle distance a-t-elle parcouru ?

8 Les roues d'une locomotive de triage ont 70 cm de rayon. Elles font 200 tours par minute. Quelle distance la locomotive parcourt-elle en une heure et demie ?

9 Le défilement des images au cinéma est de 24 images par seconde, donc on voit…

❒ **a.** 1 440 images en 1 h
❒ **b.** 2 440 images en 1 h
❒ **c.** 1 image en 0,4 s
❒ **d.** 21 600 images en un quart d'heure
❒ **e.** 129 600 images en 1 h 30 min

10 Un cycliste fait régulièrement 18 km en une heure. Il est parti à 7 heures et quart et arrivé à 10 heures trois quarts. Quelle distance a-t-il parcouru ?

❒ **a.** 54 km ❒ **b.** 180 km ❒ **c.** 63 km ❒ **d.** 130,5 km ❒ **e.** 324 km

11 Dans les années 1950, la locomotive BB 9004 avait battu le record mondial en atteignant la vitesse de 92 m/s. L'équivalent en km/h est :

❒ **a.** 519 km/h
❒ **b.** 476 km/h
❒ **c.** 331,2 km/h
❒ **d.** 304 km/h
❒ **e.** 298,4 km/h

Niveau 2

12 Deux facteurs ont la même tournée de 23 km alternativement. L'un met 4 heures pour la faire, l'autre 5 heures. Combien de mètres le plus rapide fait-il de plus que l'autre en une heure ?

13 Les roues d'une bicyclette ont fait 392,4 m en 180 tours. Combien de mètres parcourent-elles en une minute, si elles font 100 tours à la minute ?

14 Un piéton et un cycliste partent du même endroit et dans la même direction au même moment. Le cycliste roule à 14,5 km/h pendant 3 heures et s'arrête là. Le piéton marche pendant 7 heures à la vitesse de 5,4 km/h : combien de mètres le séparent-ils alors du cycliste ?

15 Un piéton a parcouru 4 500 m. Sachant qu'il fait en une minute 100 pas de 75 cm chacun, trouvez pendant combien de temps il a marché.

16 Une voiture de course automobile gagnait le prix d'Italie en 1921 en parcourant 519 kilomètres en 3 h 35 min 9 s. Quelle avait été sa vitesse moyenne en km/h, arrondie à une décimale ?

17 Un robinet remplit en 2 heures les 5/8 de la contenance d'un bassin. Combien de temps mettra-t-il encore pour remplir le bassin ?

18 Une montre mise à l'heure à midi retarde de 15 secondes par heure. Quelle heure marquera-t-elle lorsqu'il sera minuit ?

19 Une masse de plomb pesant 1 200 g est plongée dans un vase entièrement rempli d'eau. Elle fait s'écouler 96 cm^3 de liquide. Quelle est la masse volumique de ce plomb en g/cm^3 ?

20 Un vase vide pèse 500 g. Plein d'eau de mer il pèse 8,225 kg, mais plein d'eau ordinaire il pèse 8 kg. Quelle est la densité de l'eau de mer ?

21 Quel est en centilitres par seconde le débit d'une fontaine qui remplit les deux tiers d'un seau de 15 litres en 40 secondes ?

❒ **a.** 60 cL/s ❒ **b.** 250 ❒ **c.** 37,5 ❒ **d.** 25 ❒ **e.** 75

22 Un avion a fait 1 300 km en 3 h 15 min. Quelle est sa vitesse moyenne ?

❒ **a.** 350 km/h ❒ **c.** 450 km/h ❒ **e.** 412,698 km/h
❒ **b.** 400 km/h ❒ **d.** 480 km/h

23 Un automobiliste a parcouru 285 km à la vitesse moyenne de 72 km/h. Quelle est la durée du parcours, en heures, minutes, secondes ?

❒ **a.** 4 heures ❒ **c.** 3 h 30 min 40 s ❒ **e.** 3 h 45 min
❒ **b.** 3 h 57 min 30 s ❒ **d.** 4 h 5 min 18 s

24 Voici les indications de bord d'une auto, au départ et à l'arrivée du voyage…

	départ	arrivée
compteur kilométrique	38 735	39 085
montre	13 h 50 min	18 h
essence	40 L	5 L

La consommation d'essence aux 100 km est :

❒ **a.** 8 L ❒ **b.** 9 L ❒ **c.** 9,5 L ❒ **d.** 10 L ❒ **e.** 10,5 L

25 Un avion vole à la vitesse de 400 km/h par rapport à l'air. Pendant les 500 km de son voyage aller, il a de face un vent de 40 km/h ; au retour, il a le même vent dans le dos. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

❒ **a.** 390 km/h ❒ **c.** 398 km/h ❒ **e.** 450 km/h
❒ **b.** 396 km/h ❒ **d.** 400 km/h

Niveau 3

26 Un skieur de fond a calculé que s'il skie à 10 km/h de moyenne, il arrivera à destination à 13 heures. Mais s'il skie à 15 km/h de moyenne, il arrivera à destination à 11 heures. À quelle vitesse moyenne doit-il skier pour toucher son but à midi ?

❒ **a.** 11,5 km/h ❒ **c.** 12,5 km/h ❒ **e.** 13,5 km/h
❒ **b.** 12 km/h ❒ **d.** 13 km/h

27 J'ai 200 m d'avance, je cours à 20 km/h ; le bus va deux fois plus vite…

❒ **a.** il me rattrapera en 12 secondes ❒ **d.** il me rattrapera sur 100 m
❒ **b.** il me rattrapera sur 200 m ❒ **e.** il me rattrapera en 18 secondes
❒ **c.** il me rattrapera sur 400 m

28 Une montre qui avance de 6 minutes par jour est mise à l'heure à 9 heures. Quelle heure est-il, à la demi-seconde près, quand elle marque 17 heures ?

29 Deux cyclistes vont à la rencontre l'un de l'autre, le premier fait du 18 km/h et le second du 22 km/h. Si au moment identique où ils démarrent ils sont séparés de 54 km, au bout de combien de temps se rencontreront-ils ?

30 Deux piétons situés dans des villes distantes de 22,5 km partent au même moment à la rencontre l'un de l'autre ; le premier fait 5 km/h ; ils se rencontrent au bout de 3 heures de marche. Quelle est la vitesse du deuxième piéton ?

31 Un robinet placé en haut d'un bassin le remplirait en 9 heures, tandis qu'une vanne placée à la base le viderait en 15 heures. Le bassin est vide. On ouvre alors le robinet et la vanne, au bout de combien de temps le bassin sera-t-il rempli ?

32 Un TGV et un train Express partent en même temps, le premier de Paris, l'autre d'Orléans distante de 120 km, et ils vont dans la même direction Sud. Le TGV fait en moyenne 240 km/h et l'express 90 km/h. Au bout de combien de temps le TGV rattrapera-t-il l'Express ?

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 On sait que : 1 min 30 s = 1,5 min et que v = d/t.

Ici la vitesse est : 1 800/1,5 = 1 200 m/min, soit en mètres par heure : 60 × 1 200 = 72 000 m/h ou encore 72 km/h.

2 D'abord 12 km = 12 000 m. La durée de la cavalcade est : 12 000/600 = 20 minutes. L'heure de l'arrêt est : 10 h 15 min + 20 min = 10 h 35 min.

3 On a 12 hL = 1 200 L.

Le temps mis pour remplir le bassin est : 1 200/25 = 48 minutes.

4 Durée du jour solaire le 21 juin : 19 h 56 – 3 h 48 = 16 h 8 min.

Durée du jour solaire le 21 décembre : 15 h 55 – 7 h 44 = 8 h 11 min.

Différence de durée des deux jours solaires :

16 h 8 min – 8 h 11 min = 7 h 57 min

5 Longueur des sillons : 105 × 48 = 5 040 m.

Temps mis en minutes : 5 040/36 = 140 min soit 2 h 20 min.

6 9 h 30 min + 6 h 40 min = 16 h 10 min

21 h 45 min + 6 h 40 min dépassant 24 heures, on enlève 24 heures, et on obtient le lendemain à 4 h 25 min.

7 L'auto a roulé pendant : 17 h 36 – 13 h 10 – (2 × 12 min) = 4 h 2 min.

Ceci représente (4 × 60 + 2)/60 heures ou 242/60 h.

À 60 km/h, l'auto a roulé pendant : 60 × 242/60 = 242 km.

8 Le périmètre d'une roue est 2 × π × R = 1,4 × π soit 4,398 m environ, et cela représente la distance dont on avance en un tour. En une minute, on multiplie par 200, et comme 1 h 1/2 = 90 min, la loco avance d'environ : $90 \times 4{,}398 \times 200 = 79\,164$ m soit 79,164 km dans cette période.

9 Réponses d. et e.

Il y a 24 images par seconde, donc : $24 \times 3\,600 = 86\,400$ images en une heure. Ou encore : $86\,400/4 = 21\,600$ images en un quart d'heure.

Et enfin : $86\,400 \times 1{,}5 = 129\,600$ images en une heure et demie.

10 Réponse c.

De 7 h ¼ à 10 h ¾ il s'est écoulé 3,5 h. La distance parcourue est :

$$d = v \times t = 18 \times 3{,}5 = 63 \text{ km}$$

11 Réponse c.

On sait que 1 m/s = 3,6 km/h, donc 92 m/s = $3{,}6 \times 92 = 331{,}2$ km/h.

Niveau 2

12 On rappelle que $v = d/t$. Première vitesse : $23/4 = 5{,}75$ km/h.

Deuxième vitesse : $23/5 = 4{,}6$ km/h.

En une heure le plus rapide fait : $5{,}75 - 4{,}6 = 1{,}15$ km de plus, soit 1 150 m.

13 La distance parcourue est proportionnelle à la vitesse ou au temps mis. Ici, elle est proportionnelle au nombre de tours de roues.

N nombre de km	392,4	
T temps mis pour faire…	180 tours	100 tours

$392{,}4 \times 100/180 = 218$. La bicyclette a avancé de 218 mètres en une minute.

14 Distance parcourue par le cycliste : $d = v \times t = 14{,}5 \times 3 = 43{,}5$ km.

Distance parcourue par le piéton : $5{,}4 \times 7 = 37{,}8$ km.

Distance les séparant : $43{,}5 - 37{,}8 = 5{,}7$ km soit 5 700 m.

15 En une minute, le piéton avance de : $100 \times 0{,}75 = 75$ m.

Durée de la marche : $4\,500/75 = 60$ minutes, soit une heure.

16 Convertissons 3 h 35 min 9 s en secondes. On trouve :

$$3 \times 3\,600 + 35 \times 60 + 9 = 12\,909 \text{ s}$$

Reconvertissons en heures, cela fait 12 909/3 600.

La vitesse en km/h est :

$$v = d/t = 519/(12\,909/3\,600) = 519 \times 3\,600/12\,909$$

soit environ 144,7 km/h.

17 Si les 5/8 du bassin sont remplis, il reste 3/8 à remplir, soit les 3/5 de ce qui a déjà été rempli. Le temps nécessaire en heures est donc :

$$2 \times 3/5 = 1{,}2 \text{ h} = 1 \text{ h} + 0{,}2 \text{ h} = 1 \text{ h} + (0{,}2 \times 60 \text{ min}) = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$$

18 De midi à minuit il y a 12 heures. En 12 heures la montre retarde de :

$$12 \times 15 \text{ secondes} = 180 \text{ s} = 3 \text{ min}$$

La montre retarde donc elle marque minuit moins 3 minutes, soit 23 h 57 min.

19 Le volume de plomb est 96 cm^3 pour une masse de 1 200 g.

La masse volumique est donc : 1 200/96 = 12,5 g/cm^3.

20 Masse d'eau de mer dans le vase : 8 225 g – 500 g = 7 725 g.

Masse d'eau douce dans le vase : 8 000 g – 500 g = 7 500 g.

Le même volume est occupé par 7 725 g d'eau de mer ou 7 500 g d'eau douce. La densité de l'eau de mer est : 7 725/7 500 = 1,03 (sans unité, comme toutes les densités).

21 Réponse d.

Les deux tiers de 15 litres font 10 litres, soit 1 000 cL. Ceci est obtenu en 40 secondes, donc en une seconde il coule : 1 000/40 = 25 cL.

22 Réponse b.

3 h 15 min c'est 3h ¼ ou 3,25 h. La vitesse est :

$$v = d/t = 1\,300/3{,}25 = 400 \text{ km/h}$$

23 Réponse b.

Le temps du trajet est t = d/v = 285/72 = (3 + 69/72) heures.

Mais 69/72 d'heures se convertissent en minutes ainsi :

$$60 \times 69/72 = 69/1{,}2 = 57{,}5$$

Le temps mis est donc 3 h 57 min 30 s.

24 Réponse d.

⚠ Les indications de la montre ne servent à rien dans cet exercice.

Par soustraction, on trouve une distance parcourue de 350 km avec 35 litres d'essence. Comme 350 km c'est 3,5 fois 100 km, la consommation est donc :

$$35/3{,}5 = 10 \text{ litres aux } 100 \text{ km}$$

25 Réponse b.

Quand l'avion fait face au vent, la vitesse du déplacement est la différence des vitesses soit 400 – 40 = 360 km/h.

Quand l'avion a le vent dans le dos, la vitesse du déplacement est la somme des vitesses soit 400 + 40 = 440 km/h.

Le temps mis à l'aller, en heure, est : 500/360 = 25/18.

Le temps mis au retour, en heure, est : 500/440 = 25/22.

Le temps total des trajets, en heure, est :

$$(25/18) + (25/22) = [(25 \times 22) + (25 \times 18)]/(22 \times 18) = 1\,000/396$$

Sur l'ensemble du trajet de 1 000 km, la vitesse moyenne est :

$$\text{distance/temps} = 1\,000/(1\,000/396) = 396 \text{ km/h}$$

Niveau 3

26 Réponse b.

Appelons t le temps, en heures, du trajet quand on arrive à 13 heures; alors le temps mis quand on arrive à 11 heures est seulement (t – 2); dans tous les cas, la distance parcourue est la même donc les produits « vitesse × temps » sont égaux : 10 t = 15 (t – 2) d'où 10 t = 15 t – 30, puis 30 = 5 t, et enfin t = 6 (en heures); la distance parcourue est donc : 10 × 6 = 60 km.

Si on veut arriver à midi, le temps mis ne sera que : 6 – 1 = 5 heures, ceci pour faire 60 km, donc la vitesse nécessaire sera : 60/5 = 12 km/h.

27 Réponse c.

Le bus rattrape 20 km en 1 h, soit 20 000 m en 1 h, ou encore 100 fois 200 m en 1 h. Pour que le bus rattrape seulement 200 m, il lui faut un centième d'heure, soit en secondes : 3600/100 = 36 secondes. Les réponses a. et e. sont donc fausses.

Le bus va deux fois plus vite que moi, donc quand je fais 200 m, il fait 400 m.

Sur 400 m, soit 200 m d'avance augmentés des 200 m que j'ai parcourus, il me rejoint. C'est la réponse c.

28 Temps de fonctionnement affiché par la montre : 17 – 9 = 8 h.

Quand elle affiche un fonctionnement de 24 h 6 min, le temps réel écoulé est seulement 24 heures. Donc (24 × 60) + 6 = 1 446 min indiquées ne font que 1 440 vraies minutes.

Ainsi 8 h = 480 min affichées ne font que : 480 × 1 440/1 446 min soit environ 478,008 3 min, ou 478 min + (60 s × 0,008 3), soit encore 478 min et une demi-seconde.

Il est donc non pas 17 h mais 16 h 58 min ½ s.

29 En une heure, les deux cyclistes se rapprochent de 18 + 22 = 40 km. Pour se rapprocher de 54 km, il leur faut un temps de : 54/40 = 1,35 h soit :

$$1 \text{ h} + (0{,}35 \times 60 \text{ min}) = 1 \text{ h } 21 \text{ min}$$

30 Ils se sont rapprochés de 22,5 km en 3 heures, soit 22,5/3 = 7,5 km par heure. La somme de leurs deux vitesses est donc 7,5 km/h. L'une des vitesses étant 5 km/h l'autre est : 7,5 – 5 = 2,5 km/h.

31 Le plus petit multiple commun de 9 et 15 est 45.

On a : 45 = 5 × 9 et 45 = 3 × 15. En 45 heures, sans écoulement, 5 bassins pourraient être remplis. En 45 heures, sans remplissage, 3 bassins pourraient être vidés.

En 45 heures de fonctionnement du robinet et de la vanne ensembles, on devrait avoir : $5 - 3 = 2$ bassins remplis.

Pour remplir un seul bassin dans ces conditions il faudrait donc :

$$45 \text{ heures}/2 = 22{,}5 \text{ heures, soit } 22 \text{ h } 30 \text{ min}$$

Autre méthode :

En une heure, on verse l'équivalent de 1/9 du volume du bassin et on en vide 1/15. Il reste : $1/9 - 1/15 = 6/135 = 2/45$ du volume du bassin. Pour remplir le bassin il faut donc l'inverse soit : $45/2 = 22{,}5$ heures ou 22 h 30 min.

32 En une heure, le TGV reprend : $240 - 90 = 150$ km.

Pour rattraper 120 km il lui faut :

$$1 \text{ h} \times 120/150 = 4/5 \text{ h} = 0{,}8 \text{ h} = 0{,}8 \times 60 \text{ min} = 48 \text{ min}$$

Dénombrement 17

L'essentiel à retenir

Piquets et intervalles

- Il y a toujours un piquet de plus que le nombre d'intervalles.

> **Exemple**
>
> Si vous bordez un côté de votre jardin, d'un longueur de 20 mètres, par un grillage accroché à des piquets séparés d'un mètre chacun, il vous faudra 21 piquets. Faites un dessin pour vérifier !

Restes possibles dans une division

- Si le diviseur est un nombre « d », le reste de la division peut prendre toutes les valeurs de 0 à « d – 1 ».

Permutation d'un ensemble fini

- Soit une liste des n éléments distincts d'un ensemble E ayant n éléments. Cette liste est une permutation de E.
- Le **nombre de permutations** de E est :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (3) \times (2) \times 1$$

- On appelle ce nombre factorielle n et on le note n !

$$n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

> **Exemple**
>
> Dans une course impliquant 7 chevaux, il y a $7\,! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$ classements différents possibles.

Liste d'éléments d'un ensemble fini

- Dans une liste, l'ordre des éléments est important.
- Deux listes comportant les mêmes éléments dans des ordres différents sont différentes.
- Quand on constitue une liste d'éléments choisis dans un ensemble :
  - si on peut écrire plusieurs fois le même élément, c'est comme un tirage dans une urne avec remise ;
  - sinon, c'est comme un tirage dans une urne sans remise.

Constituer une liste avec remise

- Dans le cas général du choix de p objets parmi n objets, **avec remise**, le **nombre de listes** possibles est n^p.

> Exemple
>
> Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire une boule, puis on la remet dans l'urne après avoir noté son numéro. On recommence trois fois de suite. Combien de différentes listes de numéros peut-on obtenir de cette façon ? Ici, le nombre d'objets est 10, et l'on en choisit 3. La réponse est donc $10^3 = 1000$ tirages différents.

Constituer une liste sans remise, dans l'ordre : arrangements

- Dans le cas général du choix de p objets distincts parmi n objets (donc sans **remise**), le **nombre de listes** est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

- On parle alors d'« **arrangements** ».

> Exemple
>
> Dans une course de 7 chevaux, combien de tiercés différents dans l'ordre peut-on obtenir ? Un cheval ne peut pas occuper deux places différentes, c'est donc un tirage sans remise. Il y a 7 possibilités pour la première place, 6 pour la seconde (car un cheval est déjà placé : il n'en reste plus que 6 possibles) et 5 pour la troisième (deux chevaux sont déjà placés). Le nombre de tiercés possibles est $7 \times 6 \times 5 = 210$.

Constituer une liste sans remise, dans le désordre : combinaisons

- Lorsqu'on ne s'intéresse pas à l'ordre des objets dans un arrangement (choix de p objets distincts parmi n objets), on parle de « **combinaison** ». Dans le cas général du choix de p objets distincts parmi n éléments, la formule est alors :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

> Exemple
>
> Dans la même course de 7 chevaux, on s'intéresse maintenant aux nombres de tiercés possibles dans l'ordre ou dans le désordre. Comme les situations ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA ne représentent qu'une seule et même combinaison (les trois mêmes chevaux dans des ordres différents), il faut diviser le nombre d'arrangements par le nombre de permutations possibles de cet arrangement. Ici, le nombre d'arrangements de 3 chevaux

parmi 7 est 210, le nombre de permutations de 3 chevaux est $3 \times 2 \times 1 = 6$, le nombre de combinaisons possibles est donc : $210/6 = 35$ tiercés dans le désordre différents.

- Avec la notation factorielle, le nombre de listes de p éléments distincts d'un ensemble ayant n éléments est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Dans un parc, une allée a 238 m de long. On plante à partir de chaque extrémité et de chaque côté des arbres distants l'un de l'autre de 7 m. Combien faudra-t-il d'arbres ?

2 Une route a 46,5 km. On place des bornes hectométriques du début à la fin. Combien en faut-il ?

3 Combien y a-t-il de dimanches au maximum dans une année ?

4 Marie a une poupée dont la garde-robe se compose de 2 bonnets, 4 jupes et 3 corsages.
De combien de façons différentes peut-elle habiller sa poupée ?

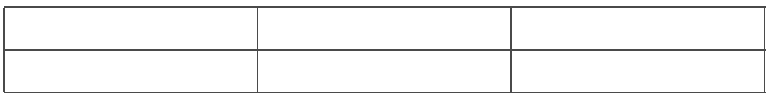
5 On dit qu'un écran de télévision est un 20 pouces pour exprimer que sa diagonale mesure 20 pouces. Combien peut-on faire tenir d'écrans de 20 pouces dans un écran de 60 pouces ?

❒ **a.** 9 ❒ **b.** 10 ❒ **c.** 18 ❒ **d.** 20 ❒ **e.** 30

6 Mon Papy vendéen dispose de 85 cubes de 1 cm d'arête. Je veux construire avec eux le plus grand cube possible. Combien de cubes resteront inutilisés ?

❒ **a.** 36 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** 21 ❒ **d.** 4 ❒ **e.** 31

7 Combien y a-t-il de rectangles dans ce dessin ?



❒ **a.** 6 ❒ **b.** 7 ❒ **c.** 18 ❒ **d.** 9 ❒ **e.** 11

Niveau 2

8 Je dois débiter mon vieil arbre abattu par la tempête. Papa m'a promis 5 € pour le scier en 3 morceaux, mais il a changé d'avis : il veut maintenant 6 morceaux. Combien devra-t-il me payer s'il respecte le même tarif pour chaque découpe ?

9 Le nombre des arbres qui bordent une route sur les deux côtés est de 244. Ces arbres sont éloignés de 8 m les uns des autres, et il y en a un à chaque extrémité de rangée. Quelle est la longueur de la route ?

10 J'ai posé sur une étagère de ma bibliothèque les aventures de Sherlock Holmes en 3 volumes de 500 feuilles chacun, donnant des pages numérotées de 1 à 1 500. Un ver s'est mis à ronger les feuilles, de la première page du premier volume non comprise jusqu'à la dernière page du troisième volume non comprise. Sans compter les couvertures en carton, combien de feuilles le ver a-t-il traversées ?

Le dessin ci-dessous montre les reliures titrées des 3 volumes sur l'étagère.

1 S.H.	2 S.H.	3 S.H.

11 On veut tapisser les murs d'une chambre rectangulaire avec des rouleaux de papier mesurant chacun 8 m de long sur 0,60 m de large. La pièce a 5 m de long, 4 m de large et 3 m de haut. Combien faut-il de rouleaux au moins, sachant qu'on peut faire des raccords sans problème de pertes ?

12 Vous ouvrez un vieux livre auquel il manque des pages. Sur la page de gauche, on lit page 24, sur la page de droite on lit page 37. Combien manque-t-il de feuilles entre les deux pages ?

❐ **a.** 13 ❐ **b.** 12 ❐ **c.** 6 ❐ **d.** 14 ❐ **e.** 7

13 Cette année qui n'est pas bissextile, le premier janvier tombe un lundi. Quel jour de la semaine est-on le premier avril ?

❐ **a.** dimanche ❐ **b.** lundi ❐ **c.** mardi ❐ **d.** mercredi ❐ **e.** samedi

14 Dans la famille Dupont, chaque enfant a au moins un frère et une sœur. Le nombre d'enfants dans la famille peut être…

❐ **a.** tout nombre supérieur ou égal à 3

❐ **b.** un nombre pair

❐ **c.** tout nombre supérieur ou égal à 4

❐ **d.** tout nombre supérieur ou égal à 5

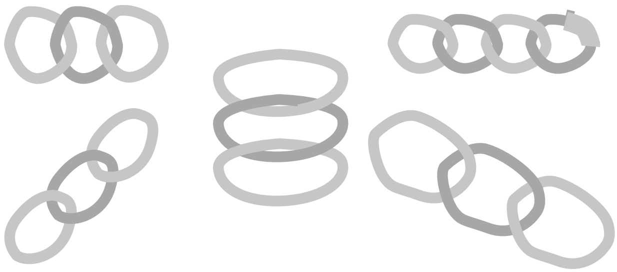
❐ **e.** tout nombre supérieur ou égal à 6

Niveau 3

15 On plante une vigne dans un terrain carré de 72 m de côté. Les ceps sont à 0,80 m du bord et à 0,80 m les uns des autres sur les rangées parallèles aux côtés. À 150 € le cent de plants, quelle est la dépense ?

(Les ceps ne s'achètent que par centaine)

16 J'apporte chez le bijoutier des chaînons en or composés de différents morceaux, l'un d'eux (en haut à droite) comportant un fermoir. Je veux faire fabriquer un chaînon unique avec tous les morceaux, et constituer un bracelet. Le bijoutier me dit : c'est 1 € pour un anneau à ouvrir et 1 € pour un anneau à ressouder. Combien vais-je payer, si le bijoutier est astucieux et honnête ?



17 On calcule le produit des 50 premiers nombres entiers (de 1 à 50). On le divise par 3 : le quotient est entier. On divise celui-ci par 3 : le nouveau quotient est entier. On continue ainsi les divisions par 3 à condition que le quotient obtenu soit entier. Quel est le nombre maximum de divisions par 3 qu'on a pu faire en tout ?

18 De combien de manières différentes peut-on ranger en files régulières un escadron de 360 cavaliers ?

(On ne retiendra pas les cas triviaux où il y a soit une seule file de 360 soit 360 files de 1)

19 Une caisse renferme 3 coffres. Chaque coffre contient 4 boîtes et chaque boîte 10 pièces d'or. La caisse, les coffres et les boîtes sont fermés par des cadenas. Combien faut-il ouvrir de cadenas pour obtenir 60 pièces d'or ?

❒ **a.** 7 ❒ **b.** 9 ❒ **c.** 11 ❒ **d.** 13 ❒ **e.** 15

20 On divise un entier m non nul par 20. Le reste est égal au quotient entier. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour m ?

❒ **a.** 0 ❒ **c.** une infinité ❒ **e.** 20

❒ **b.** 1 ❒ **d.** 19

21 On numérote toutes les pages d'un cahier : on utilise 37 chiffres en tout. Combien de pages constituent le cahier ?

❒ **a.** 17 ❒ **b.** 22 ❒ **c.** 24 ❒ **d.** 25 ❒ **e.** 28

22 Michel, Gilles, Mireille et Dominique se partagent 8 poires, chacun en ayant au moins une. De combien de façons différentes le partage peut-il se faire ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** 11 ❒ **d.** 23 ❒ **e.** 35

23 En écrivant tous les nombres de 100 à 999, combien de fois allons-nous écrire le chiffre 5 ?

❒ **a.** 250 ❒ **b.** 270 ❒ **c.** 271 ❒ **d.** 280 ❒ **e.** 292

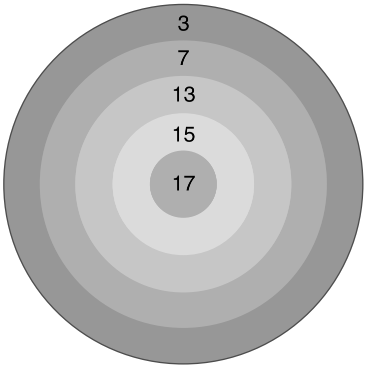
24 Par combien de zéros le produit de tous les nombres entiers de 1 jusqu'à 2010 se termine-t-il ?

❒ **a.** 223 ❒ **b.** 401 ❒ **c.** 402 ❒ **d.** 424

❒ **e.** un nombre plus grand que les précédents

25 Sur la cible ci-dessous on a tiré 9 fléchettes, et obtenu 120 points. Combien de fléchettes a-t-on mis à côté de la cible ?

❒ **a.** 0
❒ **b.** 1
❒ **c.** 2
❒ **d.** 3
❒ **e.** ça dépend



Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Le nombre d'intervalles de 7 m sur la longueur est : 238/7 = 34.

Le nombre d'arbres sur un côté est : 34 + 1 = 35.

Comme il y a les deux côtés de l'allée, le nombre d'arbres est :

$$2 \times 35 = 70 \text{ arbres}$$

2 On a 46,5 km = 465 hm.

Il faut une borne de plus que d'intervalles d'un hectomètre,

donc 465 + 1 = 466 bornes.

3 Dans 365 ou 366 jours il y a 52 semaines plus un ou deux jours. Il peut y avoir 52 + 1 = 53 dimanches au maximum (et 52 au minimum).

4 Le nombre de choix possibles est : $2 \times 4 \times 3 = 24$ choix. On peut faire un arbre de possibilités qui se démultiplie, en 2 branches au premier niveau, puis 4 au deuxième, et 3 au dernier niveau, et compter le nombre de chemins sur l'arbre.

5 Réponse a.

La diagonale correspond à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit la longueur et la largeur d'un rectangle.

On peut considérer qu'il y a 3 vieilles longueurs dans une nouvelle longueur et 3 vieilles largeurs dans une nouvelle largeur.

D'où $3 \times 3 = 9$ vieux rectangles dans un nouveau.

Résultat à rapprocher de : « Quand on multiplie les dimensions par 3 l'aire est multipliée par 9 ».

6 Réponse c.

Il faut trouver deux nombres qui sont des cubes et qui encadrent 85.

Comme $4^3 = 64$ et $5^3 = 125$ encadrent 85, on sait que le plus grand cube aura la contenance de 64 petits cubes, et il restera : $85 - 64 = 21$ petits cubes.

7 Réponse c.

La figure est constituée de six cases. On peut compter rigoureusement en cherchant le nombre des rectangles d'une case (6) de deux cases (7), de trois cases (2), de quatre cases (2), de six cases (1). On arrive au total de : $6 + 7 + 2 + 2 + 1 = 18$ cases.

Niveau 2

8 Attention : 3 morceaux cela veut dire qu'il y a eu 2 sciages, et 6 morceaux qu'il y en a eu 5. Le travail demandé a donc été multiplié par $5/2 = 2{,}5$.

Le travail doit donc être payé : $2,\ 5 \times 5 = 12{,}50$ €.

9 Sur chaque côté il y a : $244/2 = 122$ arbres.

Il y a un intervalle de moins que d'arbres donc 121 intervalles de 8 mètres.

La longueur de l'allée est : $8 \times 121 = 968$ m.

10 ! Attention à la position des 3 tomes l'un par rapport à l'autre, et à la place de la première page dans ce positionnement !

Le ver a rongé une couverture en carton du volume 1, puis une couverture en carton du volume 2, puis les 500 feuilles du volume 2, puis une couverture en carton du volume 2, une couverture en carton du volume 3, et s'est arrêté. Il a rongé 500 feuilles.

11 Le périmètre de la chambre est : $2\ (5 + 4) = 18$ m.

Le nombre de largeurs de rouleau est : $18/0{,}60 = 30$ largeurs.

La hauteur de la pièce étant 3 m, la longueur de papier nécessaire est : $3 \times 30 = 90$ m.

Le nombre de rouleaux de 8 m nécessaires est : $90/8 = 11{,}25$ qu'on arrondit à 12 rouleaux.

12 Réponse c.

De 25 à 36 cela fait 12 numéros. À raison de 2 par feuilles, il manque 6 feuilles.

13 Réponse a.

Comme $31 = 4 \times 7 + 3$ il y a un décalage de 3 jours entre janvier et février, de même entre mars et avril. Comme février a 28 jours, il n'y a pas de décalage entre février et mars.

Le premier janvier est un lundi, le premier février un jeudi (lundi + 3 = jeudi), le premier mars un jeudi aussi, et le premier avril un dimanche (jeudi + 3 = dimanche).

14 Réponses b., c., d. et e.

Si un garçon a au moins un frère et une sœur, il y a au moins deux garçons. De même si une fille a au moins un frère et une sœur il y a au moins deux filles. Les enfants sont au moins $2 + 2 = 4$. Le a. est faux (à cause du « 3 »), mais les autres situations sont possibles.

Niveau 3

15 Distance entre les deux ceps extrêmes : $72 - 2 \times 0{,}8 = 70{,}4$ m.

Nombre d'intervalles sur une longueur : $70{,}4/0{,}8 = 88$.

Nombre de ceps plantés sur une longueur : $88 + 1 = 89$.

Les ceps forment un carré, le nombre de ceps plantés est : $89^2 = 7\,921$.

On achète 80 centaines de plants ($80 \times 100 = 8\,000$) pour en avoir assez.

Le prix à payer est : $150 \times 80 = 12\,000$ €.

16 Dans un chaînon de 3 anneaux on ouvre les trois. Il reste 3 chaînons ABC de 3 anneaux et le chaînon de 4 avec son fermoir.

L'un des anneaux ouvert est refermé pour lier le dernier anneau opposé au fermoir avec le chaînon A : on a ainsi un morceau de $4 + 1 + 3 = 8$ anneaux.

Un deuxième anneau ouvert est refermé pour lier les chaînons B et C entre eux : on obtient un morceau de $3 + 3 + 1 = 7$ anneaux.

Le troisième anneau ouvert est utilisé pour relier entre eux les deux morceaux déjà constitués.

On obtient une chaîne de $8 + 1 + 7 = 16$ anneaux, que le fermoir permet de boucler en bracelet.

Le prix à payer est 6 euros pour 3 anneaux ouverts puis refermés.

17 De 3 à 48 il y a seize multiples de 3. Mais parmi eux se glissent des multiples de 9 (ce sont 9, 18, 27, 36, 45) qui vont apporter chacun un deuxième facteur 3 supplémentaire, et encore 27 qui va apporter un troisième facteur 3.

En tout il y a $16 + 5 + 1 = 22$ facteurs 3 dans le produit des cinquante nombres.

18 Il est judicieux de chercher les diviseurs de 360.

$$\begin{aligned} 360 &= 360 \times 1 = 2 \times 180 = 3 \times 120 = 4 \times 90 \\ &= 5 \times 72 = 6 \times 60 = 8 \times 45 = 9 \times 40 = 10 \times 36 = 12 \times 30 \\ &= 15 \times 24 = 18 \times 20 \end{aligned}$$

Les diviseurs autres que 1 et 360 (rejetés par l'énoncé) sont dans l'ordre :

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180

On obtient 22 façons de disposer les chevaux.

On aurait pu décomposer 360 en produit de nombres premiers :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Les diviseurs s'obtiennent en développant le produit :

$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$ $(1 + 3 + 3^2)$ $(1 + 5)$ ce qui représente $4 \times 3 \times 2 = 24$ termes. On enlève 1 et 360, il reste 22 termes.

19 Réponse b.

Pour avoir 60 pièces il faut ouvrir 6 boîtes de 10, donc un coffre de 4 boîtes et un deuxième coffre pour 2 boîtes, sans oublier la caisse pour avoir 2 coffres.

Total des cadenas nécessaires : $1 + 2 + 4 + 2 = 9$.

20 Réponse d.

Quand on divise par 20 il y a 20 restes possibles de 0 à 19. Le reste 0 donnerait un quotient égal lui aussi à 0, puis $m = 0$ ce qui est impossible d'après l'énoncé. Il n'y a donc que 19 restes possibles, de 1 à 19.

On peut vérifier que : $21 = 20 \times 1 + 1$, puis $42 = 20 \times 2 + 2$, etc. jusqu'à :

$$399 = 20 \times 19 + 19$$

21 Réponse c.

Pour écrire de 1 à 9 il faut 9 chiffres. Pour écrire de 10 à 19 il faut $2 \times 10 = 20$ chiffres. Pour écrire de 20 à 23 il faut $2 \times 4 = 8$ chiffres supplémentaires ce qui porte le total à $9 + 20 + 8 = 37$.

Rappelons que chaque feuille a un recto et un verso et donc que le nombre de pages numérotées devrait être pair (si toutes les pages étaient numérotées). Il ne peut y avoir 23 pages, il en faut au moins 24.

22 Réponse e.

Chacun ayant au moins une poire, il y en a 4 d'attribuées tout de suite, et il en reste 4 à partager entre 4 personnes.

On peut le faire selon diverses combinaisons :

0004 de quatre façons différentes selon qui a les 4.

0013 de douze façons différentes (4 places pour le 3, puis 3 places pour le 1, soit $4 \times 3 = 12$ façons).

0022 de six façons (0022, 0202, 2002, 2020, 2200, 0220).

0112 de douze façons (4 places pour le 2, trois places pour le 0 d'où $4 \times 3 = 12$).

1111 d'une seule façon.

Au total : $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ façons.

23 Réponse d.

Nombres finissant par 5 et ayant un seul 5 :

de 105 à 145 : 5 nombres ;

de 165 à 195 : 4 nombres;

de 150 à 154 : 5 nombres;

155 : un nombre avec deux chiffres 5;

de 156 à 159 : 4 nombres.

Le total pour les nombres de 100 à 200 est : $5 + 4 + 5 + 2 + 4 = 20$ fois.

C'est identique de 205 à 295 : 20 fois, de 305 à 395 aussi, de 405 à 495; de 605 à 695, de 705 à 795, de 805 à 895, de 905 à 995.

Pour la série de 500 à 599, compter 100 fois le chiffre 5 en centaine, en plus des 20 chiffres 5 finaux. Donc 120 fois.

Total pour la tranche jusqu'à mille : $160 + 120 = 280$ fois.

24 Réponse e.

De 1 à 2010, les nombres qui ont zéro comme chiffre des unités sont 201 car ils vont de 10 en 10, à partir de 1 fois 10 qui fait 10 jusqu'à 201 fois 10 qui fait 2 010; parmi eux (les nombres finissant par zéro) ceux qui ont un zéro comme chiffre des dizaines sont 20, depuis 100 qui fait 1 fois 100 jusqu'à 2000 qui fait 20 fois 100; parmi les nombres finissant par 00 ceux qui ont un zéro comme chiffre des centaines sont 2, ce sont 1 000 et 2 000; cela fait déjà $201 + 20 + 2 = 223$ zéros qui se retrouveront dans l'écriture du résultat.

Il ne faut pas oublier maintenant que le zéro peut être fabriqué à partir de la multiplication d'un nombre finissant par 5 par un nombre pair puisque $5 \times 2 = 10$, ou $5 \times 4 = 20$, ou $5 \times 6 = 30$, etc. finissent par 0; chaque nombre finissant par 5 trouvera un nombre pair utile pour lui faire fabriquer par produit un zéro, car les nombres pairs sont plus nombreux que les nombres finissant par 5; le nombre de nombres se terminant par 5 est 201, depuis 5, 15, 25… jusqu'à 2005, il suffit de compter le nombre de dizaines à gauche devant le 5, de 0 jusqu'à 200; donc on aura 201 zéros de plus par ce procédé; au total on obtient $223 + 201 = 424$ zéros.

Le 5 peut intervenir dans le produit autrement que par sa position en chiffre des unités. Par exemple dans $125 = 5 \times 5 \times 5$ il intervient deux fois de plus, et grâce à deux nombres pairs parmi les 2 010 nombres cela donnera $2 \times 5 = 10$ donc deux zéros de plus. Il faudrait étudier les multiples de 25, de 125, de 625 dans le produit pour voir combien de zéros ils peuvent apporter en plus. On peut affirmer que le nombre total de zéros dépasse 424 sans faire de calcul précis, et dire que le e. est la bonne réponse.

25 Réponse b.

Avec une flèche dehors et huit flèches sur la cible il y a plusieurs façons de faire 120 (8×15, ou $5 \times 17 + 15 + 13 + 7$, ou $6 \times 17 + 3 + 15$). Par contre on ne peut arriver au total de 120 avec deux flèches dehors sur les neuf, ou davantage (car $7 \times 17 = 119$).

Prouver que le **a.** n'est pas possible est long et fastidieux (essais successifs infructueux) : c'est le genre de QCM où être consciencieux fait perdre beaucoup de temps !

Équations 18

L'essentiel à retenir

- **Résoudre une équation d'inconnue x**, c'est trouver par quel(s) nombre(s) il faut remplacer la lettre x dans une phrase mathématique contenant une égalité pour que celle-ci soit vraie.
- Le(s) nombre(s) est (sont) alors appelé(s) solution(s) de l'équation.

> Exemple
>
> Soit l'équation $3x + 5 = 2x + 7$; le nombre 2 est solution car si on remplace x par 2 on obtient $(3)(2) + 5 = (2)(2) + 7$, et en effet $11 = 11$ est vrai. Par contre si x est différent de 2, on a une phrase fausse.

⚠ Certaines équations n'ont pas de solution.

> Exemple
>
> $0x = 2$ n'a pas de solution car pour toute valeur mise à la place de x, le calcul de $0x$ donnera toujours 0 et jamais 2.

⚠ Certaines équations ont une infinité de solutions.

> Exemple $0x = 0$ est vrai pour tout nombre x car $0\,x$ fera toujours 0.

Comment résoudre une équation ?

On la transforme par étapes, pour aboutir à une équation de la forme $x = \mathrm{a}$ ou $0x = \mathrm{a}$ (où a est un nombre concret). Pour cela, il est possible :

- de simplifier chacun des membres de l'équation;
- d'ajouter ou de soustraire un même nombre aux deux membres;
- de multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

> Exemple
>
> $8x - 6 = 5x + 2$. On ajoute 6 aux deux membres et on leur enlève $5x$ d'où : $8x - 6 + 6 - 5x = 5x + 2 + 6 - 5x$. On a $3x = 8$, et $x = 8/3$

Comment mettre en équation un problème pour pouvoir le résoudre ?

> **Exemple**
>
> Dans ma bibliothèque, il y a plusieurs étagères de même taille. Si je range 15 livres sur chaque étagère, il restera de la place pour les prochains 10 livres que j'achèterai. Si je range 13 livres par étagère, je n'ai pas rangé tous mes livres : il m'en reste 10 en main !

Combien y a-t-il d'étagères ?

- **Commençons par choisir une inconnue**. C'est le plus souvent le nombre cherché, ici appelons x le nombre d'étagères. Ne pas oublier de préciser les conditions : ici, x est un entier positif.
- **Traduisons les informations de l'énoncé en fonction de x** (à l'aide de x) : le nombre de livres est $15x$, la contenance des étagères est $15x + 10$, et $13x$ est égal au nombre de livres diminué de 10.
- **Trouvons une équation** : $13x = (15x) - 10$
- **Résolvons l'équation** : $13x + 10 - 13x = 15x - 10 + 10 - 13x$, puis $10 = 2x$ et $x = 5$; **concluons** : il y a 5 étagères.
- On peut **vérifier** le résultat en revenant à l'énoncé. On peut parfois constater que des données n'ont pas servi. Trier les informations utiles et ne pas tenir compte des informations superflues fait partie du jeu…

Équations produits

- Si un produit de deux facteurs est nul, alors un des facteurs au moins est nul. Pour tous nombres a et b, si ab = 0 alors a = 0 ou b = 0.

> **Exemple**
>
> Résoudre l'équation : $(3x - 12)(x + 5) = 0$. Si ce produit est nul alors $3x - 12 = 0$ ou $x + 5 = 0$. Deux solutions : $4; -5$.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

- Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme : $\{ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'\}$ avec a, b, c, a′, b′, et c′ nombres donnés.
- **Résoudre** un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver le couple des valeurs (x; y) pour lequel les deux équations sont vérifiées simultanément.

⚠ Dans un couple de nombres (x; y), l'ordre des termes est important.

Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues ?

- **Première méthode** : combiner des lignes après les avoir éventuellement multipliées par certains coefficients, de façon à éliminer une des deux inconnues soit par addition, soit par soustraction de deux lignes.
- **Deuxième méthode** : on substitue (on remplace) une inconnue par son expression en fonction de l'autre, de façon à obtenir une équation à une seule inconnue.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Un marchand achète des chevaux pour 191 400 €.
Il les revend 203 000 €, et gagne ainsi en moyenne 2 900 € par cheval.
Combien en avait-il acheté ?

2 Un DVD coûte autant que 4 revues de jeux. Sachant qu'on a payé un DVD et une revue 28 €, trouver le prix du DVD.

3 Un amateur achète deux casse-tête pour 94 €. L'un est pourvu d'une boîte et vaut 8 € de plus que l'autre. Combien coûte le plus cher ?

4 Deux fermiers ont acheté ensemble 49 moutons. L'un a acheté 5 moutons de moins que l'autre et payé 3 300 €. Quelle est la somme payée par l'autre ?

5 Une somme de 240 € est formée d'un nombre égal de billets de 5 € et de 10 €. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

6 On a deux pièces d'étoffe de même qualité : la première a coûté 75 € et la deuxième, qui contient 4 m de plus a coûté 83 €. Quelle est la longueur totale des deux pièces réunies ?

7 Quel nombre faut-il mettre à la place du point d'interrogation, si l'on veut que : $3 \times ? - 7 = 11$… ?

8 $\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$. C'est possible lorsque…

❒ **a.** $a = 1$ ❒ **b.** $a = 0$ ❒ **c.** $a = 2$ ❒ **d.** $a = 4$ ❒ **e.** $a = -2$

9 Si $\frac{-3x}{5} = \frac{-3}{4}$, alors…

❒ **a.** c'est que $x = 4$ ❒ **c.** c'est que $x = \frac{4}{5}$ ❒ **e.** c'est que $x = \frac{5}{4}$

❒ **b.** c'est que $x = 5$ ❒ **d.** c'est que $x = -\frac{5}{4}$

Niveau 2

10 Un notaire partage un héritage de 17 500 €. Les frais s'élèvent au septième. Sachant que la part de chaque héritier est 1 875 €, trouver combien il y en avait.

11 Partager 315 € en trois personnes de manière que la première ait trois fois plus que la deuxième, et que la deuxième ait deux fois plus que la troisième.

12 Un père a 53 ans et son fils 17 ans. Il y a un certain nombre d'années l'âge du père était le quadruple de celui du fils… C'était il y a combien de temps ?

13 Trouver la valeur du point d'interrogation dans l'égalité : $\frac{38}{4 + 5 \times ?} = 2$.

14 Six personnes devaient payer ensemble la note du restaurant : 330 €. Certains d'entre eux ont oublié leur carte de paiement. Chacune des personnes pouvant payer verse 82,50 €. Combien de personnes n'ont pas payé ?

15 Un grand frère a 18 ans et sa sœur 7 ans. Dans combien d'années la sœur aura-t-elle exactement la moitié de l'âge de son frère ?

16 La solution de l'équation : $4x = 3(10 - x)$ est…

❒ **a.** 23 ❒ **b.** 6 ❒ **c.** $\frac{30}{7}$ ❒ **d.** $-\frac{30}{7}$ ❒ **e.** $\frac{7}{30}$

17 Les solutions de l'équation $(x + 1)(x - 3) = -3$ sont…

❒ **a.** – 1 et 3 ❒ **b.** – 4 et 0 ❒ **c.** 0 et 2 ❒ **d.** 0 et 1 ❒ **e.** – 2 et 0

Niveau 3

18 Des amies achètent un cadeau d'anniversaire à une autre.

Si elles donnent chacune 20 €, il manquera 10 € ; il y aura au contraire 25 € de trop si elles donnent chacune 25 €. Combien d'amies participent à la collecte ?

19 Une société organise un banquet de 42 couverts coûtant 25 € l'unité. Un certain nombre d'invités n'ont pas à payer, ce qui majore le prix du repas de ceux qui paient de 5 €.

Combien de personnes ont été invitées gracieusement ?

20 J'ai 3 fois l'âge que tu avais il y a 6 ans, quand tu avais 4 ans de moins que moi…

❒ **a.** tu as 4 ans ❒ **c.** tu as 6 ans ❒ **e.** tu as 8 ans

❒ **b.** tu as 12 ans ❒ **d.** tu as 11 ans

21 Pour 5 livres et 28 sols, j'ai 5 sols de plus qu'avec 3 livres et 63 sols.

❒ **a.** la livre vaut 100 sols ❒ **d.** la livre vaut 20 sols

❒ **b.** la livre vaut 10 sols ❒ **e.** la livre vaut 6,50 sols

❒ **c.** la livre vaut 12 sols

22 Si 4 livres et 5 revues sont aussi épais que 2 livres et 20 revues, et si une revue a 26 mm d'épaisseur de moins qu'un livre, alors une revue a…

❒ **a.** 8 mm d'épaisseur ❒ **d.** 14 mm d'épaisseur

❒ **b.** 10 mm d'épaisseur ❒ **e.** 16 mm d'épaisseur

❒ **c.** 12 mm d'épaisseur

23 On échange un canard contre 2 poules, un lapin contre une oie et 3 canards, une oie contre 2 canards et 2 poules. Combien d'oies aura-t-on en échange d'un lapin ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 5 ❒ **e.** 6

24 Pensez à un nombre entier, ajoutez 3 à ce nombre; multipliez le résultat par 2; soustrayez maintenant 4; divisez le tout par 2; soustrayez enfin du résultat le nombre que vous aviez choisi au départ. Quel est votre résultat final ?

❒ **a.** cela dépend du nombre de départ

❒ **b.** 0 ❒ **c.** 1 ❒ **d.** 2 ❒ **e.** un nombre négatif

25 Si $3x + 3y + 5z = 34$ et si $z = 2$, alors $x + y + z$ est égal à :

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 6 ❒ **c.** 8,5 ❒ **d.** 10 ❒ **e.** 8

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Gain du marchand : 203 000 – 191 400 = 11 600 €.

Soit n le nombre de chevaux : 2 900n = 11 600 donc :

$$n = 11\,600/2\,900 \text{ et } n = 4$$

Il y avait 4 chevaux.

2 Soit x le prix de la revue, alors le prix du DVD est 4x. On a :

$$4x + x = 28, \text{ puis } 5x = 28 \text{ et } x = 28/5 = 5{,}6$$

Le DVD coûte $4 \times 5{,}6 = 22{,}40$ €.

On aurait pu choisir comme inconnue le prix du DVD mais le prix de la revue aurait été une fraction de x ce qui aurait compliqué les calculs.

3 Soit x le prix du casse-tête le moins cher, le plus cher vaut $(x + 8)$.

De plus : $x + (x + 8) = 94$ d'où $2x = 94 - 8$, soit $2x = 86$ et $x = 86/2 = 43$.

Le casse-tête le moins cher coûte 43 € et le plus cher 51 €.

4 Soit x le nombre de moutons de celui qui en a acheté le moins, l'autre en a acheté $(x + 5)$.

On a : $x + (x + 5) = 49$ puis $2x = 49 - 5$, ensuite $2x = 44$ et $x = 22$.

Celui qui a acheté le plus de moutons en a payé : $22 + 5 = 27$.

On a acheté 22 moutons pour 3 300 € donc le prix de 27 moutons est :

$$3\,300 \times 27/22 = 4\,050 \text{ €}$$

5 Comme $5 + 10 = 15$, le nombre de billets de chaque sorte est :

$$240/15 = 16$$

Si on veut utiliser une lettre x pour désigner le nombre de billets de chaque sorte, on traduit l'énoncé par $5x + 10x = 240$ puis $15x = 240$, et

$$x = 240/15 = 16$$

6 Prix de 4 m de tissu : $83 - 75 = 8$ €. Prix d'un mètre : $8/4 = 2$ €.

Prix total : $75 + 83 = 158$ €. Longueur totale de tissu : $158/2 = 79$ m.

On peut appeler x la longueur de la petite pièce d'étoffe, la plus grande faisant alors $(x + 4)$.

Le prix d'un mètre est : $(75/x)$ mais aussi 2, d'où $x = 75/2 = 37{,}5$ m.

La longueur totale est : $37{,}5 + (37{,}5 + 4) = 79$ m.

7 On peut trouver la solution par calcul mental.

De combien faut-il partir pour qu'en enlevant 7 on trouve 11 ?

De : $11 + 7 = 18$.

Quel nombre faut-il multiplier par 3 pour trouver 18 ?

C'est : $18/3 = 6$.

Le point d'interrogation cache le nombre 6.

8 Réponse c.

$$\frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}} = (a/4) \times (2/1) = a/2$$

Si $(a/2) = 1$ c'est que $a = 2$.

9 Réponse e.

On applique la règle du produit en croix :

$$(-3x)(4) = 5(-3) \text{ donc } -12x = -15 \text{ et } x = 15/12 = 5/4 = 1{,}25$$

Niveau 2

10 • **Solution « arithmétique »**

Quand on enlève les frais, soit 1/7 de l'héritage, il en reste 6/7, soit :

$$17\,500 \times 6/7 = 15\,000 \text{ €}$$

Le nombre d'héritiers est : 15 000/1 875 = 8.

• **Solution utilisant la lettre n pour désigner le nombre d'héritiers**

$$1\,875n = 17\,500 \times 6/7 \text{ d'où } n = (17\,500 \times 6)/(1\,875 \times 7) = 8$$

11 • La personne qui touche le moins est la troisième : soit x la somme qu'elle touche. La deuxième touche 2x, la première touche : 3 (2x) = 6 x.

En tout elles touchent : $x + 2x + 6x = 9x$, et $9x = 315$ donc $x = 315/9 = 35$.

La première touche 35 €, la deuxième 70 €, la première 210 €.

• **Autre solution**

Soient c, b, a les sommes touchées par les troisième, deuxième et première personnes. Elles sont proportionnelles à 1, 2, 6.

On peut écrire : $c/1 = b/2 = a/6$.

Dans une proportion, on forme un rapport égal en additionnant les numérateurs d'une part et les dénominateurs d'autre part. Les trois fractions précédentes sont égales à $(c + b + a)/(1 + 2 + 6) = 315/9 = 35$.

On obtient : c = 35 €, b = 2 × 35 = 70 €, et a = 6 × 35 = 210 €.

12 Soit x le nombre d'années passées.

Le père avait (53 – x) ans, le fils avait (17 – x) ans.

On obtient : $53 - x = 4(17 - x)$ puis $53 - x = 68 - 4x$ et $4x - x = 68 - 53$, d'où :

$$3x = 15, \text{ enfin } x = 5$$

C'était il y a 5 ans, le père avait : 53 – 5 = 48 ans, le fils avait : 17 – 5 = 12 ans, et on vérifie que : 48 = 4 × 12.

13 Soit x la valeur du point d'interrogation.

Le produit en croix donne $38 = 2(4 + 5x)$ donc $19 = 4 + 5x$, $19 - 4 = 5x$ puis $15 = 5x$, et $x = 3$.

On peut aussi le faire de tête… Par combien diviser 38 pour trouver 2 ? Par 19.

Combien faut-il ajouter à 4 pour trouver 19 ? Le nombre 15. Quel nombre multiplié par 5 donne 15 ? C'est 3.

14 Soit x le nombre de personnes qui n'ont pas payé. Il y en a (6 – x) qui ont payé. On obtient : $82{,}50(6 - x) = 330$ donc $495 - 330 = 82{,}5x$ puis :

$$165 = 82{,}5x \text{ et enfin } x = 2$$

Il y a 2 personnes qui n'ont pas payé.

15 Soit x le nombre d'années demandé.

Le grand frère aura $(18 + x)$, la sœur aura $(7 + x)$ années.

On obtient $7 + x = 1/2\ (18 + x)$ puis $7 + x = 9 + 0{,}5x$.

D'où $x - 0{,}5x = 9 - 7$; donc $0{,}5x = 2$ et enfin $x = 4$.

Dans 4 ans, le nombre $7 + 4 = 11$ sera la moitié du nombre $18 + 4 = 22$.

16 Réponse c.

$$4x = 30 - 3\ x \text{ donc } 7x = 30 \text{ et } x = 30/7$$

17 Réponse c.

On peut essayer les diverses propositions pour trouver la bonne.

On peut aussi développer…

$$x^2 + x - 3x - 3 = -3 \text{ donne } x^2 - 2x = 0$$

On factorise : $x(x - 2) = 0$. Si un produit est nul, c'est qu'un des facteurs au moins est nul. On obtient deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$.

Niveau 3

18 Soit x le nombre d'amies. Le cadeau coûte $(20x + 10)$ euros; de plus :

$25x = 25 + (20x + 10)$ d'où $25x = 20x + 35$ et $5x = 35$, enfin $x = 7$.

Il y a 7 amies.

On vérifie $7 \times 20 = 140$; le cadeau coûte $140 + 10 = 150$ €; $7 \times 25 = 175$ soit 25 de plus que 150.

19 Soit x le nombre de personnes invitées gratuitement.

Il a fallu trouver $(25x)$ euros pour payer leurs repas.

$(42 - x)$ personnes ont payé 5 € de plus chacune pour compenser donc :

$25x = 5\ (42 - x)$ puis $25x = 210 - 5x$;

$25x + 5x = 210$ d'où $30x = 210$ et $x = 210/30 = 7$.

Sept personnes ont mangé gracieusement.

20 Réponse d.

- On peut trouver par élimination et vérification.

« Il y a 6 ans » élimine les réponses « tu as 4 ans » et « tu as 6 ans », il reste donc à examiner 12, 11 ou 8 ans.

Si c'est 8 ans : il y a 6 ans tu avais 2 ans, et j'ai $8 + 4 = 12$ ans mais 12 n'est pas 3 fois 2.

Si c'est 12 ans : il y a 6 ans tu avais 6 ans et j'ai $12 + 4 = 16$ ans, mais 16 n'est pas 3 fois 6.

Si c'est 11 ans : il y a 6 ans tu avais 5 ans, j'ai 4 ans de plus que toi donc $11 + 4 = 15$ ans, ce qui fait bien 3 fois 5.

- On peut aussi trouver en résolvant une équation.

Soit x l'âge que tu as, il y a 6 ans tu avais $(x - 6)$ années. J'ai $(x + 4)$ années mais alors $x + 4 = 3\ (x - 6)$ d'où $x + 4 = 3x - 18$, puis :

$$4 + 18 = 3x - x, \text{ et } 2x = 22, \text{ enfin } x = 11$$

21 Réponse d.

Soit x le nombre de sols qu'il y a dans une livre.

5 livres et 28 sols = $(5x + 28)$ sols;3 livres et 63 sols = $(3x + 63)$ sols

L'énoncé se traduit par : $5x + 28 = 5 + 3x + 63$, d'où :

$$2x = 68 - 28;\ 2x = 40;\ x = 20$$

Dans une livre, il y a 20 sols.

22 Réponse d.

Soit x l'épaisseur d'une revue, y l'épaisseur d'un livre. L'énoncé se traduit par :

$$4y + 5x = 2y + 20x, \text{ et } x + 26 = y$$

On obtient : $2y = 15x$ d'où $2y = 15(y - 26)$ et $2y = 15y - 390$. On continue : $390 = 13y$, puis $y = 30$ et $x = 30 - 26 = 4$. La revue a 4 mm d'épaisseur.

23 Réponse a.

Comparons les deux indications :

1 canard = 2 poules et 1 oie = 2 canards + 2 poules

On obtient qu'une oie vaut 3 canards.

Utilisons l'indication : 1 lapin = 1 oie + 3 canards. On a alors :

1 lapin = 2 oies = 6 canards

24 Réponse c.

Soit n le nombre de départ, on obtient vite par les premières opérations :

$2(n + 3) - 4$, ce qui se simplifie en $(2n + 2)$.

Ensuite on divise par 2 et on trouve $(n + 1)$; on enlève enfin n, et il ne reste que 1 dans tous les cas, quelle que soit la valeur de n choisie au départ.

25 Réponse d.

En remplaçant z par 2, on obtient $3x + 3y = 24$ donc $x + y = 8$, puis :

$$x + y + z = 8 + 2 = 10$$

Arithmétique 19

L'essentiel à retenir

Comment trouver le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de deux entiers a et b ?

- On peut essayer de **trouver tous les diviseurs de a, tous les diviseurs de b**, puis faire la liste des diviseurs communs, et enfin **chercher le plus grand diviseur commun** de la liste. C'est très long.
- **La méthode la plus classique** pour trouver le PGCD de deux nombres est de décomposer d'abord en produit de facteurs premiers chacun des deux nombres. On essaie les divisions par chacun des nombres premiers dans l'ordre 2, 3, 5, 7, 11, …

On présente en deux colonnes, à gauche le nombre de départ et les quotients successifs, à droite les nombres premiers qui sont des diviseurs.

> Exemple *Avec 32 et 56 :*
>
> $$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On écrit alors $32 = 2^5$ et $56 = 2^3 \times 7$.
Pour obtenir le PGCD des deux nombres 56, on cherche les nombres premiers communs aux deux décompositions, et on attribue à chacun d'eux le plus petit des exposants avec lequel on le rencontre.

> Exemple
>
> *Avec 32 et 56 :* on attribue au nombre commun 2 sa plus petite puissance rencontrée qui est 3 ; il n'y a pas d'autre nombre commun que 2 donc le PGCD est 2^3 soit 8.

- Voici **la méthode d'Euclide pour trouver le PGCD**… On divise le plus grand nombre par le plus petit; ensuite on divise le plus petit par le reste de la division précédente. On continue ainsi jusqu'à trouver un reste nul. Le PGCD est le dernier reste non nul.

> Exemple *Avec 32 et 56 :*
> $56 = 32 \times 1 + 24$; $32 = 24 \times 1 + 8$; $24 = 8 \times 3 + 0$. Le PGCD est 8.
> On peut présenter ainsi :

	1	1	3
56	**32**	24	8
– 32	– 24	– 24	
= 24	= 8	= 0	

- Voici **une méthode encore plus simple** :
  – écrire les nombres l'un à côté de l'autre;
  – soustraire le plus petit du plus grand;
  – écrire la différence obtenue en-dessous du plus grand;
  – recopier le plus petit en-dessous de lui-même;
  – se demander si les nombres obtenus sont les mêmes :
    - si non, on recommence,
    - si oui, alors ce nombre est le PGCD.

32	56
32	24
8	24
8	16
8	8

Cette dernière méthode peut parfois être longue mais elle est toujours facile.

- **Lorsque le PGCD vaut 1, on dit que les deux nombres sont premiers entre eux**.

Comment trouver le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) non nul de deux entiers a et b ?

> Exemple *Quel est le plus petit multiple commun non nul de 24 et 30 ?*
> - On peut dresser les listes de multiples de l'un et l'autre nombre et comparer :
>   – multiples de 24 : soit 24, 48, 72, 96, 120, 144, etc.
>   – multiples de 30 : soit 30, 60, 90, 120, 150, etc.
>
> Le PPCM de 24 et 30 est 120.
> - On peut aussi utiliser la **décomposition en produit de nombres premiers** de chacun des nombres : $24 = 2^3 \times 3$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$. Le PPCM de deux nombres a et b s'obtient en calculant le produit de tous les facteurs premiers figurant dans l'une ou l'autre des décompositions de a et b, chacun d'eux étant affecté du plus grand exposant avec lequel il

figure dans la décomposition. Le PPCM de 24 et 30 est ainsi : $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

- Quand les deux nombres a et b sont premiers entre eux, c'est-à-dire quand leur PGCD est égal à 1, alors le PPCM de a et b est le produit de a par b.

Relation entre le PGCD et le PPCM de deux nombres a et b

- Le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2 est égal au produit de leur PGCD et de leur PPCM. Ainsi :

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$$

> Exemple
>
> Pour $a = 24$ et $b = 30$, PGCD $(24 ; 30) = 6$ et PPCM $(24 ; 30) = 120$; on vérifie que : $24 \times 30 = 6 \times 120 = 720$.

- **On peut calculer le PPCM si l'on connaît les 2 nombres et leur PGCD**.

À quoi sert le PPCM ?

- **Addition de fractions** : il fournit un dénominateur commun simple.

> Exemple $11/24 + 13/30$
> $= (11 \times 5)/(24 \times 5) + (13 \times 4)/(30 \times 4) = 55/120 + 52/120$
> $= (55 + 52)/120 = 107/120$.

- *Problème type :* une roue d'engrenage A a 24 dents, elle est en contact avec une roue B de 30 dents. Au bout de combien de tours de chacune d'elles seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ? La première fois où les roues se retrouvent dans la position du départ, elles ont tourné d'un nombre de dents égal au PPCM de 24 et 30 soit 120. La roue A a fait :$120/24 = 5$ tours, et la roue B : $120/30 = 4$ tours.

Nombre et somme des diviseurs d'un entier

- On peut trouver tous les diviseurs d'un entier grâce à sa décomposition en facteurs premiers.

> Exemple
>
> Pour $24 = 2^3 \times 3$, on écrit le produit $(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3)$ et on le développe. La somme obtenue : $1 + 2 + 4 + 8 + 3 + 6 + 12 + 24$ fait apparaître tous les diviseurs.

- Leur nombre se calcule en multipliant le nombre de termes de chacune des parenthèses en facteur soit ici : $4 \times 2 = 8$. La somme de tous les diviseurs est égale au produit :

$$(1 + 2 + 4 + 8) \times (1 + 3) = 15 \times 4 = 60$$

- Dans le cas général, quand un nombre premier p figure une seule fois dans la décomposition, on a besoin de la parenthèse $(1 + p)$; quand un nombre premier q figure n fois dans la décomposition, on a besoin de la parenthèse $(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Décomposer 48 et 36 en produit de nombres premiers et calculer leur PGCD et leur PPCM.

2 Je veux réaliser un patchwork à motifs carrés pour un couvre-lit de dimensions 2,16 m sur 2,52 m. Le côté des carrés doit être un nombre entier de centimètres. Quelles sont les valeurs possibles de ce côté ? Quelle est la plus grande valeur possible ?

3 Trouver deux nombres connaissant leur somme 63 et leur PGCD 9.

4 Trois pièces d'étoffe ont respectivement 180 m, 252 m, et 324 m de longueur. On veut les partager en pièces d'égale longueur. Quelle devra être cette longueur commune (entière en nombre de mètres) pour que le nombre des pièces soit le plus petit possible ?

5 Les roues de devant d'une vieille voiture de collection ont 2,75 m de circonférence, les roues de derrière ont 3,30 m. Quelle est la plus petite distance que doit parcourir la voiture pour que les roues de devant et les roues de derrière aient fait un nombre entier de tours ?

6 Deux cyclistes partent ensemble du même point sur une piste circulaire, dans le même sens. L'un fait un tour de piste en 3 min 18 s, l'autre en 3 min 45 s. Au bout de combien de temps repasseront-ils pour la première fois ensemble à leur point de départ ?

7 Un numéro de tombola gagne s'il est divisible par 9.
Le numéro ci-dessous a gagné mais le dernier chiffre du billet a été déchiré (*), quel pouvait-il être ? 58 496 327 04*

❐ **a.** 3 ❐ **b.** 4 ❐ **c.** 8 ❐ **d.** 6 ❐ **e.** 9

8 Qui n'a pas raison ?

❒ **a.** Marcel : 4 est divisible par 8

❒ **b.** Aurélie : 1 025 est divisible par 25

❒ **c.** Richard : 1 089 est divisible par 9

❒ **d.** Isidore : 2 004 est un multiple de 6

❒ **e.** Étienne : 2008 est une année bissextile

Niveau 2

9 Les surveillants du collège ont une rude tâche : compter les élèves présents… Ils savent qu'ils sont entre 700 et 800, et que :

– si le premier surveillant les compte par groupe de 8, il en reste 7 ;

– si le deuxième les compte par groupe de 12, il en reste encore 7 ;

– si le troisième les compte par groupe de 15, il en reste toujours 7.

Quel est le nombre d'élèves présents au collège ?

10 Chercher tous les diviseurs communs de 588 et 1 428.

11 Dans une classe, il y a moins de 65 élèves. On peut les placer 4 par 4, 6 par 6, et 10 par 10 sans laisser de rang incomplet. Combien y a-t-il d'élèves ?

12 Sachant que $258 \times 52 = 13\,416$, quelle est la phrase fausse ?

❒ **a.** 258 est un diviseur de 13 416

❒ **b.** 13 416 est un multiple de 26

❒ **c.** 52 est le quotient de 13 416 divisé par 258

❒ **d.** 13 416 est divisible par 1 032

❒ **e.** 13 n'est pas un diviseur de 13 416

13 On sait que le PGCD de 34 et 51 est 17, et que le PGCD de 4 838 et 3 567 est 41. Quelles sont les fractions qui sont irréductibles parmi celles écrites ci-dessous ?

❒ **a.** $\dfrac{4\,838}{3\,567}$

❒ **b.** $\dfrac{34 : 17}{51 : 17}$

❒ **c.** $\dfrac{3\,567 : 41}{4\,838 : 41}$

❒ **d.** $\dfrac{34 \times 4\,838}{51 \times 3\,567}$

❒ **e.** $\dfrac{510}{340}$

14 Je déménage mes 210 CD classiques et 168 CD de chansons dans des boîtes identiques, sans mélanger les deux genres dans une même boîte, et en utilisant un nombre minimum de boîtes. De combien de boîtes ai-je besoin ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 6 ❒ **c.** 14 ❒ **d.** 42 ❒ **e.** 9

Niveau 3

15 Deux roues dentées s'engrènent l'une dans l'autre. La première, qui porte 66 dents fait 12 tours à la minute. La deuxième porte 24 dents. On met les roues en mouvement : au bout de combien de temps les deux roues se retrouveront-elles dans la même position qu'au départ ?

16 Si d est le PGCD de a et b alors…

❒ **a.** d divise a
❒ **b.** d divise b
❒ **c.** b est un multiple de d
❒ **d.** d divise $a \times b$
❒ **e.** d^2 divise $a \times b$

17 Si 1 est le PGCD de a et b, alors…

❒ **a.** a divise b ou b divise a
❒ **b.** a et b n'ont pas de diviseur autre que 1 et eux-même
❒ **c.** a est un multiple de b, ou b est un multiple de a
❒ **d.** a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1
❒ **e.** a et b divisent 1

18 Si a est différent de b et si a est le PGCD de a et b, alors…

❒ **a.** a divise b
❒ **b.** $a < b$
❒ **c.** b divise a
❒ **d.** $b < a$
❒ **e.** b est le PGCD de b et a

19 Le nombre $\frac{8}{7}$ est la somme de tous les nombres ci-dessous sauf un, lequel ?

❒ **a.** $\frac{1}{3}$ ❒ **b.** $\frac{1}{2}$ ❒ **c.** $\frac{1}{7}$ ❒ **d.** $\frac{1}{6}$ ❒ **e.** $\frac{1}{9}$

20 On veut planter des poiriers le long d'un mur de 36 m de long, en les séparant des bords et les uns des autres d'un nombre entier de mètres, entre 1,5 m et 6,2 m. Quelle est la distance (en mètres) impossible entre chaque arbre ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 3 ❒ **c.** 4 ❒ **d.** 5 ❒ **e.** 6

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 On factorise $48 = 2^4 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$.

Le PGCD est $2^2 \times 3 = 12$.

Le PPCM est $2^4 \times 3^2 = 144$.

2 Le côté des carrés doit être un diviseur commun de 216 et 252.

On peut calculer le PGCD et utiliser le fait que les diviseurs du PGCD sont exactement les diviseurs communs des deux nombres.

On obtient : $216 = 2^3 \times 3^3$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. Le PGCD est $2^2 \times 3^2 = 36$.

Comme $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6$, la liste des diviseurs cherchée est 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Le plus grand d'entre eux est le PGCD soit 36.

3 Les deux nombres sont des multiples du PGCD 9, donc il faut les chercher dans la liste 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, etc.

Il faut que leur somme fasse 63, on peut faire des essais et trouver $9 + 54 = 63$ ou $18 + 45 = 63$, ou encore $27 + 36 = 63$. Il y aurait donc trois solutions, mais attention, il faut vérifier de plus que les deux nombres choisis ont bien pour PGCD 9 et pas plus. Il se trouve que les trois possibilités sont acceptables.

4 On cherche un diviseur commun de 180, 252 et 324. Pour que le nombre de pièces soit le plus petit possible il faut que la longueur choisie soit la plus grande possible, donc c'est le PGCD des trois nombres qui va nous intéresser. On obtient :

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5{,}252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \text{ et } 324 = 2^2 \times 3^4$$

ce qui nous donne le PGCD $= 2^2 \times 3^2 = 36$. On fera des pièces de 36 m.

5 La réponse est donnée par le PPCM de 330 et 275.

On a : $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$, et $275 = 5^2 \times 11$.

Le PPCM est : $2 \times 3 \times 5^2 \times 11 = 1\,650$.

Il faut parcourir 1 650 cm soit 16,5 m.

Une roue aura fait 5 tours et l'autre 6 tours.

6 On a : 3 min 18 s = 3×60 s + 18 s = 198 s, et 3 min 45 s = 225 s.

On cherche le PPCM de 198 et 225.

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$ et $225 = 3^2 \times 5^2$, donc PPCM $= 2 \times 3^2 \times 11 \times 5^2 = 4\,950$.

Mais $4\,950 = 82 \times 60 + 30$ donc les cyclistes repasseront ensemble au point de départ au bout de 4 950 s = 82 min 30 s = 1 h 22 min 30 s.

7 **Réponse d.**

Le nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

On calcule $5 + 8 + 4 + 9 + 6 + 3 + 2 + 7 + 0 + 4 = 48$.

Le multiple de 9 immédiatement supérieur est 54, donc il manque un dernier chiffre égal à $54 - 48 = 6$.

8 **Réponse a.**

Indication pour le e. : demander si une année est bissextile revient à demander si elle est divisible par 4. On regarde alors si c'est le cas pour le nombre formé des deux derniers chiffres à droite. Pour 2008, on a 08 qui est divisible par 4 donc 2008 aussi.

Niveau 2

9 Si on enlève 7 du nombre d'élèves, ce doit être un multiple commun de 8, 12 et 15.

On trouve comme PPCM des trois nombres : $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Il faut un nombre entre 700 et 800, donc on cherche les multiples de 120 entrant dans cette fourchette, et on en trouve un seul : $120 \times 6 = 720$.

Le nombre d'élèves cherché est donc $720 + 7 = 727$.

10 Les diviseurs communs aux deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD. Comme $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ et $1\,428 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 17$, on obtient pour PGCD :

$$2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

On a alors : $84 = 1 \times 84 = 2 \times 42 = 3 \times 28 = 4 \times 21 = 6 \times 14 = 7 \times 12$

La liste des diviseurs communs est :

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 28, 42, 84$$

Pour être sûr de ne pas oublier de diviseurs, une méthode est la suivante :

On développe le produit $(1 + 2 + 2^2)(1 + 3)(1 + 7)$.

Le nombre de termes est $3 \times 2 \times 2 = 12$ donc il doit y avoir 12 diviseurs. Dans un cas général, il faut mettre une parenthèse par nombre premier figurant dans la décomposition du PGCD, et remplir la parenthèse par la somme de 1 et de toutes les puissances, jusqu'à celle figurant dans la décomposition du PGCD, du nombre premier correspondant à cette parenthèse :

décomposition du PGCD	2^2	$\times 3$	$\times 7$
calcul des diviseurs	$(1 + 2 + 2^2)$	$\times (1 + 3)$	$\times (1 + 7)$

11 Il faut trouver un multiple commun de 4, 6 et 10, qui soit plus petit que 65. On trouve une seule possibilité : 60, qui est le PPCM des trois nombres. Il y a 60 élèves.

12 **Réponse e.**

On peut répondre sans vérification de division à la calculatrice ou à la main.

On remarquera que $52 = 2 \times 26 = 4 \times 13$, donc ce qui est divisible par 52 l'est aussi par 13 ou 26. Le nombre 13 est bien un diviseur de 13 416.

Comme $258 \times 52 = 258 \times 4 \times 13 = 1\,032 \times 13$, le nombre 13 416 est bien divisible par 1 032.

13 **Réponse b. et c.**

« Irréductible » veut dire qu'on ne peut pas simplifier la fraction.

Il y a des simplifications évidentes dans les cas e. (par 10), a. (par 41), d. (par 17×41).

Dans les deux cas solutions, on simplifie la fraction par le PGCD des numérateurs et dénominateur, donc par le nombre le plus grand possible qui les divise tous les deux.

14 **Réponse d.**

Pour obtenir le nombre de CD dans une boîte, il faut trouver un diviseur commun de 210 et 168. Comme le nombre de boîtes doit être minimum, il faut que les boîtes soient les plus grandes possibles. On cherche donc le PGCD de 210 et 168 : c'est 42.

Le nombre de boîtes nécessaires est $(210/42) + (168/42) = 5 + 4 = 9$.

Niveau 3

15 Les deux roues tournent du même nombre de dents puisqu'elles s'engrènent. Pour retrouver les roues en position voulue après des nombres entiers de tours, il faut trouver le plus petit multiple commun de 66 et 24.

On obtient : $66 = 2 \times 3 \times 11$ et $24 = 2^3 \times 3$, donc PPCM $= 2^3 \times 3 \times 11 = 264$.

Pour bouger de 264 dents, la première roue doit faire $264/66 = 4$ tours.

Comme elle fait 12 tours en une minute, et comme 4 est le tiers de 12, il faut seulement le tiers d'une minute soit 20 secondes pour répondre à la demande.

16 **Toutes les réponses proposées sont bonnes.**

Le PGCD de deux nombres est un diviseur de ces nombres donc les réponses a. et b. sont correctes, il divise aussi le produit des deux nombres tout comme son carré les divise, d'où d. et e. sont justes; chacun des deux nombres est multiple de leur PGCD donc la réponse c. est juste également.

17 **Réponse d.**

⚠ La réponse b. est fausse. Par exemple 12 et 35 ont 1 pour PGCD mais pris séparément ils ont d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes : ils ne sont pas premiers, ils sont premiers entre eux.

18 **Réponse a. et b.**

Si a divise b en étant différent, a est plus petit que b.

⚠ Pour le e., le PGCD de a et b est le même nombre que le PGCD de b et a, donc ici c'est toujours a, et non b comme proposé.

19 **Réponse e.**

En effet, il est assez connu que : $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$, d'où ensuite :

$$1 + 1/7 = 8/7$$

La fraction 1/9 est la seule non utilisée.

20 **Réponse d.**

Les nombres entiers entre 1,5 et 6,2 sont : 2, 3, 4, 5, 6.

On cherche des diviseurs de 36, donc il ne reste que 2, 3, 4, 6 (le 5 est éliminé).

La mauvaise valeur demandée est donc celle du d.

Calculs approchés, ordre de grandeur… 20

L'essentiel à retenir

Arrondis et troncatures

- Effectuons la division de 89,5 par 25. On trouve 3,58 et cette division tombe juste. On appelle « **troncature à l'unité** du résultat » le nombre 3. On appelle « **arrondi à l'unité** du quotient » le nombre 4.
- **La troncature à l'unité** s'obtient, systématiquement, en gardant le nombre entier de l'écriture : on coupe (tronçonne) l'écriture au niveau de la virgule.
- **L'arrondi à l'unité** d'un nombre est l'entier le plus proche de ce nombre. Concrètement, quand le premier chiffre après la virgule est 0 ou 1, 2, 3, 4 l'arrondi à l'unité se fait à l'entier immédiatement inférieur ou égal. Quand le premier chiffre après la virgule est 5 ou 6, 7, 8, 9, l'arrondi à l'unité est l'entier immédiatement supérieur.
- Dans certaines circonstances, on peut remplacer un nombre par une valeur proche, sans trop de préjudice. Si l'on divise 13 par 7 on trouve 1,857 142… La division ne tombe pas juste, et le bloc de chiffres 857 142 revient même en boucle sans arrêt. On peut donner des valeurs approchées du résultat de la division, avec un nombre de chiffres après la virgule décidé à l'avance. L'une des **valeurs approchées** sera par **défaut**, c'est-à-dire inférieure, l'autre sera **par excès**, c'est-à-dire supérieure.
- Ainsi on peut former un **encadrement d'amplitude** (de largeur) 0,1 du nombre 13/7 soit : $1{,}8 < 13/7 < 1{,}9$.
  – 1,8 est la valeur approchée par défaut à 0,1 près (ou à 10^{-1} près) ;
  – 1,9 est la valeur approchée par excès à 0,1 près.

On dit que 1,8 et 1,9 sont les valeurs approchées d'**ordre** 1 de 13/7.

- De même à l'ordre 3, c'est-à-dire avec trois chiffres après la virgule on a : $1{,}857 < 13/7 < 1{,}858$, c'est-à-dire un **encadrement d'amplitude** 0,001 ou 10^{-3} du quotient 13/7.
- On peut utiliser des troncatures et des arrondis de tous ordres (c'est-à-dire avec le nombre de chiffres après la virgule que l'on désire). La technique est la même que pour les troncature ou arrondi à l'unité (qui correspondent à l'ordre 0, au sens « aucun chiffre après la virgule »).

	troncature de 13/7	arrondi de 13/7
à l'unité	1	2
au dixième	1,8	1,9
au centième	1,85	1,86
au millième	1,857	1,857

Ordre de grandeur d'un résultat

- Si un élève écrit : 103,5 + 47,3 + 24, 01 = 274,81, alors, sans faire l'opération, on peut dire qu'il a fait une erreur de calcul. En effet, les nombres à ajouter sont proches de 100, de 50, et de 20 et donc la somme est proche de 170. Ce ne peut être 274, 81. Quand notre **bon sens** intervient de cette manière, on dit qu'on a pris conscience de **l'ordre de grandeur du résultat**, qui devait être proche de 170 et non pas de 270.
- Ce bon sens est utile quand on utilise une calculatrice pour repérer une faute de frappe ou un oubli d'un chiffre. Être bon en calcul mental est un atout considérable pour avoir vite une idée d'un ordre de grandeur.

Notation scientifique d'un nombre

- Un nombre est écrit en notation scientifique quand il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où :
  – a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (c'est-à-dire que a s'écrit avec un seul chiffre avant la virgule, ce chiffre n'étant pas zéro)
  – n est un entier relatif.

> ### Exemples
> $E = 2{,}85 \times 10^3$ est un nombre écrit en notation scientifique; $F = 1{,}27 \times 10^{-4}$ aussi. Par contre, $G = 0{,}81$ n'est pas écrit en notation scientifique (« a » est plus petit que 1). Il faudrait écrire $G = 8{,}1 \times 10^{-1}$. De même, $H = 200\,900$ n'est pas écrit en notation scientifique (il faut un facteur puissance de dix), il faut le transformer en $H = 2{,}009 \times 10^5$.

- La notation scientifique est très utile pour encadrer facilement un nombre entre deux puissances de dix, et ainsi apprécier son ordre de grandeur.

> ### Exemple
> $I = 5{,}92 \times 10^5$ est un nombre compris entre 10^5 et 10^6. Il est inférieur à un million. $J = 8{,}32 \times 10^6$ est un nombre compris entre 10^6 et 10^7; il est supérieur à un million. Comparer I et J est facile : $I < J$ car l'exposant 5 est plus petit que l'exposant 6 dans les deux notations scientifiques.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Si un cercle a pour périmètre 12, son rayon vaut environ…
❒ **a.** 36 ❒ **b.** 72 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** 4 ❒ **e.** 24

2 Observez les écritures des deux nombres N = * 35* et M = 3 **5.
N est plus grand que M si…
❒ **a.** * = 3 ❒ **b.** * > 3 ❒ **c.** * < 3 ❒ **d.** * = 5 ❒ **e.** * < 5

3 L'essence augmente de 4 % en janvier, puis de 6 % en février, l'augmentation globale est…
❒ **a.** de moins de 10 %
❒ **b.** de 10 %
❒ **c.** de plus de 10 %
❒ **d.** la même si on inverse les deux augmentations
❒ **e.** annulée si je baisse de 6 % puis de 4 %

4 Mon lecteur de CD coûtait 120 €; on m'a fait une remise de 20 € : c'est une baisse de…
❒ **a.** moins de 20 % ❒ **c.** plus de 20 % ❒ **e.** $\frac{120}{20}$ %
❒ **b.** 20 % ❒ **d.** $\frac{20}{120}$ %

5 Cinq enfants comparent leurs tailles. Hélène est beaucoup plus grande que François, mais plus petite que Marie. Vincent dépasse Marie de quelques centimètres. Alain est le plus petit des garçons. Quel est le plus grand des cinq enfants ?
❒ **a.** Marie ❒ **b.** François ❒ **c.** Vincent ❒ **d.** Hélène ❒ **e.** Alain

6 L'épaisseur d'une pièce de deux euros est d'environ :
❒ **a.** 0,2 mm ❒ **b.** 2 mm ❒ **c.** 2 cm ❒ **d.** 1 mm ❒ **e.** 0,1 cm

7 Une orange pèse environ :
❒ **a.** 1,5 g ❒ **b.** 15 g ❒ **c.** 150 g ❒ **d.** 1,5 kg ❒ **e.** 1,5 dag

8 Puis-je acheter un rôti de 780 g de bœuf à 11,90 € le kilo avec un billet de 10 € ?

9 Quatre yaourts pour 3 €, ou 6 yaourts pour 4 € : quel est le plus avantageux ?

Niveau 2

10 Si on vous dit qu'un verre à Madère contient de 8 à 10 cL, et qu'une bouteille de Madère permet de remplir de 8 à 9 verres de Madère, dans quelle fourchette évaluerez-vous la contenance d'une bouteille de Madère ?

11 Quelle est la solution entière de cet encadrement d'inconnue x ?

$$1 + \frac{3}{7} < \frac{2x+5}{14} \leq 1 + \frac{14}{28}$$

12 Une bouteille bordelaise contient entre 68 et 75 cL. Combien de verres à bordeaux de 12 à 14 cL peut-on remplir à ras bord avec une telle bouteille ?

13 On effectue la division entière d'un nombre N par 145, et le reste obtenu est 112. De combien peut-on augmenter N sans que le quotient change ?

14 Un inventeur a créé une ampoule électrique d'une durée de vie supérieure à 100 000 heures. Combien d'années au moins sera-t-on tranquille avant d'acheter une remplaçante à cette ampoule qu'on laissera allumée en permanence ?

15 Soit le quotient $\frac{18{,}7}{12}$. On appelle x son arrondi à l'unité, et y sa troncature à l'unité. Calculer $(x - y)$.

Niveau 3

16 Une fraction a pour dénominateur 21. Son numérateur est un nombre entier. Le quotient arrondi au dixième est 9,3 tandis que la troncature au dixième est 9,2. Combien vaut le numérateur de la fraction ?

17 Les scientifiques pensent que les journées s'allongent d'environ 2,1 millièmes de seconde par siècle. Dans un milliard d'années de combien (environ) de secondes en plus disposerons-nous chaque jour ?

18 Parmi les aires suivantes, quelle est la meilleure valeur approchée de l'aire du cercle inscrit dans un carré d'aire 36 cm^2 ?

❒ **a.** 18,85 cm^2 ❒ **c.** 28,27 cm^2 ❒ **e.** 28,26 cm^2

❒ **b.** 9,42 cm^2 ❒ **d.** 27 cm^2

19 Le nombre j est compris entre 0 et 1 ; le nombre f est plus grand que 1. Quel est le plus grand nombre parmi les cinq suivants ?

❒ **a.** j ❒ **b.** f ❒ **c.** $\frac{j}{f}$ ❒ **d.** $j \times f$ ❒ **e.** $j + f$

20 Si a = 45,67 et b = 46,45, alors à l'unité…

❒ **a.** l'arrondi de a est égal à la troncature de b

❒ **b.** la troncature de a est supérieure à l'arrondi de b

❒ **c.** la somme des troncatures de a et b est inférieure à l'arrondi de (a + b)

❒ **d.** la somme des troncatures de a et b est supérieure à la troncature de (a + b)

❒ **e.** l'arrondi de a est égal à l'arrondi de (b – 1)

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 **Réponse c.**

Les propositions sont très grossièrement différentes. On peut se contenter de prendre 3 pour valeur de pi.

Ainsi le périmètre vérifie : $2 \times 3 \times R = 12$ d'où $R = 2$.

2 **Réponses a., b. et d.**

Pour le e., avec * = 4 on obtient N > M mais avec * = 2 on obtient N < M, donc on ne peut conclure que la condition e. donne toujours le bon résultat.

3 **Réponses c. et d.**

Augmenter de 4 %, c'est multiplier par 1,04; augmenter de 6 %, c'est multiplier par 1,06. Les deux augmentations successives reviennent à multiplier par (1,04 × 1,06) ce qui donne plus que 1,10 (exactement 1,102 4). L'augmentation globale est donc supérieure à 10 % : c. est vraie.

Comme 1,04 × 1,06 = 1,06 × 1,04, on a aussi d. vraie.

Le e. est faux, car baisser de 6 % après avoir augmenté de 6 % ne fait pas revenir au point de départ. Par exemple 100 deviendrait 106; et ensuite 106 – (106 × 6 %) = 106 – 6,36 = 99,34 ce qui est différent de 100.

4 **Réponses a. et d.**

On baisse de 20 par rapport à 120, donc on baisse d'un sixième, soit environ 16,6 % ce qui est moins que 20 %.

Le pourcentage de baisse est bien $\frac{20}{120}$ %.

5 Réponse c.

On peut faire un schéma ressemblant à un thermomètre et y placer les uns par rapport aux autres les prénoms, en tenant compte de ce qui est écrit, phrase après phrase.

6 Réponse b.

7 Réponse c.

8 En mettant les choses « au pire » pour notre portefeuille, on évalue 0,8 kg à 12 € le kilo, ce qui donne 9,60 euros. On peut donc payer avec un billet de 10 €.

9 On compare pour un multiple commun de 4 et 6 yaourts, soit 12 yaourts. Dans le premier cas, on paierait $3 \times 3 = 9$ euros, dans le deuxième $4 \times 2 = 8$ euros seulement. Le conditionnement par 6 yaourts est plus avantageux.

Il n'est pas utile de calculer le prix (approché) d'un yaourt dans l'un ou l'autre cas, ce serait du temps perdu.

Niveau 2

10 La contenance peut varier entre $8 \times 8 = 64$ cL au minimum, et $9 \times 10 = 90$ cL au maximum.

11 Comme $14/28 = 0{,}5$ et comme $3/7$ est peu différent de 0,4 on voit que la fraction centrale a une valeur très peu inférieure ou égale à 1,5.

De plus $14 \times 1{,}5 = 21$, donc on cherche x pour que $(2x + 5)$ fasse 21 ou un peu moins. On envisage $x = 8$ et $x = 7$.

Pour $x = 7$, la fraction $19/14$ est à comparer avec $\left(1 + \frac{3}{7}\right)$ qui vaut $10/7$, soit $20/14$ et qui devrait être plus petite. On conclut que $x = 7$ n'est pas valable.

La seule solution est $x = 8$.

12 Au minimum, on remplit le quotient entier de 68 par 14, soit 4 verres, et au maximum le quotient entier de 75 par 12 soit 6 verres.

(On ne compte que les verres qui sont remplis entièrement.)

13 Dans la division par 145, le reste peut varier de 0 à 144.

Depuis le reste 112 on peut augmenter de : $144 - 112 = 32$ sans voir changer le quotient. En ajoutant 33, le quotient augmente de 1.

14 Il y a 24 heures par jour et 365 jours dans une année soit nettement moins que $25 \times 400 = 10\,000$ heures, mais plus que $20 \times 350 = 7\,000$ heures. Avec une durée de vie de 100 000 heures, on est tranquille pour plus de 10 ans ($100\,000/10\,000 = 10$), mais moins que 15 ans ($10\,000/7\,000$ donne un peu moins de 15).

15 Comme $\frac{18{,}7}{12}$ donne environ 1,558, la troncature à l'unité est 1 et l'arrondi est 2. La différence $(x - y)$ vaut donc $2 - 1 = 1$.

Niveau 3

16 Le quotient q vérifie $9{,}2 < q \leq 9{,}3$.

Le numérateur vaut 21 fois le quotient.

Le numérateur est encadré par $21 \times 9{,}2 = 193{,}2$ et $21 \times 9{,}3 = 195{,}3$.

Les nombres entiers concernés sont 194 et 195.

Il faut néanmoins se méfier avec les arrondis et faire une vérification :

195/21 donne 9,285… ce qui convient aux conditions, mais 194/21 qui donne 9,238… n'a pas un arrondi satisfaisant.

La seule solution est un numérateur égal à 195.

17 Un siècle, c'est 100 ans. Un milliard d'années (10^9), cela fait 10^7 siècles. Le jour doit rallonger de : 2,1 millièmes $\times 10^7$ soit 21 000 secondes. Dans une heure, il y a 3 600 secondes; donc avec 21 000 secondes on est proche de 6 heures en plus.

18 **Réponse c.**

Le rayon du cercle inscrit est la moitié du côté du carré donc 3.

L'aire du cercle vaut donc 9π.

Avec π valant environ 3,14 on trouve 28, 26 mais avec 3,141 qui est plus proche de la réalité on trouve 28,269. La réponse 28,27 est la meilleure.

19 **Réponse e.**

C'est $(j + f)$. Faire une multiplication ne revient pas toujours à augmenter. Quand on multiplie f par un nombre j plus petit que 1 on obtient moins que f, et donc moins que $j + f$.

20 **Réponses a. et c.**

La troncature à l'unité de 45,67 est 45 et l'arrondi à l'unité de 45,67 est 46. La troncature à l'unité de 46,45 est 46 et l'arrondi à l'unité de 46,45 est 46. Ainsi a. est juste et b. et e. sont faux.

De plus $a + b = 45{,}67 + 46{,}45 = 92{,}12$ a pour troncature 92 et pour arrondi 92. Le c. est juste $(91 < 92)$ et le d. est faux.

Inclassables… 21

Vous trouverez plus loin quelques problèmes où, selon les circonstances, il sera précieux d'avoir le sens de l'organisation, utile de savoir trier les bonnes informations, d'inventer un schéma ou un tableau aidant à réfléchir. Vous ne lirez pas d'*essentiel* sur ces sujets variés, mais voici des exercices résolus sur un thème particulier, celui des **problèmes de mélanges**…

Exercice résolu 1

À Ludoville, dans quelle proportion faut-il mélanger du blé à 98 ludics l'hectolitre et du blé à 85 ludics l'hectolitre pour obtenir 6,5 hectolitres d'un mélange revenant à 92 ludics l'hectolitre ?

On peut raisonner à partir du prix final d'équilibre, soit 92, qui est :

– d'une part distant de : $98 - 92 = 6$ ludics du prix élevé ;

– d'autre part distant de : $92 - 85 = 7$ ludics du prix bas.

Il faut compenser ces différences par des quantités dans la proportion : 7 parts pour les 6 ludics et 6 parts pour les 7 ludics (ainsi $6 \times 7 = 7 \times 6$).

Comme $7 + 6 = 13$, les proportions devront être de 7 pour 13 de blé à 98 ludics et 6 pour 13 de blé à 85 ludics. Avec 6,5 hectolitres, en remarquant que 6,5 est la moitié de 13, cela donne 3,5 hL de blé à 98 ludics et 3 hL de blé à 85 ludics.

Si ce genre de raisonnement est trop loin de votre mode de réflexion habituel, vous pouvez transformer le problème en système de deux équations à deux inconnues. Soient x et y les nombres d'hectolitres de blé respectivement à 98 ludics et à 85 ludics.

On a pour les quantités : $x + y = 6{,}5$.

Pour le prix : $98x + 85y = 92\,(x + y)$, ce qui se simplifie en $6x = 7y$.

On peut calculer y en fonction de x dans la 1re équation $y = 6{,}5 - x$.

On remplace y dans la deuxième équation par cette valeur et on obtient une équation avec x comme seule inconnue :

$6x = 45{,}5 - 7x$ puis $13x = 45{,}5$ et enfin $x = 45{,}5/13 = 3{,}5$.

On reporte la valeur dans $y = 6{,}5 - x$ et on obtient $y = 6{,}5 - 3{,}5 = 3$.

Exercice résolu 2

Dans quelle proportion faut-il mélanger une solution à 40 % d'un certain produit avec une solution à 90 % du même produit pour obtenir une solution à 60 % ?

Si on appelle p la proportion de la solution à 40 %, alors la proportion de la solution à 90 % est $(1 - p)$. Dans un tel mélange, le total des deux fractions (proportions) est évidemment 1 car $(p + (1 - p) = 1)$.

La proportion de produit pur dans le mélange est :

$$0{,}4p + 0{,}9(1 - p) = 0{,}9 - 0{,}5p$$

Mais c'est aussi 60 % soit 0,60 donc on obtient :

$0{,}6 = 0{,}9 - 0{,}5p$	puis	$0{,}5p = 0{,}9 - 0{,}6$
$0{,}5p = 0{,}3$	d'où	$p = 0{,}3/0{,}5 = 3/5 = 0{,}6$ soit 60 %

Il faut donc mélanger 6 volumes de solution à 40 % avec 4 volumes de solution à 90 % pour obtenir 10 volumes de solution à 60 %.

Si vous souhaitez vérifier à l'aide de la première méthode de l'exemple 1, vous trouverez : 60 % – 40 % = 20 % ; 90 % – 60 % = 30 % ; l'équilibre est réalisé par : $6 \times 20\ \% = 4 \times 30\ \%$.

Exercice résolu 3

Le titre d'un alliage est le quotient du poids de métal fin par le poids total de l'alliage.

- Il existe de vieilles pièces françaises en alliage d'argent du début du vingtième siècle : des pièces de 5 francs au titre 0,900 (ce qui signifie qu'elles contiennent 90 % de leur poids en argent) et des pièces de 2 francs au titre 0,835 (ce qui signifie qu'elles contiennent 83,5 % de leur poids en argent).
- On fond ensemble pour faire un lingot 3 kg de pièces de 5 francs, et 2 kg de pièces de 2 francs. Quel est le titre du mélange obtenu ?

Le poids total du lingot est : $3 + 2 = 5$ kg.

Le poids d'argent dans le lingot est :

$$3 \times 0{,}9 + 2 \times 0{,}835 = 2{,}7 + 1{,}670 = 4{,}370 \text{ kg}$$

Le titre du lingot est : $4{,}370/5 = 0{,}874$.

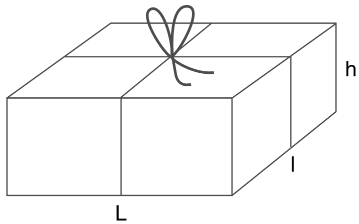
Exercices d'entraînement

Niveau 1

1 Le litre de bon lait pèse 1,030 kg.
On achète 15 litres de lait qui pèsent 15,375 kg.
Montrer que le lait n'est pas pur. Quelle quantité d'eau y a été mélangée ?

2 Un épicier a compté par erreur un poids de 50 grammes au lieu d'un poids de 20 g dans une pesée qu'il a estimée à 375 g d'épices. Celles-ci coûtent 28 € le kilo. Quelle somme a-t-il demandée en trop ?

3 On veut faire un paquet cadeau (voir dessin). On donne L = 25 cm, l = 15 cm, h = 12 cm. Calculer la longueur de la ficelle nécessaire sans les nœuds.



4 Le tableau ci-dessous donne un certain nombre d'informations sur quelques animaux.

Animal	Poids à l'âge adulte	Longévité	Nombre de petits par portée	Durée de gestation
Éléphant	de 5 000 kg à 7 000 kg	55 ans	1	de 649 à 668 jours
Ours brun	de 90 kg à 350 kg	30 ans	2 ou 3	de 210 à 240 jours
Rat blanc	de 80 g à 180 g	4 ans	de 4 à 12	de 21 à 23 jours
Renne	de 120 kg à 150 kg	15 ans	1 ou 2	de 235 à 240 jours
Lion	de 100 kg à 190 kg	25 ans	de 2 à 7	de 105 à 119 jours
Loutre	de 10 kg à 16 kg	19 ans	de 1 à 5	de 60 à 63 jours

Quel est le nom de l'animal qui a eu une période de gestation de 238 jours et un seul petit ?

❒ **a.** lion ❒ **b.** loutre ❒ **c.** ours brun ❒ **d.** renne ❒ **e.** rat blanc

5 Une classe organise une sortie qui coûte en tout 1 300 euros. Cette sortie est payée par les élèves, par la mairie, et par la coopérative.

Les 24 élèves donnent chacun 20 euros. La mairie verse 520 euros. Combien la coopérative doit-elle verser ?

❒ **a.** 200 euros ❒ **c.** 30 euros ❒ **e.** 480 euros

❒ **b.** 300 euros ❒ **d.** 120 euros

6 Voici un horaire des trains partant de Dijon vers Mouchard.

Gares	Numéro du train	123	755	225	195	421	201
DIJON	*Départ*	00:35	02:52	03:06	05:49	09:12	11:50
GENLIS		↓	↓	↓	06:03	↓	12:03
AUXONNE		↓	03:09	↓	06:18	↓	12:14
DOLE	*Arrivée*	01:01	03:23	03:39	06:31	09:30	12:23
DOLE	*Départ*	01:09	03:34	03:49		09:40	12:33
MOUCHARD		↓	04:21	04:32		↓	13:21

Quel est le numéro du train qu'il faut prendre si l'on veut ne pas se lever trop tôt à Dijon et être à Dôle pour 8 heures du matin ?

❒ **a.** 755 ❒ **b.** 225 ❒ **c.** 195 ❒ **d.** 421 ❒ **e.** 123

7 Hugues Capet, premier roi de la famille des Capétiens, a régné de 987 à 996. Les rois capétiens se sont succédé sans interruption jusqu'à Charles IV, le dernier d'entre eux, Charles IV a régné de 1322 à 1328.

Quelle est la durée du règne des Capétiens ?

❒ **a.** 9 ans ❒ **c.** 341 ans

❒ **b.** 326 ans ❒ **d.** 15 ans

❒ **e.** on ne peut pas le savoir, il manque des données

Niveau 2

8 Une ménagère peut acheter un rôti de 2,5 kg à 12 € le kg, mais contenant 500 g d'os, ou bien du rôti désossé à 16 € le kg. Combien gagne-t-elle ou perd-elle en choisissant l'une ou l'autre solution ?

9 Dans une ville de 12 000 habitants adultes, il y a 9 500 lecteurs du journal « Le Carillon » et 6 300 lecteurs du journal « Le Réveil ».

On sait que 2 400 personnes ne lisent aucun journal.

Combien y a-t-il de lecteurs des deux journaux ?

10 On dispose de quatre pièces d'un euro, qu'on aligne soit côté face soit côté pile. Par exemple on peut obtenir la disposition : Face, Face, Pile, Face. Combien de dispositions différentes de celle-ci peut-on obtenir ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 12 ❒ **d.** 16 ❒ **e.** 15

11 Pour l'excursion de fin d'année du collège, 412 élèves sont présents et répartis dans des grands cars de 56 places ou des petits cars de 44 places. Tous les cars sont pleins et il y a deux grands cars de plus que de petits cars. Combien y a-t-il de cars en tout ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** 5 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** 9 ❒ **e.** 10

12 Combien de feuilles de format 21 cm $\times$ 29,7 cm faut-il juxtaposer au minimum (sans recouvrement entre elles) pour recouvrir parfaitement un carré d'aire 1,44 m^2 ?

❒ **a.** 27 ❒ **b.** 30 ❒ **c.** 25 ❒ **d.** 26 ❒ **e.** 28

13 Dans l'écriture 12345678910111213141516171819202122232425 on barre des chiffres de façon que les 35 chiffres restants forment le nombre le plus petit possible. Quels sont les nombres barrés pris dans leur ordre de gauche à droite ?

❒ **a.** 1234567 ❒ **b.** 956789 ❒ **c.** 232425 ❒ **d.** 456789 ❒ **e.** 789789

14 Deux professeurs et leurs 40 élèves africains doivent traverser un fleuve alors qu'ils ne disposent que d'une barque ne pouvant contenir plus de 100 kg. Chaque élève pèse 50 kg et chaque professeur 100 kg.

Combien de traversées au minimum seront nécessaires pour faire passer tout le monde ? (Attention, un aller-retour compte pour deux traversées.)

❒ **a.** 84 ❒ **b.** 85 ❒ **c.** 86 ❒ **d.** 87 ❒ **e.** 90

Niveau 3

15 On compose un bon café en mélangeant 3 parties de moka avec 2 parties de café du Brésil et 4 de Saint-Domingue. On considère qu'à l'état vert le moka vaut 15,80 € le kg, le Brésil 10 € le kg et le Saint-Domingue 11,20 € le kg. Durant la torréfaction, le café perd un cinquième de son poids. À combien reviendra un kilogramme de ce café ainsi mélangé et torréfié ?

16 Le beurre coûte 3,80 € le kilo et le saindoux 1,40 € le demi-kilo. Un cuisinier fond ensemble 4,5 kg de beurre et 3,250 kg de saindoux. Le mélange perd à la cuisson un cinquième de son poids.

À combien revient 1 kg de ce mélange ?

17 Dans quelle proportion faut-il mélanger du vin à 240 € l'hectolitre et du vin à 180 € l'hectolitre pour obtenir du vin à 200 € l'hectolitre ?

18 Muriel et Michel ont inventé un nouveau jeu : on lance à tour de rôle 4 dés, et pour chacun des dés :
– si le résultat est pair (2, 4, 6), on le multiplie par 2;
– si le résultat est impair, on le garde.
On additionne ensuite les 4 nombres obtenus. L'enfant qui a le plus grand total a gagné.
Dans cette partie, Muriel et Michel sont à égalité.
Muriel a obtenu 2, 6, 3, 5.
Michel a lancé 3, 4, 1 et un quatrième nombre : lequel ?

19 Un établissement scolaire a un effectif de 521 élèves; il y a 315 demi-pensionnaires, 310 membres de l'Association Sportive et 70 externes non-membres de l'Association Sportive. Combien y a-t-il de demi-pensionnaires membres de l'Association Sportive ?

20 Dans l'égalité suivante, vous devrez noircir deux cases de votre choix (à l'exception de la case « = ») pour obtenir une phrase juste.

Exemple

2	9	3	+	5	×	4	=	7	7

devient :

2	■	3	+	5	■	4	=	7	7

Faites de même pour :

4	9	×	3	1	4	+	3	4	×	1	9	0	=	2	0	0	6

Les cases noircies cacheront les nombres :
❒ **a.** 4 et 3 ❒ **b.** 1 et 0 ❒ **c.** × et 9 ❒ **d.** 1 et 9 ❒ **e.** 4 et 4

Corrigés des exercices

Niveau 1

1 Les 15 litres de lait pur devraient peser : $1,030 \times 15 = 15,450$ kg. Comme ils ne pèsent que 15,375 kg, c'est qu'il y a de l'eau dans les 15 litres. Il manque :

$$15,450 - 15,375 = 0,075 \text{ kg soit } 75 \text{ g}$$

Quand on remplace un litre de lait par un litre d'eau il manque 30 g, donc s'il manque 75 g c'est qu'on a remplacé : $75/30 = 2,5$ litres de lait par 2,5 litres d'eau.

2 La pesée a été majorée de : $50 - 20 = 30$ g soit 0,030 kg

L'épicier a fait payer en trop : $28 \times 0{,}030 = 0{,}84$ €

3 En observant bien le dessin, on voit que la longueur de la ficelle est égale à :

$$2\text{ L} + 2\text{ l} + 4\text{ h} = 2 \times 25 + 2 \times 15 + 4 \times 12 = 128\text{ cm}$$

4 **Réponse d.**

Les possibilités pour la bonne durée de gestation sont l'ours et le renne. Le nombre de petits par portée élimine l'ours. La réponse est le renne.

5 **Réponse b.**

Les élèves donnent $20 \times 24 = 480$ euros. La coopérative doit verser :

$$1\,300 - 480 - 520 = 300\text{ euros}$$

6 **Réponse c.**

Il faut arriver à 6 h 31(après, c'est trop tard), et donc être parti à 5 h 49 par le train 195.

7 **Réponse c.**

Il y a des données chiffrées inutiles.

Il n'y a pas eu d'interruption de règnes, donc il suffit de faire la soustraction :

$$1\,328 - 987 = 341\text{ ans}$$

Niveau 2

8 Poids de viande sans os permettant la comparaison :

$$2{,}5\text{ kg} - 0{,}5\text{ kg} = 2\text{ kg}$$

Prix de la viande avec os : $12 \times 2{,}5 = 30$ €

Prix de la viande désossée : $16 \times 2 = 32$ €

La ménagère gagne : $32 - 30 = 2$ euros à désosser elle-même sa viande

9 Un dessin avec des « patates » (un diagramme de Venn) permet de s'y retrouver visuellement.

Le nombre de personnes qui lisent est : $12\,000 - 2\,400 = 9\,600$.

Si l'on additionne les lecteurs des deux journaux il y a :

$$9\,500 + 6\,300 = 15\,800\text{ personnes}$$

ce qui représente $15\,800 - 9\,600 = 6\,200$ personnes en trop : ce sont celles qui ont été comptées en double parce qu'elles lisent les deux journaux.

10 **Réponse e.**

Il y a deux possibilités pour chaque pièce, donc $2 \times 2 = 4$ cas de figures avec deux pièces, $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilités pour trois pièces, et $2^4 = 16$ possibilités pour quatre pièces. En enlevant l'exemple, il reste $16 - 1 = 15$ dispositions différentes.

11 Réponse c.

On peut appeler x le nombre de grands cars, et alors le nombre des petits cars est $(x - 2)$. Le nombre d'élèves est : $56x + 44\ (x - 2) = 412$.

On obtient $100x = 500$ puis $x = 5$.

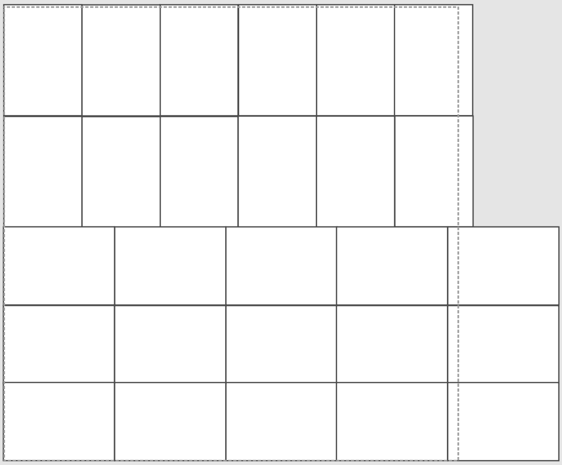
Il y a 5 grands cars, 3 petits cars et donc en tout : $5 + 3 = 8$ cars.

12 Réponse a.

Si l'aire est 1,44 m^2, c'est que le côté du carré est 1,2 m.(La racine carrée de 1,44 est 1,2.)

Combien de largeurs de 21 cm peut-on mettre dans 120 cm ? Réponse : 5, mais tout ne sera pas recouvert. Si l'on veut recouvrir, il en faut 6.

Combien de longueurs de 29,7 cm faut-il pour recouvrir 120 cm ? Réponse : il en faut au moins 5 (4 ne suffisent pas, de peu…).



On peut donc penser recouvrir le carré avec : $5 \times 6 = 30$ feuilles.

Mais y a-t-il moyen de faire moins de 30 ? Oui…

Sur un côté on place 3 largeurs de 21 cm et 2 longueurs de 29,7 cm : le total fait 122,4 cm ce qui dépasse les 120 cm.

Sur les 3 largeurs on monte 5 longueurs de 29,7 cm.

Sur les 2 longueurs de 29,7 cm on monte 6 largeurs.

On utilise ainsi : $3 \times 5 + 2 \times 6 = 27$ feuilles seulement.

13 Réponse d.

Il y a 41 chiffres, il faut donc en éliminer 6 (ce qui exclut la première réponse). Les petits chiffres 10111… qui arrivent vite quand on parcourt de la gauche vers la droite incitent à éliminer à leur gauche six chiffres. Le choix est vite fait et la comparaison avec les autres propositions d'élimination rapide.

14 Réponse b.

On fait traverser deux élèves, il en reste un de l'autre côté, l'autre revient. On recommence cette traversée aller-retour, il y a alors 2 élèves de l'autre côté. On continue ainsi de façon à faire 39 allers-retours qui laissent 39 élèves de l'autre côté, et les deux profs et un élève sur la rive de départ. On en est à : $39 \times 2 = 78$ traversées déjà…

Un prof traverse, un élève revient : il reste 1 prof et 2 élèves à traverser, et on en est à 80 traversées. Le dernier prof traverse et un élève revient : il reste 3 élèves à traverser et on en est à 82 traversées.

Deux élèves traversent, l'un descend, l'autre retourne chercher le dernier et revient avec lui, on arrive à : $82 + 3 = 85$ traversées.

Niveau 3

15 En ajoutant 3 kg de moka, 2 kg du Brésil, 4 kg de Saint Domingue on obtient 9 kg de café. La perte de poids d'un cinquième laisse quatre cinquièmes de 9 kg soit :

$$9 \times 4/5 = 7{,}2 \text{ kg}$$

Le prix de revient du mélange est :

$$(3 \times 15{,}8) + (2 \times 10) + (4 \times 11{,}2) = 112{,}20 \text{ €}$$

Un kilogramme revient donc à : $112{,}20/7{,}2 =$ environ 15,58 euros.

16 Poids du mélange mis à fondre : $4{,}5 + 3{,}250 = 7{,}750$ kg.

Après perte d'un cinquième, il reste quatre cinquièmes du poids donc :

$$7{,}750 \times 4/5 = 6{,}2 \text{ kg}$$

Prix du mélange (attention au prix du demi-kilo) :

$$(3{,}80 \times 4{,}5) + (2 \times 1{,}40 \times 3{,}250) = 26{,}20 \text{ €}$$

Prix de revient d'un kilo de mélange :

$$26{,}20/6{,}2 = \text{environ } 4{,}23 \text{ euros}$$

17 Soit x le nombre d'hectolitres de vin à 240 € l'hectolitre, et y le nombre d'hectolitres de vin à 180 € l'hectolitre. On obtient $(x + y)$ litres à 200 € l'hectolitre.

Le prix du mélange était : $240x + 180y$, et donc :

$$240x + 180y = 200(x + y)$$

$$240x + 180y = 200x + 200y$$

ce qui se simplifie en : $40x = 20y$ d'où $2x = y$.

Il faut donc deux fois plus d'hectolitres à 180 € que d'hectolitres à 240 €.

Les proportions du mélange sont : un tiers de vin à 240 € et deux tiers de vin à 180 € l'hectolitre.

18 Le total de Muriel est : $2 \times 2 + 6 \times 2 + 3 + 5 = 24$.

Le total de Michel doit être le même, et le total de ses trois premiers résultats est : $3 + 4 \times 2 + 1 = 12$. Il lui manque 12 points. Il ne peut les avoir obtenus qu'en faisant un six dont le total a été doublé.

Le quatrième nombre est un 6.

19 On peut faire un tableau à double entrée et le compléter petit à petit.

	demi-pensionnaires	externes	total
membres de l'A. Sportive	174	136	310
non-membres	141	70	211
total	315	206	521

On remplit d'abord les lignes et colonnes où figurent les totaux 521, 315, 310, et où l'on obtient par soustraction les nombres 206 et 211. Ensuite on remplit la case « externes non sportifs » (70), et on trouve les nombres intérieurs au tableau en faisant des soustractions.

Il y a 174 demi-pensionnaires membres de l'Association sportive.

20 Réponse d.

4	9	×	3		4	+	3	4	×	1		0	=	2	0	0	6

En noircissant le 1 et le 9 on obtient $49 \times 34 + 34 \times 10 = 2\,006$.

On peut faire des essais avec les diverses propositions, dont certaines peuvent être éliminées rapidement pour des raisons d'ordre de grandeur du résultat.

Calcul mental rapide 22

Il n'y a pas d'épreuve de calcul mental proprement dite dans les concours, mais l'aptitude à compter mentalement avec efficacité et rapidité est une clef importante de succès et un sérieux atout pour vous démarquer des autres candidats car, si vous comptez vite, vous aurez le temps d'aborder plus de questions. Ce chapitre est donc particulièrement nécessaire à nos yeux.

Comme la calculatrice n'est en général pas autorisée dans les concours, les calculs sont souvent assez stéréotypés, les nombres choisis « s'emboîtent bien », permettant de trouver des résultats assez facilement de tête. Il est plus rare d'avoir à poser des opérations et d'être obligé de les faire « à la main ».

De plus, vous verrez plus loin sur des exemples que certains automatismes de calcul mental permettent, dans des exercices aux énoncés déstabilisateurs, de trouver la tactique à utiliser là où elle n'est pas *a priori* évidente, en regardant simplement les nombres qui figurent dans l'énoncé.

Multiplications et divisions

Tables de multiplication

Il est nécessaire de bien les maîtriser…

Quelques **produits particuliers** reviennent souvent :

$5 \times 20 = 100$; $50 \times 0{,}2 = 10$; $5 \times 0{,}2 = 1$;

$4 \times 25 = 100$; $4 \times 2{,}5 = 10$; $0{,}4 \times 2{,}5 = 1$; $2{,}5 \times 40 = 100$;

$250 \times 0{,}4 = 100$;

$8 \times 125 = 1\ 000$; $8 \times 12{,}5 = 100$; $8 \times 0{,}125 = 1$; $1{,}25 \times 8 = 10$;

$12{,}5 \times 80 = 1\ 000$.

Comment se ramener à des calculs simples ?

En décomposant l'opération

- pour **diviser par 5** on peut multiplier par 2 et diviser par 10 (dans l'ordre qu'on veut). Ainsi $64/5 = 64 \times 2/10 = 128/10 = 12{,}8$;
- pour **multiplier par 5** on peut multiplier par 10 et diviser par 2.

Ainsi $98 \times 5 = 980/2 = 490$.

- pour **diviser par 25** on peut multiplier par 4 et diviser par 100.

Ainsi $130/25 = 130 \times 4/100 = 520/100 = 5{,}2$.

- pour **multiplier par 25** on peut multiplier par 100 et diviser par 4. Ainsi $48 \times 25 = 48 \times 100/4 = 1\,200$;
- pour **diviser par 125** on peut diviser par 1 000 et multiplier par 8. Ainsi $21/125 = 21 \times 8/1\,000 = 168/1\,000 = 0{,}168$;
- pour **multiplier par 125** on peut multiplier par 1 000 et diviser par 8. Ainsi $56 \times 125 = 56\,000/8 = 7\,000$;
- pour **multiplier par 15** on peut multiplier par 10 et ajouter la moitié. Ainsi $62 \times 15 = 620 + 310 = 930$;
- **diviser par 0,1 c'est multiplier par 10**, diviser par 0,01 c'est multiplier par 100, etc. Ainsi $45/0,001 = 45 \times 1\,000 = 45\,000$.

En s'aidant des règles de calcul

- **par commutativité** :
  $2 \times 13 \times 0{,}5 = 2 \times 0{,}5 \times 13 = 1 \times 13 = 13$.
  $12{,}5 \times 42 \times 8 = 12{,}5 \times 8 \times 42 = 100 \times 42 = 4\,200$.
  $175 \times 24 = 25 \times 7 \times 4 \times 6 = 25 \times 4 \times 7 \times 6 = 100 \times 42 = 4\,200$.
- par **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction :
  $41 \times 12 = 41 \times (10 + 2) = 41 \times 10 + 41 \times 2 = 410 + 82 = 492$;
  $37 \times 19 = 37 \times (20 - 1) = 37 \times 20 - 37 \times 1 = 740 - 37 = 703$.

Sophie achète 3 paquets à 17 € l'un, puis 7 paquets à 17 € l'un. Quelle est la dépense totale ?

$$17 \times 3 + 17 \times 7 = 17\,(3 + 7) = 17 \times 10 = 170 \text{ €}$$

- grâce aux **identités remarquables :**
  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ donc
  $52 \times 48 = (50 + 2)\,(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2\,500 - 4 = 2\,496$;
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ donc
  $41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2(1)(40) + 1^2 = 1\,600 + 80 + 1 = 1\,681$;
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ donc
  $39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2(1)(40) + 1^2 = 1\,600 - 80 + 1 = 1\,521$.

Multiplication par 11

On peut écrire facilement le résultat…

> **Exemples**
>
> $45 \times 11 = 495$; $6\,253 \times 11 = 68\,783$

On trouve comme chiffre des unités celui du nombre multiplié par 11. Pour avoir le chiffre des dizaines du résultat on ajoute le chiffre des unités et le chiffre des dizaines du nombre. Pour avoir le chiffre des centaines on ajoute le chiffre des dizaines et le chiffre des centaines du nombre et éventuellement la retenue du résultat précédent, et on continue ainsi de la droite vers la gauche jusqu'à réécrire le chiffre de gauche augmenté éventuellement de la retenue du calcul précédent.

Un dernier exemple, détaillé, avec $5\,837 \times 11$:

Le chiffre des unités sera 7.

Le chiffre des dizaines se trouve par $7 + 3 = 10$ on écrira 0 et on retient 1. Le chiffre des centaines sera donné par $8 + 3 + 1$(retenue) = 12, on écrira 2 et on retiendra 1.

Le chiffre des milliers sera donné par $5 + 8 + 1$ (retenue) = 14, on écrira 4 et retiendra 1.

Le dernier chiffre à gauche sera $5 + 1$ (retenue) = 6.

Résultat final : $5\,837 \times 11 = 64\,207$

Les carrés, cubes et racines carrées

• Quelques **carrés** à savoir par cœur :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

X	16	17	18	19	20	25	30	35	40	45	50
X^2	256	289	324	361	400	625	900	1 225	1 600	2 025	2 500

Remarquons que les carrés peuvent finir par 0, 1, 4, 5, 6, 9 comme chiffre des unités, mais jamais par 2, 3, 7, 8. Ainsi, sans savoir calculer une racine carrée on peut dire que 354 678 ne peut être le carré d'un entier car il finit par 8.

• **Calcul du carré d'un nombre finissant par 5.** Il se termine toujours par 25.

Si le nombre dont on cherche le carré s'écrit d5, avec d représentant le nombre formé des chiffres à gauche du 5, il faut calculer le produit $d(d+1)$ et écrire à sa droite 25.

Par exemple le carré de 65 s'obtient en considérant $d = 6$ donc $d+1 = 7$, calculons $6 \times 7 = 42$. On écrit 25 à sa droite, et on trouve $65^2 = 4\,225$.

Autre exemple : le carré de 105. On imagine d = 10 donc d + 1 = 11 ; on calcule $10 \times 11 = 110$, on écrit 25 à droite et on a $105^2 = 11\,025$.

• Quelques **cubes** à savoir par cœur :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000	1 331	1 728

Remarquons que les cubes des nombres finissant par 0, 1, 4, 5, 6, 9 se terminent avec ces mêmes chiffres pour unités, et que pour les autres il y a un croisement des unités du nombre et de son cube :

2-8 ou 8-2, 3-7 ou 7-3.

Exemple d'utilisation :

Je réalise une réduction d'un objet, en divisant ses dimensions par 4.

Par combien est divisé son volume et son poids ?

Par $4^3 = 64$, car si les dimensions sont divisées ou multipliées par le nombre k, les aires sont alors divisées ou multipliées par le nombre k^2, et les volumes ou les masses sont divisés ou multipliés par le nombre k^3.

Autre exemple :

Si un modèle réduit de même matière que le modèle original a une masse 125 fois moindre, c'est que chaque dimension a été divisée par la racine cubique de 125, qui est 5 car je sais que le cube de 5 est 125.

• Un calcul mental rapide permet aussi de **simplifier des calculs** avec des **racines carrées** :

Exemple

$$\sqrt{98} \times \sqrt{50} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{25} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

Additions et soustractions

Comment se ramener à des calculs simples ?

● **En décomposant l'opération :**

– Pour **ajouter 11** on ajoute 10, et on ajoute encore 1.

– Pour **retrancher 11**, on enlève 10 puis on enlève encore 1.

– Pour **ajouter 9**, on ajoute 10 et on enlève 1.

– Pour **retrancher 9**, on enlève 10 et on ajoute 1.

– Pour **ajouter 99**, on ajoute 100 et on enlève 1.

– Pour **retrancher 99**, on enlève 100 et on ajoute 1.

– Pour **ajouter 999**, on ajoute 1 000 et on enlève 1.

– Pour **retrancher 999**, on enlève 1 000 et on ajoute 1.

– De même :

53 – 19 = 53 – (20 – 1) = 53 – 20 + 1 = 33 + 1 = 34 ;

74 – 26 = 74 – (20 + 6) = 74 – 20 – 6 = 54 – 6 = 48

- **En décalant**

Calculer 31 – 18 c'est, en décalant chaque nombre de 1, comme : calculer 30 – 17, donc cela fait 13.

- **En s'aidant des règles de calcul**

Les règles de commutativité et d'associativité permettent de changer la place des nombres dans les calculs pour les rendre plus simples :

0,52 + 1 299 + 0,48 = 0,52 + 0,48 + 1 299 = 1 + 1 299 = 1 300.

– 16 + 254 – 14 – 70 = – 16 – 14 – 70 + 254 = – 30 – 70 + 254 = – 100 + 254 = + 154.

Les fractions

Comment se ramener à des calculs simples ?

- En **décomposant la fraction**

44/66 = 2/3

75/100 = 3/4 ; 13/52 = 1/4

36/48 + 75/35 = (3 × 12)/(4 × 12) + (5 × 15)/(5 × 7) = 3/4 + 15/7
= (21 + 60)/28 = 81/28.

- **En remplaçant des nombres décimaux par des fractions simples**

0,5 = 1/2 ; 0,25 = 1/4 ; 0,2 = 1/5 ;

0,75 = 3/4 ; 0,1 = 1/10 ; 0,125 = 1/8 ; 0,04 = 1/25 ;

0,025 = 1/40 ; 0,02 = 1/50 ; 0,05 = 1/20.

Ainsi pour **multiplier par 0,125** on peut diviser par 8.

Inversement, pour **diviser par 5** on peut multiplier par 0,2.

Pour **multiplier par 0,75** on peut prendre les trois quarts.

Pour **diviser par 0,75** on peut diviser par 3/4 donc multiplier par 4/3, c'est-à-dire multiplier par 4 et diviser par 3.

Conversion de temps en fraction

15 min = 1/4 h ; 45 min = 3/4 h ;

20 min = 1/3 h ; 10 min = 1/6 h ; 40 min = 2/3 h.

Ainsi si je roule pendant 40 min à 90 km/h la distance que je parcours est les 2/3 de celle qu'on fait en une heure, donc :

$90 \times 2/3 = (90/3) \times 2 = 30 \times 2 = 60$ km.

Pourcentages

Prendre **50 % d'un nombre** c'est le diviser par 2 ou prendre la moitié.

Prendre **20 % d'un nombre** c'est le diviser par 5, ou prendre deux fois 10 %.

Prendre **25 % d'un nombre** c'est prendre le quart du nombre, soit la moitié de 50 %.

Pour trouver un prix après **remise de 20 %** il est plus rapide de prendre 80 % ou de multiplier par 0,8 (en effet 100 % – 20 % = 80 %).

Multiplier par 1,5 c'est ajouter 50 % (en effet on passe de 100 vers 150).

Augmenter de 200 % c'est multiplier par 3 (en effet on passe de 100 vers 300, donc on multiplie 100 par 3). Si des prix ont été multipliés par 4, de quel pourcentage ont-ils augmentés ? De 300 %. (On passe de 100 à 400 en ajoutant 300).

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par 2 (pair) si et seulement s'il se termine par 0 ou 2, 4, 6, 8.

Un nombre est divisible par 3, ou par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3, ou par 9.

> Exemple
>
> 2 016 est divisible par 3 et par 9 car la somme de ses chiffres est $2 + 0 + 1 + 6 = 9$ et ce nombre se divise par 3 et par 9.
> Par contre 2013 est divisible par 3 mais pas par 9, car la somme de ses chiffres soit 6, est divisible par 3 mais pas par 9.

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé des deux derniers chiffres à droite est lui-même divisible par 4.

> Exemple
>
> 2 028 est divisible par 4 car 28 l'est, par contre 2 026 ne l'est pas car 26 ne l'est pas.

Un nombre est divisible par 8 si et seulement s'il se termine par trois chiffres à droite donnant un nombre divisible par 8.

> Exemple
>
> 2 168 est divisible par 8 car 168 l'est ($168 = 8 \times 21$).

Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair à partir de la droite et de la somme de ses chiffres de rang impair est nulle ou multiple de 11.

> Exemples
>
> 453 761 est divisible par 11 car la différence entre $1 + 7 + 5 = 13$ et $6 + 3 + 4 = 13$ est nulle.
>
> 570 416 est divisible par 11 car la différence entre $6 + 4 + 7 = 17$ et $1 + 0 + 5 = 6$ est égale à 11.
>
> 777 n'est pas divisible par 11, la différence entre $7 + 7 = 14$ et 7 n'est ni nulle ni égale à 11.

Un nombre est divisible par 5 si et seulement s'il se termine par 5 ou 0.

Un nombre est divisible par 25 si et seulement s'il se termine par 25, 50, 75, ou 00.

Un nombre est divisible par 125 si et seulement s'il se termine par trois chiffres à droite qui donnent 000 ou des multiples de 125 (125, 250, 375, 500, 675, 750, 875).

Les ordres de grandeur

> Exemple 1
>
> Puis-je acheter un rôti de 740 g de bœuf à 19,5 € le kilo avec 15 € ?
>
> Oui car le prix est inférieur à $0{,}750 \times 20 = 20 \times 3/4 = 15$ euros.

> Exemple 2
>
> Encadrer des racines carrées non évidentes grâce aux carrés parfaits qu'on connaît. Ainsi si j'ai un carré de 179 m^2 d'aire je sais que son côté, qui est la racine carrée de 179, est encadré par 13 m et 14 m (car $13^2 = 169$ et $14^2 = 196$ encadrent 179).

Situations de proportionnalité

Exemple

12 litres d'essence m'ont coûté 17,4 euros. Combien vont me coûter 24 litres ?

Au lieu de faire une règle de trois ou des calculs plus compliqués du prix au litre, je remarque que 24 étant le double de 12, le prix sera le double de 17,4 euros donc 34,8 euros.

Résolutions d'équations littérales

On peut se poser (pas tout haut !) des questions qui aident à organiser les étapes de la résolution d'une équation et les calculs à faire…

Exemple 1

Quel nombre mettre à la place des pointillés si $3 \times \ldots - 7 = 11$?

De quel nombre faut-il enlever 7 pour trouver 11 ? C'est $11 + 7 = 18$. Quel est le nombre qui multiplié par 3 donne 18 ? C'est $18/3 = 6$.

Les pointillés valent 6.

Exemple 2

Combien vaut la lettre x telle que $38/(4 + 5x) = 2$?

Par combien faut-il diviser 38 pour trouver 2 ? Par $38/2 = 19$.

Combien faut-il ajouter à 4 pour trouver ce 19 ? C'est $19 - 4 = 15$.

Comme $5x = 15$ c'est que $x = 15/5 = 3$.

Exercices d'entraînement

On calculera toujours de tête sans poser les opérations ni utiliser une calculatrice, mais on peut parfois écrire des modifications utiles d'énoncé ou des résultats intermédiaires.

1 Calculer le prix de 250 autocollants à 18 euros la centaine.

2 Quel est le nombre qui, multiplié par 0,125 donne l'unité pour produit ?

3 Le périmètre d'un triangle est de 150 m. Le côté moyen mesure 10 m de moins que le plus grand et 10 m de plus que le plus petit. Calculer la longueur des trois côtés.

4 Une vigne comprend 15 rangs de 120 m de long chacun. Les ceps sont espacés de 0,80 m et il y en a un au bout de chaque rang. Calculer le nombre de ceps.

5 Un champ a été payé 168 000 euros à raison de 140 000 euros l'hectare. Quelle est son aire en ares ?

6 Calculer l'aire d'un carré de 380 m de périmètre.

7 Quel est le périmètre d'un carré de 196 m^2 d'aire ?

8 Combien de carreaux de 0,15 m de côté faut-il pour carreler une cuisine carrée ayant 4,50 m de côté ?

9 Calculer le prix du kilogramme d'un savon de luxe vendu 175 euros les 25 kg.

10 Vous achetez 18 serviettes à 16,80 euros la douzaine. Combien paierez-vous ?

11 On a jalonné le pourtour d'un carré en plantant 56 piquets espacés de 5 m chacun. Calculez le côté du carré.

12 Quel est le prix de la tonne d'une marchandise quand 125 kg valent 1 750 euros ?

13 Combien de décimètres cubes contient un tonneau que l'on a empli en y versant 15 seaux d'eau de 12 litres chacun ?

14 Quel est le volume d'un cube de 15 cm d'arête ?

15 On estime que dans une chambre à coucher il faut au moins 25 mètres cubes d'air par personne. Une chambre destinée à recevoir un couple mesure 2,5 m $\times$ 5 m $\times$ 3,5 m. Répond-elle aux conditions ?

16 Quel est le prix de 750 g de café à 1,9 euros le demi kilo ?

17 Calculer $327{,}4 \times 4 \times 125$.

18 Le premier janvier étant un mardi, quel jour est le premier mars (année ordinaire non bissextile) ?

19 Il est 9 h du matin. Quelle heure sera-t-il quand la trotteuse (aiguille des secondes) aura fait 720 tours ?

20 Une pendule retarde de 3 minutes par jour. On la met à l'heure aujourd'hui à 6 h du matin. Quelle heure marquera-t-elle demain quand il sera réellement 10 h du matin ?

21 Une montre avance de 4 minutes en 24 heures. On l'a mise à l'heure hier à midi. Quelle heure marquera-t-elle aujourd'hui quand il sera réellement 18 h ?

22 Une horloge retarde de 2 minutes toutes les 6 heures. Quand l'avait-on mise à l'heure exacte si le dimanche à 13 h 05 min elle marquait 12 h 35 min ?

23 Un vélo passe la borne kilométrique 22 à 15 h 36 min 4 s, et la borne kilométrique 25 à 15 h 48 min 4 s. Quelle est la vitesse du vélo ?

24 Calculer $29^2 + 31^2$.

25 Combien une barrique de cidre de 450 litres peut-elle contenir de bouteilles de 75 cL ?

26 Une boîte cubique a 0,15 m d'arête. Quelle est la longueur totale de ses arêtes ? Quelle est son aire latérale ? Quel est son volume ? Combien faudrait-il de cubes de 3 cm d'arête pour le remplir ?

27 Calculer $48 \times 52 + 101 \times 14$.

28 Calculer $268 \times 9 + 11 \times 268$.

29 Une personne immobile sur le quai d'une gare voit passer un train de 360 m de long devant elle en 18 secondes. Quelle est la vitesse du train en kilomètres à l'heure ?

30 Une auto met 5 h pour faire un trajet à la moyenne de 96 km/h. Si sa vitesse avait pu être plus élevée d'un quart, combien de temps aurait-elle mis ?

31 Un très grand plat circulaire pour la cuisson de la paella a une aire de 1 900 cm^2. Si l'on prélève une partie de la paella ayant la forme d'un secteur circulaire de 72 degrés d'angle au centre, quelle aire en cm^2 cela représente-t-il ?

32 On a vendu les 3/5 du vin contenu dans une barrique et il reste 48 litres de vin dedans. Quel est la contenance de la barrique pleine ?

33 Avec les 3/4 de la somme qu'elle avait sur elle, une personne a acheté 45 m d'un beau tissu. Quelle longueur aurait-elle obtenu avec la moitié de ce qu'elle possédait ?

34 Deux fûts contiennent ensemble 420 litres. L'un contient les 3/4 de l'autre. Quelle est la contenance de chaque fût ?

35 Calculer le montant des intérêts simples sur un trimestre pour un placement à 4 % l'an de 3 800 euros.

36 Quels sont les intérêts simples d'une somme de 12 400 euros placés à 4 % l'an pendant 15 mois ?

37 Dans 1500 pommes, combien y a-t-il de quarterons de pommes ? (un quarteron = 25 unités).

38 Calculer 8×374, 7×125.

39 On écrit un zéro à la droite d'un nombre de deux chiffres. Le nombre obtenu dépasse de 531 le nombre de départ. Combien valait ce dernier ?

40 Un élève étourdi a multiplié un nombre par 68 au lieu de le multiplier par 62. Son résultat est trop élevé de 2 550. Quel était le nombre multiplié ?

41 Sur un globe terrestre de 80 centimètres de circonférence, on mesure grâce à une ficelle la distance qui sépare deux points pris sur le même méridien : on trouve 26 cm. Calculer la distance réelle entre ces deux points (on rappelle que la longueur du méridien est 40 000 km).

42 Un père et son fils, se tenant par la main, parcourent ensemble 100 m. Le père a fait 125 pas. Le fils fait 8 pas quand son père en fait 5. Combien le fils a-t-il fait de pas ? Quelle est la longueur en centimètres du pas du fils ?

43 Combien de clous faudra-t-il pour fixer le couvercle rectangulaire d'une caisse en bois de dimensions 1,19 m sur 0,84 m sachant que l'on place les clous à 2 cm des bords de la caisse, et qu'on les espace de 5 cm l'un l'autre ?

44 Une auto roulant sur un circuit privé à 144 km/h met 25 secondes d'un point à un autre. Quelle distance a-t-elle parcourue ?

45 Parmi les nombres suivants : 4 752, 666, 6 666, 9 944, et 777 777, quels sont ceux qui sont divisibles par 9 ? Par 11 ?

46 Calculer 325×21.

47 Calculer 415×18.

48 Calculer 63×22.

49 Calculer $228 \times 0{,}55$.

50 Calculer $48 \times 3{,}125$.

51 Calculer $125 \times 32 \times 0{,}25$.

52 Calculer $113 \times 32 + 113 \times 19 - 113$.

Corrigés des exercices

1 $18 \times 250/100 = (18/100) \times (1\,000/4)$.
$= (18/4) \times (1\,000/100) = 4{,}5 \times 10 = 45$.
Autre méthode : $18 \times 2{,}5 = 18 \times 2 + 18 \times 0{,}5 = 36 + 9 = 45$.

2 Si deux nombres ont pour produit 1 ils sont inverses l'un de l'autre. $125 \times 8 = 1\,000$ donc $0{,}125 \times 8 = 1$. Le nombre cherché est 8, qui est l'inverse de 0,125.

3 Le périmètre vaut alors 3 fois le côté moyen. Celui-ci mesure $150/3 = 50$ m. Les autres côtés font 40 m et 60 m.

4 Le nombre d'espaces par rang est $120/0{,}8 = 120/(4/5) = 120 \times 5/4 = 30 \times 5 = 150$. Il y a 150 intervalles donc 151 ceps par rang.
Pour multiplier par 15 je multiplie par 10 et j'ajoute la moitié.
$151 \times 15 = 1\,510 + 755 = 2\,265$ ceps.

5 Le nombre d'hectares est $168/140 = 140/140 + 28/140 = 1 + 1/5 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$. Comme 1 hectare = 100 ares, on trouve donc 120 a.

6 Le côté du carré mesure $380/4 = 95$ m ; son aire est $95^2 = 9\,025\ \text{m}^2$
(Rappel : on calcule $9 \times 10 = 90$ et on écrit 25 à droite.)

7 La racine carrée de 196 est 14 donc le côté mesure 14 m et le périmètre vaut $4 \times 14 = 56$ m.

8 Sur un côté on place $450/15 = 30$ carreaux. Il faut $30^2 = 900$ carreaux.

9 Prix du kg : $175/25 = 175/(100/4) = 175 \times 4/100 = 700/100 = 7$ euros.

10 18 c'est une fois et demie 12, donc on ajoute la moitié du prix pour 12. On trouve $16{,}80 + 8{,}40 = 25{,}20$ euros.

11 Pour avoir 56 piquets il faut 14 intervalles sur chaque côté (et 15 piquets par côté, ceux des coins sont comptés deux fois, on vérifie que
$4 \times 15 - 4 = 56$). Le côté mesure : $5 \times 14 = 70$ m.

12 $1\ t = 1\ 000\ kg = 125\ kg \times 8$ donc le prix cherché est $1\ 750 \times 8 = 1\ 750 \times 4 \times 2 = 7\ 000 \times 2 =$ 14 000 euros.

13 $15 \times 12 = 15 \times (10 + 2) = 150 + 30 = 180$ litres = 180 dm^3.

14 $15^2 = 225$; $15^3 = 225 \times (10 + 5) = 2\ 250 + 1\ 125 =$ 3 375 dm^3.

15 Le volume nécessaire pour deux est $25 \times 2 = 50$ m^3.

Le volume de la pièce est inférieur à $2{,}5 \times 5 \times 4 = 2{,}5 \times 4 \times 5 = 10 \times 5 = 50$ m^3.

En effet 3,5 est inférieur à 4. Pourquoi penser à prendre ce 4 à la place du 3,5 ? Tout simplement par attraction des calculs simples et « ronds » comme $2{,}5 \times 4 = 10$. Les associations d'idées de calculs de ce genre peuvent faire gagner beaucoup de temps.

En conclusion de l'exercice, la pièce est trop petite en volume.

16 750 g = 3/4 kg.

Le prix en euros est : $(3/4) \times (2 \times 1,9) = (3/2) \times 1{,}9 = 1{,}9 + 0{,}95 =$ 2,85 €.

On a utilisé la multiplication par 1,5 qui consiste à ajouter une moitié à l'unité.

17 $327{,}4 \times 4 \times 125 = 327{,}4 \times 500 = 327{,}4 \times 1\ 000/2 = 327\ 400/2 =$ 163 700.

18 Janvier a 31 jours soit $(4 \times 7 + 3)$ ce qui donne un décalage de 3 jours entre les noms des premiers jours de janvier et de février.

Si le premier jour de janvier est un mardi, les 8, 15, 22, 29 janvier sont aussi des mardis. Le 30 janvier est un mercredi, le 31 est un jeudi, et le premier février est un vendredi. On peut résumer par mardi + 3 = vendredi.

Comme février compte 28 jours dans une année ordinaire, et comme $28 = 4 \times 7$ il n'y a pas de décalage entre les noms des jours de février et de mars. Le premier mars est aussi un vendredi.

19 Un tour de trotteuse représente une minute. 720 tours font 720 minutes soit 720/60 = 12 heures. Il est donc $9 + 12 =$ 21 heures.

20 Entre 6 h du matin et 10 h du matin le lendemain il y a $4 + 24 = 28$ heures. Un retard de 3 minutes par 24 heures devient en 28 heures un retard de : $3 \times 28/24 = 3 \times 7/6 = 3/6 \times 7 = 1/2 \times 7 = 3{,}5$ minutes.

La pendule marquera 10 h – 3,5 min = 9 h 56 min 30 s.

21 La période de temps en question est $12 + 18 = 30$ h.

Une avance de 4 min par 24 h donne, en 30 h, une avance de $4 \times 30/24 = 4/24 \times 30 = 1/6 \times 30 = 5$ min.

La montre indiquera 18 h 05 min.

22 13 h 05 min – 12 h 35 min = 30 min.

L'horloge a pris 30 min de retard soit 15 périodes de 2 minutes.

$15 \times 6 = 90$ heures soit $72 + 18 = 3 \times 24 + 18$.

Le décalage est donc de 3 jours et 18 heures. 3 jours avant dimanche c'est jeudi. 18 h avant jeudi 13 h 05 min c'est mercredi, et comme $18 = 24 - 6$, il est 13 h 05 min + 6 h, soit 19 h 05 min.

23 On a $25 - 22 = 3$; 15 h 48 min 4 s – 15 h 36 min 4 s = 12 min.

Comme $12 \times 5 = 60$, faire 3 km en 12 min c'est faire $3 \times 5 = 15$ km en une heure. La vitesse du vélo est 15 km/h.

24 $29^2 + 31^2 = (30 - 1)^2 + (30 + 1)^2$.

$= 900 - 2 \times 30 + 1 + 900 + 2 \times 30 + 1 = 1\,802$.

25 75 cL = 3/4 L; $450/(3/4) = (450/3) \times 4 = 150 \times 4 = 600$.

La barrique peut contenir 600 bouteilles.

26 Il y a 12 arêtes, leur longueur totale est : $0{,}15 \times 12 = 1{,}5 + 0{,}3 = 1{,}8$ m

L'aire latérale vaut $4 \times 0{,}15^2 = 4 \times 0{,}0225 = 0{,}09$ m^2.

Le volume est : $0{,}15^3 = 0{,}0225 \times 0{,}15 = 0{,}00225 + 0{,}001125 = 0{,}003375$ m^3.

On met 5 cubes de 3 cm de côté pour obtenir 15 cm de côté. Le nombre de petits cubes pour remplir le grand est $5^3 = 125$.

27 $48 \times 52 + 101 \times 14 = (50 - 2)\ (50 + 2) + (100 + 1)(14)$

$= 2500 - 4 + 1\,400 + 14 = 3\,900 + 14 - 4 = 3910$.

28 $268 \times 9 + 11 \times 268 = 268 \times (9 + 11) = 268 \times 20 = 5\,360$.

29 En une seconde le train fait $360/18 = 20$ m.

En une minute il fait $60 \times 20 = 1200$ m soit 1,2 km.

En une heure il fait $1{,}2 \times 60 = 72$ km.

La vitesse du train est donc 72 km/h.

On peut aussi utiliser la conversion 1 m/s = 3,6 km/h

et alors 20 m/s = $20 \times 3{,}6$ km/h = 72 km/h.

30 Augmenter d'un quart cela fait passer de 100 à 125, donc c'est multiplier par 1,25 ou multiplier par 5/4.

Comme $t = d/v$ le temps est inversement proportionnel à la vitesse. Si la vitesse est multipliée par 5/4, le temps est multiplié par 4/5. Quand la vitesse est plus grande, le temps mis est plus petit.

5 h $\times$ 4/5 = 4 h : l'auto mettra 4 heures.

31 Un angle plein (un tour complet) c'est 360° soit 5 fois 72°.

Il est donc prélevé 1/5 du plat, soit une aire de $1\,900 \times 1/5 = 1\,900 \times 2/10 = 380$ cm^2.

32 En vendant 3/5 il reste 2/5, et cela représente 48 litres donc 1/5 c'est 24 litres et la contenance de la barrique est $24 \times 5 = 120$ litres.

33 Si 3/4 c'est 45 mètres alors un quart c'est 15 m, et la moitié c'est $2 \times 15 = 30$ mètres.

34 Si C est la contenance du grand fût alors 3/4 C est celle du petit, et C + 3/4 C = 7/4 C est la contenance totale.

On a 7/4 C = 420 donc C = 420 × 4/7 = 420/7 × 4 = 60 × 4 = 240.

Le grand fût contient 240 litres.

Le petit fût contient : 3/4 × 240 L = 240/4 × 3 = 60 × 3 = 180 litres.

35 L'expression « intérêts simples » s'entend en opposition à « intérêts composés » (les intérêts ne procurent pas ici d'intérêts). Il y a 4 trimestres par an donc l'intérêt en un trimestre est de 4 %/4 = 1 %. Le montant des intérêts est 3 800 × 1 % = 38 euros.

36 15 mois c'est 15/12^{e} d'année soit 5/4 d'année. Les intérêts sont de 12 400 × 5/4 × 4/100 = 124 × 5 = 620 euros.

37 1 500/25 = 1 500 × 4/100 = 15 × 4 = 60. Il y a 60 quarterons.

38 8 × 374,7 × 125 = 374,7 × 8 × 125 = 374,7 × 1 000 = 374 700.

39 Le nombre obtenu est supérieur à 531 et finit par zéro.

Essayons 600, qui proviendrait de 60. La différence serait 600 – 60 = 540 ce qui trop grand pour 531.

Essayons 590, qui proviendrait de 59. La différence est alors 590 – 59 = 531. On a trouvé par essais, à peu de frais en temps : le nombre de départ était 59…

Autre méthode : une équation…

Soit n le nombre. En mettant un zéro à droite on le multiplie par 10.

On traduit l'énoncé par 10 n = n + 531, d'où 9 n = 531 et n = 531/9 = 59.

40 Si le nombre a été multiplié par 68 au lieu de 62 il a été comptabilisé 6 fois de trop (68 – 62 = 6). Cela représente 2 550, donc le nombre multiplié vaut : 2 550/6 = (2 400 + 150)/6 = 400 + 25 = 425.

41 La distance réelle est en km :

40 000 × 26/80 = 40/80 × 1 000 × 26 = (½) × 26 000 = 13 000 km.

42 Le nombre de pas du fils est : 125 × 8/5 = 125/5 × 8 = 25 × 8 = 200. La longueur du pas du fils en mètres est 100/200 = ½, donc cela fait 50 cm.

43 La distance en cm entre les deux clous extrêmes sur une longueur est : 119 – 2 × 2 = 115 cm.

La distance en cm entre les deux clous extrêmes sur une largeur est :

84 – 2 × 2 = 80 cm.

Le nombre d'intervalles entre clous sur la longueur est : 115/5 = 23.

Le nombre d'intervalles entre clous sur la largeur est : 80/5 = 16.

Sur une longueur ou une largeur il y a un clou de plus que d'intervalles, donc sur chaque longueur il y a 23 + 1 = 24 clous, et sur chaque largeur il y a 16 + 1 = 17 clous. Mais il ne faut pas compter deux fois les clous d'angles, donc si on prend 24 clous sur les longueurs c'est 16 – 1 = 15 clous qu'il faut ajouter par largeur.

Le nombre de clous est $24 \times 2 + 15 \times 2 = 48 + 30 =$ 78 clous.

Tout cela peut paraître difficile à faire de tête, mais en notant au passage quelques nombres utiles (23, 16, etc.) ce n'est si dur qu'on peut le penser a priori.

44 En une minute l'auto fait : $144/60 = (120 + 24)/60 = 2{,}4$ km soit 2 400 m.

En une seconde elle fait : $2\,400/60 = 40$ m.

En 25 secondes elle fait : $40 \times 25 = 1\,000$ m soit 1 km.

On sait qu'à 60 km/h on fait 1 km par minute, donc deux fois plus vite, à 120 km/h, on fait 1 km en deux fois moins de temps soit 30 secondes. On devait donc s'attendre avec une vitesse un peu supérieure, 144 km/h et un temps un peu plus court, 25 secondes, à un résultat voisin de celui qu'on trouve : 1 km.

45 4 752 et 666 sont divisibles par 9 car la somme de leurs chiffres l'est.

4 752, 6 666, 9 944 et 777 777 sont divisibles par 11 car la différence entre la somme des chiffres de rangs impairs et la somme des chiffres de rangs pairs est nulle (ou multiple de 11).

46 $325 \times 21 = 325 \times (20 + 1) = 6\,500 + 325 = 6\,825$.

47 $415 \times 18 = 415 \times (20 - 2) = 8\,300 - 830 = 8\,300 - 800 - 30 = 7\,500 - 30 = 7\,470$.

48 $63 \times 22 = 63 \times 11 \times 2 = 693 \times 2 = 1\,386$.

49 $228 \times 0{,}55 = 228 \times (0{,}5 + 0{,}5/10) = 114 + 11{,}4 = 125{,}4$.

50 $48 \times 3{,}125 = 48 \times (3 + 0{,}125) = 48 \times (3 + 1/8) = 48 \times 25/8 = 48/8 \times 25 = 6 \times 25 = 150$.

51 $125 \times 32 \times 0{,}25 = 125 \times 8 \times 4 \times 0{,}25 = 1\,000 \times 1 = 1\,000$.

52 $113 \times 32 + 113 \times 19 - 113 \times 1 = 113 \times (32 + 19 - 1) = 113 \times (51 - 1) = 113 \times 50 = 5\,650$.

Supplément mathématique pour les concours ACCÈS et PRISM 23

Équations-Inéquations

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$, il y a une solution (double) égale à $\dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions $x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Somme (S) et produit (P) des racines quand elles existent : $S = \dfrac{-b}{a}$; $P = \dfrac{c}{a}$.

> Exemple
>
> Résoudre $x^2 - 7x - 8 = 0$.
> On peut calculer $\Delta = 49 + 32 = 81$,
>
> puis $x' = \dfrac{7+9}{2} = 8$ et $x'' = \dfrac{7-9}{2} = -1$.
>
> On peut aussi remarquer que si on remplace x par (-1) on obtient :
> $1 + 7 - 8 = 0$, donc (-1) est une solution « évidente ».
>
> Le produit des racines valant $\dfrac{c}{a} = -8$, comme l'une des racines est (-1) l'autre est $+8$.

Recherche du signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ (pour $a \neq 0$) selon les valeurs de la variable x

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe du coefficient « a » et n'est jamais nul.

- Si $\Delta = 0$, le trinôme est toujours du signe du coefficient « a » mais s'annule pour la valeur $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de $(-a)$ entre les racines, et du signe de « a » à l'extérieur des racines.

Équation du second degré en x, avec paramètre (m)

Exemple

Déterminer le ou les réels m pour que l'équation $x^2 - (m+1)\,x + 4 = 0$ n'ait aucune solution.

Ceci correspond à avoir $\Delta < 0$. D'où $(m+1)^2 - 16 < 0$. Le membre de gauche est de la forme $a^2 - b^2$. On peut donc le factoriser et obtenir : $(m+1+4)(m+1-4) < 0$ puis $(m+5)(m-3) < 0$. Entre les racines -5 et $+3$ le trinôme est du signe de $(-a)$ donc ici négatif.

Conclusion : les solutions sont les réels m tels que $-5 < m < 3$.

Inéquation du second degré en x, avec paramètre (m)

Exemple

Déterminer le ou les réels m pour que le trinôme : $(-x^2 + 2x - m)$ soit négatif pour tout réel x.

« Pour tout x » nous invite à avoir $\Delta < 0$ de façon à ce que le trinôme ait un signe constant. Ce signe est celui du coefficient « a », ici (-1), qui est bien négatif. Le problème se résume donc à avoir $\Delta < 0$.

On obtient $\Delta = 4 - 4m$, d'où $4 - 4m < 0$ et $4m > 4$ puis $m > 1$. L'ensemble des solutions pour m est donc$]1\,;+\infty[$.

Fonctions

Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction numérique, on appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble des réels x qui ont une image par f. Quand f est associée à une formule, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ soit calculable.

Exemple

$f(x) = \sqrt{(x+3)(x-2)}$

On peut calculer $f(x)$ quand le produit sous le radical est positif (dans π la racine carrée d'un nombre strictement négatif n'existe pas).

Mais $(x + 3)(x - 2)$ est positif à l'extérieur des valeurs qui l'annulent, les racines -3 et $+2$, donc l'ensemble de définition de f est :
$]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$.

Quand une équation est-elle définie ?

Toutes les écritures utilisées doivent avoir un sens.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x} = 7$.
C'est une équation définie sur $[0, +\infty[$ car la racine d'un réel négatif n'existe pas.

Exemple

Calculer en fonction de a la valeur de l'inconnue x telle que :

$$x - 3 = \frac{2x - a}{4x - a}$$

L'équation est définie quand la fraction existe, donc quand le dénominateur est différent de zéro.
Cette équation est définie pour $x \neq \frac{a}{4}$. Dans la résolution, il conviendra de vérifier que la valeur solution pour x n'est pas égale à $\frac{a}{4}$.

Parité d'une fonction

- Une fonction numérique f est **paire** si son ensemble de définition est symétrique par rapport à zéro et si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition. La courbe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction numérique f est **impaire** si son ensemble de définition est symétrique par rapport à zéro et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition. La courbe de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple

$f(x) = \frac{-3}{x}$ est impaire…

Son ensemble de définition, soit$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est symétrique par rapport à zéro.

$f(-x) = \frac{-3}{-x} = \frac{3}{x}$ est égal à $-f(x) = -\left(\frac{-3}{x}\right) = \frac{3}{x}$.

Étude des variations d'une fonction menant au tracé de sa courbe.

1. On cherche son ensemble de définition.
2. On cherche si elle est paire ou impaire : si c'est le cas, on peut réduire l'étude sur la moitié de l'ensemble de définition, et on complétera la courbe obtenue par une symétrie par rapport au point O, si la fonction est impaire, ou par rapport à l'axe des ordonnées, si la fonction est paire.
3. On calcule la dérivée. On étudie son signe : on factorisera le plus possible et on dressera un tableau de signes tenant compte de tous les facteurs et des valeurs interdites par l'ensemble de définition.
   - Quand la dérivée est positive sur un intervalle : la fonction est croissante sur cet intervalle.
   - Quand la dérivée est négative sur un intervalle : la fonction est décroissante sur cet intervalle.
4. On dresse un tableau de variation où l'on mentionne les maximums et minimums.
5. On le complète avec le calcul des limites aux bornes de l'ensemble de définition (par exemple : en $-\infty$, en $+\infty$, et à gauche ou à droite des valeurs interdites de l'ensemble de définition).
6. On cherche les éventuelles asymptotes verticales, horizontales, obliques.
7. On les trace ainsi que les tangentes horizontales aux points où la dérivée s'annule, et enfin on trace la courbe.

Asymptotes à la courbe d'une fonction f

- Si a est un réel fini et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe.
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ (nombre réel fini) alors la droite horizontale $y = b$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote oblique à la courbe en $\pm\infty$

Le signe du décalage : $f(x) - (a\,x + b)$ permet de savoir si la courbe est au-dessus de son asymptote (décalage positif) ou en dessous (décalage négatif).

Tangente en un point d'une courbe

Une fonction f est dérivable en une valeur réelle finie a quand $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est égale à un nombre fini.

Au point d'abscisse « a » la courbe présente alors une tangente dont l'équation est : $y = f(a) + f'(a)\ (x - a)$. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse « a » est le nombre dérivé $f'(a)$.

Pour déterminer les abscisses des éventuels points de la courbe où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = m\,x + p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$ car des droites parallèles ont le même coefficient directeur.

Continuité. Équation f(x)= constante

Le tracé de la courbe d'une fonction sans avoir besoin de lever la pointe du crayon de la feuille correspond à l'idée de continuité. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions dérivables en une valeur « a » sont aussi continues en « a ».

Si f est une fonction continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I, et si k est une constante appartenant à l'ensemble $f(\text{I})$ des images des éléments de I, alors l'équation $f(x) = \text{k}$ admet une solution et une seule dans I. C'est le théorème des valeurs intermédiaires : les ordonnées des points de la courbe prennent une fois et une seule chacune des valeurs comprises entre le minimum et le maximum de $f(x)$ quand x varie dans I.

Dans la pratique, on utilise une calculatrice pour encadrer de plus en plus précisément la valeur cherchée x_0 telle que $f(x_0) = \text{k}$.

Exemple

La fonction f telle que $f(x) = \text{e}^x + x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée $f'(x) = \text{e}^x + 1$ est toujours strictement positive donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Imaginons qu'on demande de résoudre $f(x) = 2$ avec une précision du dixième.

Quelques essais donnent $f(0) = 1$ et $f(1) = 1 + \text{e}$, soit environ 3,7. Mais 2 est compris entre 1 et 3,7. On peut affirmer, puisque les hypothèses nécessaires à l'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, que notre équation $f(x) = 2$ a une solution et une seule x_0 telle que $f(x_0) = 2$ et que $0 < x_0 < 1$.

En faisant balayer la table de la calculatrice dans laquelle on a introduit la formule de la fonction, et ceci à partir de $x = 0$, avec un pas de 0,1 on peut préciser :

x		0		...		0,4		0,5		...		1
$f(x)$		1				1,9		2,1				3,7

2 est compris ente 1,9 et 2,1 soit $f(0,4) < 2 < f(0,5)$.

On en déduit que $0,4 < x_0 < 0,5$.

On poursuit ainsi avec des pas de 0,01 ou 0,001 si l'on veut un encadrement plus fin.

Calcul de limites

Les formes indéterminées sont les quatre cas :

$(+\infty) + (-\infty)$; $\pm\infty \times 0$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Pour les calculs de limites en $\pm\infty$ des polynômes et des fonctions rationnelles, on met la plus grande puissance de la variable x en facteur (au numérateur et au dénominateur pour une fraction) et on simplifie.

Exemple

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 5}$ est de type $\frac{\infty}{\infty}$, mais elle est égale à :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2(1 - 1/x^2)}{x(1 + 5/x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(1 - 1/x^2)}{(1 + 5/x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{1} = +\infty$$

(car $\lim\limits_{x \to \infty}(1 - 1/x^2) = 1 - 0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + 5/x) = 1 + 0 = 1$)

Exemple de situation en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$

Mais, pour n réel positif, on a pour tout $x > 1$: $\ln x < x^n < e^x$

On met le plus fort en facteur (éventuellement en haut et en bas).

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ car le plus fort ($\sqrt{x} = x^{0,5}$) est en bas;

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ (le plus fort est en haut).

Exemple de situation en $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et pour a positif, $\lim_{x \to -\infty} x^a . e^x = 0$

Dans les exercices, on essaie de faire apparaître ces limites, mais si cela ne suffit pas on peut parfois utiliser avec profit un changement de variable $X = -x$.

Exemple de situation en 0

$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; pour a positif, $\lim_{x \to 0^+} x^a . \ln x = 0$; $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

On essaie de faire intervenir ces limites, mais si cela ne suffit pas on peut essayer parfois avec profit le changement de variable $X = 1/x$.

Exemple d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$

On peut essayer de factoriser, en espérant simplifier par un facteur commun

Par exemple, $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ est de type 0/0 mais est égale à $\lim_{x \to 1} (x+1) = 2$

Pour les expressions avec racine carrée, on peut essayer de multiplier en haut et en bas par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

Par exemple, $\lim_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ est de type 0/0 mais est égale à $\lim_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

donc $\lim_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$

soit encore $\lim_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}+2)}{1} = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4.$

Point fixe

Grâce à un paramètre (m) une même équation peut donner toute une famille de courbes. Il est possible qu'en changeant les valeurs de m, les diverses courbes obtenues aient un point commun : on dira que c'est un point fixe de la famille de courbes.

Exemple

La famille (pour le paramètre m) des droites d'équation :

$y = mx + (0{,}5 - m)$ possède un point fixe de coordonnées $(1\,;\,0{,}5)$.

En faisant varier m on obtient des droites qui sont toutes concourantes en $(1\,;\,0{,}5)$. En effet en remplaçant dans l'équation x par 1 on obtient une simplification des écritures contenant m et on aboutit à :

$y = m + 0{,}5 - m = 0{,}5$ qui est une valeur ne dépendant pas de m.

➢ **Comment trouver le point fixe ?**

- Si l'on sait qu'il y en a un, on peut trouver ses coordonnées en cherchant l'intersection de deux des courbes de la famille.
- Si l'on veut savoir s'il y en a un, on peut essayer de factoriser m et d'obtenir une égalité du style $0\,m = 0$ qui est vraie indépendamment de m.

Dans notre exemple précédent, l'équation de la famille de droites peut s'écrire :

$y - 0{,}5 = m\,(x - 1)$.

Elle est vraie pour toute valeur de m quand on remplace y par 0,5 et x par 1 puisqu'alors on a : $0 = m\,(0)$.

Logarithme népérien

La fonction $\ln x$ n'existe que si $x > 0$.

Si $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$;
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;
- avec α réel : $\ln(a^{\alpha}) = \alpha \ln a$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$;
- $\ln \mathrm{e} = 1$;
- $\ln(\mathrm{e}^{a}) = a$;
- $\ln 1 = 0$;
- $\ln x < 0$ quand $0 < x < 1$;
- $\ln x > 0$ quand $x > 1$;
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$;
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$;
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.

➢ **Dérivation du logarithme**

- pour $x > 0$ on a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- pour $u > 0$ on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

➢ **Équations et inéquations avec logarithme**

Ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence : toutes les expressions dont on prend le logarithme doivent être positives.

Exemple d'équation

Résoudre $\ln x + \ln 2 = 3$.

Condition d'existence : $x > 0$.

Ensuite : $\ln x + \ln 2 = 3 \Leftrightarrow \ln 2x = \ln e^3 \Leftrightarrow 2x = e^3 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^3}{2}$

Cette valeur étant bien positive, la solution de l'équation est $\dfrac{e^3}{2}$

Exemple d'inéquation

Résoudre $\ln(x+3) \leq 1$

Condition d'existence : $x > -3$.

Ensuite : $\ln(x+3) \leq 1 \Leftrightarrow \ln(x+3) \leq \ln e \Leftrightarrow x + 3 \leq e \Leftrightarrow x \leq e - 3$

Les solutions sont tous les réels vérifiant $-3 < x \leq e - 3$

soit les valeurs de l'intervalle $]-3\,;\, e-3]$.

➢ **Étude du signe d'une expression contenant un logarithme népérien**

Exemple

Étudier le signe de $(4 - \ln x)$ sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$.

$4 - \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq e^4$

On conclut que l'expression $(4 - \ln x)$:

- est un nombre strictement négatif pour $x > e^4$,
- est nulle pour $x = e^4$,
- est un nombre strictement positif quand $0 < x < e^4$.

Exponentielle de base e

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$;
- $\ln(e^x) = x$;
- Pour x positif : $e^{\ln x} = x$;
- Pour tout x : $e^x > 0$;
- $e^0 = 1$;
- $e^1 = e$.

Pour tous réels a et b :

- $e^a \times e^b = e^{a+b}$;
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$;
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$;
- $(e^a)^b = e^{ab}$;
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$;
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$.

➢ Dérivation de l'exponentielle

- $(e^x)' = e^x$;
- $(e^u)' = u'e^u$

➢ Équation et inéquation avec l'exponentielle

Exemple d'équation

Résoudre $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$.

On pose $X = e^x$ et on résout $X^2 - 3X - 4 = 0$.

On trouve $\Delta = 25$ puis $X' = 4$ et $X'' = -1$.

$e^x = 4$ donne $x = \ln 4$; mais $e^x = -1$ est impossible et ne donne pas de solution pour x.

Conclusion : une seule solution égale à $(\ln 4)$.

Exemple d'inéquation

Résoudre $e^x < 3\,e^{-x}$.

$e^x < \dfrac{3}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 3$ (on a multiplié par e^x qui est positif)

$\Leftrightarrow 2x < \ln 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 3}{2}$

L'intervalle des solutions est : $]-\infty ; \dfrac{\ln 3}{2}[$

➢ Étude du signe d'une expression contenant une exponentielle de base e

Exemple

Étudier le signe de $(e^{\frac{1}{x}} - 3)$ sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$.

$e^{\frac{1}{x}} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leq \ln 3 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{\ln 3}$

On conclut que l'expression $(e^{\frac{1}{x}} - 3)$:

- est un nombre strictement négatif pour $x > \dfrac{1}{\ln 3}$,
- est nulle pour $x = \dfrac{1}{\ln 3}$,
- est un nombre strictement positif quand $0 < x < \dfrac{1}{\ln 3}$.

Suites

Étude du sens de variation

Première méthode (convenant dans tous les cas) :

- Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors la suite est croissante à partir de n_0.
- Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors la suite est décroissante à partir de n_0.

Deuxième méthode, utilisable quand tous les termes sont strictement positifs :

- Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors la suite est croissante à partir de n_0.
- Si pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors la suite est décroissante à partir de n_0.

Troisième méthode, pour les suites définies explicitement par une fonction $U_n = f(n)$:

- Si f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite U_n est croissante.
- Si f est une fonction décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite U_n est décroissante.

Suites arithmétiques

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r (qu'on appelle raison de la suite). Une suite est donc arithmétique quand pour tout entier naturel n, on a :

$U_{n+1} - U_n =$ constante, cette constante est la raison r.

Pour tout entier naturel n, on a :

- $U_{n+1} = U_n + r$;
- $U_n = U_0 + n\, r$;
- $U_n = U_p + (n - p)\, r$.

Si la raison est positive, la suite arithmétique est croissante. Si la raison est négative, la suite arithmétique est décroissante.

On représente une suite arithmétique par des points de coordonnées (n, U_n) qui sont alignés sur une droite de coefficient directeur la raison r.

➢ **Somme des termes d'une suite arithmétique**

Exemple de base : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Cas général :

$U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{(\text{premier terme } + \text{dernier terme})}{2}$

$= (n + 1) \times \dfrac{U_0 + U_n}{2}$.

Exemple

Soit la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison 10.

Quel est le terme U_{13} ?

C'est : $5 + 13 \times 10 = 135$.

Quelle est la somme $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{13}$?

C'est $(13 + 1) \times \dfrac{(5 + 135)}{2} = 14 \times \dfrac{140}{2} = 14 \times 70 = 980$.

Suites géométriques

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q (qu'on appelle raison de la suite).

Une suite est donc géométrique quand pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante; cette constante est la raison q.

Pour tout entier naturel n, on a :

- $U_{n+1} = U_n \times q$.
- $U_n = U_0 \times q^n$.
- $U_n = U_p \times q^{(n-p)}$.
- Quand la raison q est négative la suite alterne termes positifs et négatifs.
- Quand la raison q vaut 1 la suite est constante.
- Quand tous les termes sont positifs, une raison $q > 1$ correspond à une suite croissante tandis qu'une raison telle que $0 < q < 1$ correspond à une suite décroissante.

Somme des termes d'une suite géométrique (pour une raison différente de 1) :

Exemple de base : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Cas général :

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Exemple

Soit la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.

Quel est le terme U_{10} ?

C'est : $5 \times 2^{10} = 5 \times 1\,024 = 5\,120$

- Quelle est la somme $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{10}$?
- On remarque que la nombre de termes est $10 + 1 = 11$.

La somme vaut :

$$5 \times \frac{(1 - 2^{11})}{1 - 2} = 5 \times \frac{1 - 2\,048}{1 - 2} = 5 \times \frac{-2\,047}{-1} = 5 \times 2\,047 = 10\,235.$$

Primitives

Une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, on a : $F'(x) = f(x)$.

Si F_0 est une primitive de f sur I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme :

$F(x) = F_0\,(x) + k$, où k est une constante réelle.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exemples

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, et y admet des primitives.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F telle que $F(x) = x^2$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ ont la forme $x^2 + k$, avec k constante.

Parmi toutes les primitives, si on cherche par exemple celle qui vaut 7 quand x vaut 2, on doit avoir $F(2) = 7$ donc : $2^2 + k = 7$ d'où $k = 3$.

La primitive de f qui vaut 7 quand x vaut 2 est $F(x) = x^2 + 3$.

Tableau de primitives de fonctions usuelles :

f définie par…	Primitives F sur I	I
$f(x) = a$ (constante)	$F(x) = ax + k$ avec k constante	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \, (n \in \mathbb{R})$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \; (n \in \mathbb{R}, n > 1)$	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = (\ln x) + k$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^a$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + k$	$]0; +\infty[$

Recherche pratique d'une primitive

Pour les fonctions usuelles on utilise directement les formules ci-dessus. Pour des fonctions moins évidentes il faut d'abord visualiser une forme qui ressemble le plus à la fonction parmi celles proposées dans le tableau ci-dessous… Il ne faut pas hésiter à agir par essais–erreurs et rectifier en multipliant par un coefficient adéquat.

Forme de f	Primitives de f	Exemples
$f(x) = aU'(x) + bV'(x)$	$F(x) = aU(x) + bV(x)$	$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$
$f(x) = U'(x) \cdot [U(x)]^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{[U(x)]^{n+1}}{n+1} + k$	$f(x) = 5(5x-1)^2$ $F(x) = \dfrac{(5x-1)^3}{3} + k$

Forme de f	Primitives de f	Exemples
$f(x) = \frac{U'(x)}{[U(x)]^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ $n > 1$ et $U(x) \neq 0$	$F(x) =$ $\frac{-1}{(n-1)[U(x)]^{n-1}} + k$	$f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-5)^2}$ $F(x) = \frac{-1}{x^3-5} + k$
$f(x) = \frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ avec $U(x) > 0$	$F(x) = 2\sqrt{U(x)} + k$	$f(x) = \frac{7}{\sqrt{7x-4}}$ $F(x) = 2\sqrt{7x-4} + k$
$f(x) = U'(x) \cdot \cos[U(x)]$	$F(x) = \sin[U(x)] + k$	$f(x) = 2x\cos(x^2+3)$ $F(x) = \sin(x^2+3) + k$
$f(x) = U'(x) \cdot \sin[U(x)]$	$F(x) = -\cos[U(x)] + k$	$f(x) = 8\sin(8x)$ $F(x) = -\cos(8x) + k$
$f(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$ avec $U(x) \neq 0$	$F(x) = \ln[U(x)] + k$ si $U(x) > 0$ ou $F(x) = \ln[-U(x)] + k$ si $U(x) < 0$	$f(x) = \frac{4x}{2x^2+5}$ $F(x) = \ln(2x^2+5) + k$
$f(x) = U'(x) \cdot e^{U(x)}$	$F(x) = e^{U(x)} + k$	$f(x) = -2x\,e^{-x^2}$ $F(x) = e^{-x^2} + k$

Exemple

Trouver une primitive sur $]0; +\infty[$ de f telle que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

On visualise $f(x)$ sous la forme $U'(x).\,U(x)$ car en effet $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$

et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

On obtient pour primitive de $(u'u)$ la forme $\frac{u^2}{2}$ donc ici $\frac{(\ln x)^2}{2}$.

Les primitives cherchées ont la forme $\frac{(\ln x)^2}{2} + k$.

Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- pour tous a et b de I, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
- pour tout a de I, la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule pour $x = a$.

> Exemple
>
> $$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Propriétés de l'intégrale

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$.
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Si $a \leq b$ et si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$ alors :

  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est égale à $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Intégration par parties

Pour u et v dérivables sur un intervalle I contenant a et b, et telles que leurs dérivées soient continues sur I :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemple

Pour calculer $\int_1^e (\ln x)dx$ on imagine $(\ln x)$ comme $u(x)$ et 1 comme $v'(x)$.

On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$ puis on obtient :

$\int_1^e (\ln x)dx = [\ln(x)\cdot x]_1^e - \int_1^e \left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot x dx = (e - 0) - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.$

Le plus souvent on intègre par parties quand on peut se débarrasser d'un terme (u) gênant pour la recherche d'une primitive, alors qu'on sait le dériver, et l'autre terme (v') est fréquemment un polynôme, dont on sait trouver une primitive.

Calculs d'aires

Si $a \leq b$ et si f est une fonction continue telle que $f(x) \geq 0$ sur $[a\,;b]$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre le courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)dx$ en unités d'aire.

Pour avoir, par exemple, l'aire en cm², il faut multiplier le résultat en unités d'aire par la valeur en cm de l'unité sur l'axe des abscisses et par la valeur en cm de l'unité sur l'axe des ordonnées.

Exemple

On donne un repère orthogonal, avec 3 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 mm pour unité sur l'axe des ordonnées. Calculer en cm² l'aire de la région du plan comprise entre les droites $x = 2$ et $x = 7$, l'axe des abscisses et la courbe de la fonction f telle que $f(x) = 5(5x - 1)^2$

La fonction est continue et positive. De plus $F(x) = \dfrac{(5x-1)^3}{3}$.

$\int_2^7 f(x)dx = \left[\dfrac{(5x-1)^3}{3}\right]_2^7 = \dfrac{34^3}{3} - \dfrac{9^3}{3} = \dfrac{39\,304 - 729}{3} = \dfrac{38\,575}{3}$ unités d'aire.

Une unité d'aire est 3 cm × 0,1 cm = 0,3 cm².

L'aire cherchée vaut 3 857,5 cm².

- Si $a \leq b$ et si f est une fonction continue telle que $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre le courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à : $-\int_a^b f(x)dx$ en unités d'aire.
  Pour déterminer l'aire entre une courbe, l'axe des abscisses et deux verticales $x = a$, $x = b$, il convient donc (pour éviter des problèmes d'aire négative) d'étudier d'abord le signe de la fonction sur l'intervalle $[a; b]$.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, et si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\int_a^b (g - f)(x)dx$ en unités d'aires.
  Pour déterminer l'aire entre deux courbes sur un intervalle il convient d'abord d'étudier leurs positions relatives sur cet intervalle.

Probabilités conditionnelles

Étant donnés deux événements A et B (A non vide) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A le réel noté $p_A(B)$ ou $p(B/A)$ tel que $p_A(B) =$ $p\left(B/A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Propriétés

Pour tous événements non vides A et B

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$;
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$;
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements non vides deux à deux incompatibles, et dont l'union est égale à l'univers Ω (on dit qu'ils forment une partition de Ω) alors pour tout événement B.

$$\begin{aligned} P(B) &= p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \ldots + p(A_n) \times p_{A_n}(B) \end{aligned}$$

Exemple

Une boîte contient des jetons de trois couleurs : la moitié de ceux-ci sont blancs, le tiers est vert et ceux qui restent sont jaunes. Les jetons peuvent être carrés ou ronds. 50 % des blancs sont ronds, 30 % des verts et 40 % des jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

On peut construire un **arbre** représentant la situation :

- sur les branches de gauche on écrit les probabilités d'obtenir les différentes couleurs de jetons;
- sur les branches suivantes on écrit les probabilités conditionnelles (exemple : sachant qu'un jeton est blanc quelle est la proportion de ronds);
- à l'arrivée de chaque chemin on a soit « ronds » soit « carrés »;
- le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin;
- le produit des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égae à 1 (pour chaque nœud);
- la probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

Pour remplir toutes les probabilités utiles sur les branches, on calcule :

- la probabilité d'avoir un jeton jaune $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\right)$;
- les probabilités conditionnelles d'avoir des jetons carrés d'après leurs couleurs (exemple : parmi les verts 100 % – 30 % = 70 %).

On peut alors répondre à diverses questions plus ou moins facilement.

1) Quelle est la probabilité sachant qu'on a tiré un jeton vert, qu'il soit carré ?

Il suffit de lire 70 %.

2) Quelle est la probabilité de tirer un jeton rond ?

Il faut tenir compte des trois chemins conduisant à « ronds », et ajouter les trois probabilités concernées. Soit R la probabilité que le jeton tiré soit rond.

$$P(R)=\frac{1}{2}\times\frac{50}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{30}{100}+\frac{1}{6}\times\frac{40}{100}=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$$

3) Sachant que le jeton tiré est rond quelle est la probabilité qu'il soit vert ?

Il faut avoir recours à une formule car l'arbre n'est pas conçu avec des premières branches qui séparent « ronds » et « carrés » pour se prolonger avec les variations de couleurs.

$$P_{rond}(V)=\frac{p(R\cap V)}{p(R)} \text{ mais } p(R\cap V)=\frac{1}{3}\times\frac{30}{100}=\frac{1}{10}$$

$$\text{et } p(R)=\frac{5}{12} \text{ donc } P_{rond}(V)=\frac{1}{10}\times\frac{12}{5}=\frac{6}{25}$$

Exercices d'entraînement

Les exercices suivants sont du type Concours ACCES « coefficient 2 ».

L'épreuve de mathématiques du concours ACCESS comprend également des exercices de coefficient 1 qui sont plus faciles, et auxquels les chapitres précédents vous ont préparé. La durée totale pour faire l'ensemble de l'épreuve est 3 heures.

Pour chaque exercice, il faut répondre par Vrai ou Faux à chacune des quatre propositions.

Une réponse à un exercice est donc une suite de quatre marques V (vrai) ou F (faux).

L'absence de marque (V, F) ou la mauvaise marque à une proposition n'entraîne pas de point négatif. La calculatrice est interdite.

1 Soit la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et soit C_g sa courbe dans un repère orthonormé.

❐ **a.** g est une fonction impaire ;

❐ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$;

❐ **c.** la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à C_g *en* $+\infty$;

❐ **d.** la droite tangente au point d'abscisse 0 à C_g a pour équation : $y = x$.

2 On considère la fonction f définie par $f(x) = -3x\sqrt{1 - 9x^2}$.

❐ **a.** L'ensemble de définition de f est $[-1/3 ; 1/3]$.

❐ **b.** La courbe présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

❐ **c.** L'a fonction f atteint son maximum pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

❐ **d.** $\int_0^{1/3} f(x)dx = \dfrac{-1}{9}$.

3 Dans un troupeau de vaches le quart a été vacciné contre une certaine maladie. La probabilité qu'une vache vaccinée attrape la maladie est de 10 %. Lors d'une épidémie de cette maladie on observe qu'une vache sur huit vaches malades est vaccinée.

❐ **a.** La probabilité pour une vache d'être malade et vaccinée est 0,025.

❐ **b.** La probabilité pour une vache d'être malade et non vaccinée est 0,2.

❐ **c.** La probabilité pour une vache de ne pas être vaccinée sachant qu'elle est malade est 0,375.

❐ **d.** La probabilité pour une vache de ne pas tomber malade sachant qu'elle n'est pas vaccinée est de 0,4.

4 Soit le système de 3 équations $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x - my = 2 \\ x - 3y = 1 - m \end{cases}$ où x et y sont 2 inconnues réelles et m un paramètre réel.

❒ **a.** Si $m = 1/3$ le système n'a pas de solution.

❒ **b.** Si $m = 1$ le système a une infinité de solutions.

❒ **c.** Pour que le système admette un couple solution unique (x, y) il faut que m soit égal à 1.

❒ **d.** Si $m = -1$ le système admet un unique couple solution.

5 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = u_n{}^2 \end{cases}$. On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier n.

❒ **a.** $v_0 = 0$.

❒ **b.** $v_{n+1} = 2 \ln u_n$ pour tout entier n.

❒ **c.** (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

❒ **d.** $u_n = e^{(2^{n+1})}$.

6 Soit le système de 2 équations $\begin{cases} (E_1) : y - x^2 - 25 = 0 \\ (E_2) : y + m^2 x = 0 \end{cases}$ où x et y sont deux inconnues réelles et m un paramètre réel non nul. On note respectivement C_1 et C_2 les deux courbes représentant les deux relations précédentes E_1 et E_2.

❒ **a.** La courbe C_2 passe par un point fixe quel que soit la valeur de m.

❒ **b.** La courbe C_1 a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 5$.

❒ **c.** Selon les valeurs de m les courbes peuvent avoir 2 points communs ou un seul, ou pas de point commun.

❒ **d.** Si $m = \sqrt{10}$ ou $-\sqrt{10}$ les deux courbes ont un seul point d'intersection.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{(x-2)(mx^2 + 6x + 9m)}{(x^2 + mx + 1)}$, où m est un paramètre réel. On note C la courbe représentative de f.

❒ **a.** Pour tout m de $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

❒ **b.** 0 a trois antécédents par f quand $m = 1$ ou $m = -1$.

❒ **c.** Pour tout m de $\mathbb{R}$, la courbe C ne présente pas d'asymptote verticale.

❒ **d.** Pour $m = 0$ la tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 6$.

Corrigés des exercices

1	2	3	4	5	6	7
V V F V	V V F V	V F F F	V F V F	F V V F	V F V V	F F F V

1 a. vrai, b. vrai, c. faux, d. vrai

a. On remarque que pour tout x on a $g(-x) = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -g(x)$ donc la fonction g est impaire

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - \dfrac{1}{e^x}}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{0-1}{0+1} = -1.$

c. De même, en $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1.$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$, ce n'est donc pas $y = -1$.

d. $g'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

d'où $g'(0) = \dfrac{4}{(1+1)^2} = \dfrac{4}{4} = 1.$

Il s'agit du point d'abscisse 0 dont l'ordonnée est $g(0) = 0$.

La tangente a pour pente 1, et passe par l'origine, son équation est donc $y = x$.

2 a. vrai, b. vrai, c. faux, d. vrai

a. $f(x)$ existe quand $(1 - 9x^2)$ est positif ou nul, soit $(1 + 3x)(1 - 3x) \geq 0$. Comme le coefficient devant x^2 est négatif, ceci arrive quand la variable x est entre les racines $-1/3$ et $+1/3$.

L'ensemble de définition de f est donc $[-1/3 ; 1/3]$.

b. Pour tout x de l'ensemble de définition,

$f(-x) = -3(-x)\sqrt{1 - 9x^2} = 3x\sqrt{1 - 9x^2} = -f(x)$ donc f est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

c. $f'(x) = -3\sqrt{1 - 9x^2} + \dfrac{(-3x)(-18x)}{2\sqrt{1 - 9x^2}} = \dfrac{(-3)(1 - 9x^2) + 27x^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \dfrac{54x^2 - 3}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$

Donc $f'(x) = 0$ quand $x^2 = 3/54 = 1/18$ soit $x = \dfrac{\sqrt{18}}{18} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ ou $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{6}$

x	$-1/3$		$\frac{-\sqrt{2}}{6}$		$\frac{\sqrt{2}}{6}$		$+1/3$
signe de f'		+	0	-	0	+	
Variation de f		↗	Maxi	↘	Mini	↗	

Le tableau de variations indique que f admet un minimum pour $x = \frac{\sqrt{2}}{6}$ et non un maximum.

d. Il faut trouver une primitive F de f. Remarquons que pour obtenir après dérivation $\sqrt{1-9x^2}$ soit $(1-9x^2)^{1/2}$ il faut démarrer de $(1-9x^2)^{\frac{3}{2}}$.

On essaie $\left((1-9x^2)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}(-18x)\sqrt{1-9x^2} = -27x\sqrt{1-9x^2}$ ce qui représente 9 fois $f(x)$. On a donc pour primitive $F(x) = \frac{1}{9}(1-9x^2)^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_0^{1/3} f(x)dx = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}.$$

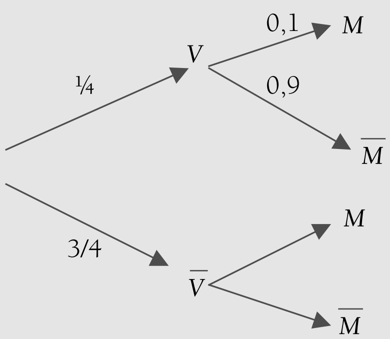
3 a. vrai, b. faux, c. faux, d. faux

On traduit l'énoncé et on le complète vite par :

$p(V) = 1/4$; $p(\overline{V}) = 3/4$; $p(M/V) = 0{,}1$; $p(\overline{M}/V) = 0{,}9$; $p(V/M) = 1/8$.

On calcule $p(V \cap M) = 1/4 \times 0{,}1 = 0{,}025$.

Mais $p(V/M) = \frac{p(V \cap M)}{p(M)}$ donc $p(M) = 8\, p(V \cap M) = 8 \times 0{,}025 = 0{,}2$.



$p(V \cap M) = 1/4 \times 0{,}1 = 0{,}025.$

$p(\overline{M} \cap V) = 1/4 \times 0{,}9 = 0{,}225.$

On a aussi $p(M) = p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M)$ donc :

$p(\overline{V} \cap M) = 0{,}2 - 0{,}025 = 0{,}175.$

$$p(M/\overline{V}) = \frac{p(\overline{V} \cap M)}{p(\overline{V})} = \frac{0{,}175}{0{,}75} = 0{,}25$$

$$p(\overline{V}/M) = \frac{p(\overline{V} \cap M)}{p(M)} = \frac{0{,}175}{0{,}2} = 0{,}875$$

$p(\overline{M}) = 1 - \text{p(M)} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$p(\overline{M} \cap V) = ¼ \times 0{,}9 = 0{,}225$

$p(\overline{M} \cap V) + p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap \overline{M}) + p(\overline{V} \cap M) = 1$ donc

$p(\overline{V} \cap \overline{M}) = 1 - 0{,}225 - 0{,}025 - 0{,}175 = 0{,}575$

$$p(\overline{M}/\overline{V}) = \frac{p(M \cap V)}{p(\overline{V})} = \frac{0{,}575}{0{,}75} = 23/30$$

a. est vrai car $p(V \cap M) = 0{,}025$.

b. est faux car $p(\overline{V} \cap M) = 0{,}175$ et non 0,2.

c. est faux car $p(\overline{V}/M) = 0{,}875$ et non 0,375.

d. est faux car $p(\overline{M}/\overline{V}) = 23/30$ et non 0,4.

4 **a.** vrai, **b.** faux, **c.** vrai, **d.** faux

a. Si $m = 1/3$ le système devient : $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x - y = 6 \\ x - 3y = 2/3 \end{cases}$

La première ligne et la troisième ligne sont incompatibles : il n'y a pas de solution.

b. Si $m = 1$ le système devient : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$.

Il se réduit aux deux dernières lignes, soit un système linéaire de deux équations à deux inconnues, qui donne un couple solution $(x; y) = (3; 1)$ et un seul, donc la proposition « infinité de solutions » est fausse.

c. La première ligne donne $y = m\,x - 2$. En reportant dans la deuxième on obtient : $x - m(m\,x - 2) = 2$ d'où $x(1 - m^2) = 2 - 2m$,

puis si m^2 ne vaut pas 1, donc si m est différent de 1 et -1 on a :

$$x = \frac{2 - 2m}{1 - m^2} = \frac{2(1 - m)}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{2}{1 + m}.$$

On en tire $y = \dfrac{2m}{1 + m} - 2 = \dfrac{2m - 2 - 2m}{1 + m} = \dfrac{-2}{1 + m}$.

La troisième ligne, soit $x = 3y$, donne alors : $\dfrac{2}{1 + m} = \dfrac{-6}{1 + m}$ ce qui est impossible. On retient que pour m différent de 1 et -1 le système n'a pas de solution.

- Cas $m = -1$: les deux premières lignes deviennent : $\begin{cases} -x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

  Elles sont incompatibles et le système n'a toujours pas de solution.
- Cas $m = 1$: on reprend le résultat du b. : il y a un seul couple solution (3; 1). Le **c.** est donc vrai : c'est seulement pour $m = 1$ qu'il y a un couple solution unique.

d. Le d. est faux d'après ce qui précède pour $m = -1$.

5 a. faux, b. vrai, c. vrai, d. faux

a. $v_0 = \ln e = 1$ et non 0.

b. $v_n = \ln(u_n)$ donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^2) = 2\ln(u_n)$

c. On a donc $v_{n+1} = 2\ln(u_n) = 2v_n$.

La suite est bien géométrique de raison 2.

d. $u_0 = e$, $u_1 = e^2$, $u_2 = e^4$, $u_3 = e^8$, …, $u_n = e^{(2^n)}$

La proposition est fausse : il faudrait un exposant de e avec 2^n au lieu de 2^{n+1}

6 a. vrai, b. faux, c. vrai, d. vrai

a. Quelle que soit la valeur de m, l'équation E_2 est vérifiée quand $x = 0$ et $y = 0$ donc les courbes $C2$ correspondant à diverses valeurs de m passent toutes par le point fixe (0; 0)

b. La courbe d'équation $y = x^2 + 25$ est une parabole ayant pour axe de symétrie l'axe $(0y)$, et non la droite d'équation $x = 5$.

c. Les deux formules doivent être vérifiées ensemble en un point d'intersection, d'où $x^2 + 25 = -m^2x$ puis $x^2 + m^2x + 25 = 0$.

On a $\Delta = m^4 - 100 = (m^2 - 10)(m^2 + 10)$

$= (m + \sqrt{10})(m - \sqrt{10})(m^2 + 10)$.

Il est du signe de $(m + \sqrt{10})(m - \sqrt{10})$

- Quand Δ est négatif (donc quand m est entre les racines $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$) : il n'y a pas de solution pour x.
- Quand Δ est positif (donc quand $m > \sqrt{10}$ ou $m < -\sqrt{10}$) : il y a deux solutions.
- Quand $\Delta = 0$ (donc quand $m = \sqrt{10}$ ou $m = -\sqrt{10}$) : il y a une solution.

Le c. est donc vrai et le d. aussi.

7 a. faux, b. faux, c. faux, d. vrai

a. La limite en $-\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus grand exposant.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{mx^3}{(x)x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{mx^3}{x^3} = m$

Comme m peut valoir autre chose que -1, le a. est faux.

b. Un antécédent de 0 par f est un nombre x tel que $f(x) = 0$.

Un antécédent de 0 évident est $x = 2$. Cherchons les autres.

$mx^2 + 6x + 9m = 0$; $\Delta = 36 - 36m^2 = 36(1 - m^2) = 36(1 - m)(1 + m)$

Quand $m = 1$ ou $m = -1$, Δ est nul et on a une seule solution en x à ajouter à $x = 2$ ce qui fait deux solutions et non trois comme proposé.

c. Une asymptote verticale est à relier à une limite infinie pour une valeur finie de x, et donc elle est à relier à un dénominateur nul.

$x^2 + mx + 1 = 0$; $\Delta = m^2 - 4 = (m + 2)(m - 2)$.

Pour $m = 2$, on obtient $f(x) = \dfrac{(x-2)(2x^2+6x+18)}{x^2+2x+1}$.

Quand x tend vers -1 on a $f(x)$ qui tend vers $-\infty$, et on obtient une asymptote verticale : la droite d'équation $x = -1$. Le c. est donc faux.

d. Pour $m = 0$ on obtient $f(x) = \dfrac{(x-2)(6x)}{x^2+1} = \dfrac{6x^2-12x}{x^2+1}$

On calcule $f'(x) = \dfrac{(12x-12)(x^2+1)-(2x)(6x^2-12x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(12x^2+12x-12)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{(12)(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}$ puis $f'(1) = 12/4 = 3$. Ce sera le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, d'ordonnée $f(1) = -3$.

L'équation de la tangente est de la forme $y = 3x + b$.

Au point de tangence, on obtient : $-3 = 3 + b$ donc $b = -6$ et l'équation de la tangente est donc $y = 3x - 6$.

Supplément mathématique pour le concours PRISM 24

Nombres complexes

On note i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique :

$z = a + ib$, avec a et b coefficients réels.

a est la **partie réelle** de z (notée aussi $\mathrm{Re}(z)$) et b i est la **partie imaginaire** (notée aussi $\mathrm{Im}(z)$).

$$\begin{cases} a + ib = a' + ib' \\ a, b, a', b' \text{ réels} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre noté $\overline{z} = a - ib$.

➢ **Propriétés**

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}$;
- pour $z \neq 0$, on a $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique (avec dénominateur non nul), on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

> Exemple
>
> $$\frac{1 + 5i}{3 - 2i} = \frac{(1 + 5i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3 + 15i + 2i + 10i^2}{9 - 4i^2} = \frac{3 - 10 + 17i}{9 + 4}$$
>
> $$= \frac{-7 + 17i}{13} = \frac{-7}{13} + \frac{17}{13}i$$

Résolution de l'équation du second degré dans l'ensemble des nombres complexes

z étant l'inconnue complexe, et a, b, c étant des coefficients réels, pour résoudre $az^2 + bz + c = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, il a deux solutions complexes conjuguées :

$$z' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une solution réelle (double) égale à $\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles :

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

> Exemple
>
> Résoudre $z^2 + 3z + 5 = 0$
>
> $\Delta = 9 - 20 = -11$.
>
> Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :
>
> $$z' = \frac{-3 - i\sqrt{11}}{2} \text{ et } z'' = \frac{-3 + i\sqrt{11}}{2}.$$

Exercices d'entraînement

Les exercices suivants sont du type Concours PRISM « coefficient 2 ».

Pour les 40 questions suivantes :

- une réponse juste rapporte 2 points ;
- une réponse fausse enlève 1 point ;
- ne pas répondre signifie 0 à la question.

Pour chaque question il n'y a qu'une seule réponse juste.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Durée : 1 h 30 (seulement !)

1 L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $2\ln(2 - x) - \ln(x + 0{,}5) \leq 3\ln 2$ est :

❒ **a.** $[0; 2[$ ❒ **c.** $[0; 12]$ ❒ **e.** $]-0{,}5; 0]$

❒ **b.** $]-0{,}5; 2[$ ❒ **d.** $]-0{,}5; 0] \cup]2; 12]$

2 Une urne contient six boules : cinq rouges et une noire. On effectue au hasard des tirages successifs et sans remise d'une boule, et l'on s'arrête dés qu'on a tiré la boule noire.

Quelle est la probabilité d'avoir à effectuer six tirages avant de s'arrêter ?

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 5/6 ❒ **c.** 1/36 ❒ **d.** $1/6^6$ ❒ **e.** 1/6

3 Une primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
pour tout réel x, $g(x) = (3 - 2x)\, e^{-x}$ est :

❒ **a.** $G(x) = (-3x + x^2)\, e^{-x}$

❒ **b.** $G(x) = (2x - 1)\, e^{-x}$

❒ **c.** $G(x) = (-5x^2 + 2x)\, e^{-x}$

❒ **d.** $G(x) = (5 - 2x)\, e^{-x}$

❒ **e.** $G(x) = (1 - 2x)\, e^{-x}$

4 Soit la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{R}$, définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ et $u_0 = 0$.

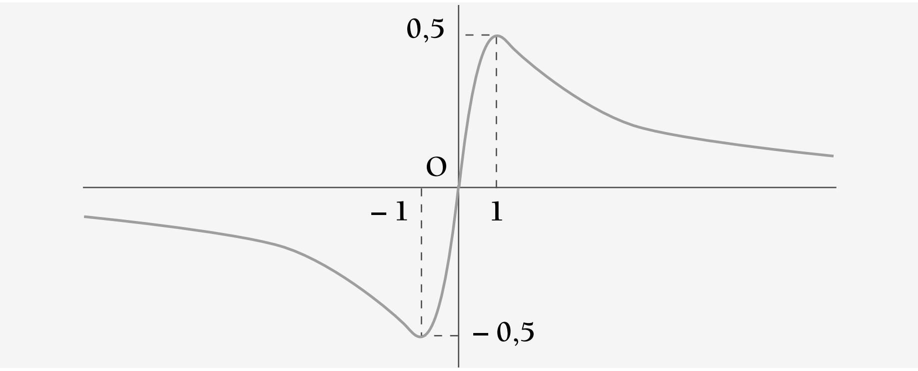
La suite (v_n) pour $n \in \mathbb{R}$, définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ est une suite géométrique de raison q. Que vaut q ?

❒ **a.** q = 3/4 ❒ **b.** q = 2 ❒ **c.** q = −1/3 ❒ **d.** q = 1/5 ❒ **e.** q = − 2

5 Une intégration par parties permet de calculer l'intégrale
$I = \int_1^e x \ln x dx$. Quelle est la valeur de I ?

❒ **a.** $\dfrac{e^2}{2} + \dfrac{1}{4}$ ❒ **b.** 0 ❒ **c.** $\dfrac{e^2+1}{4}$ ❒ **d.** $\dfrac{-1}{4}$ ❒ **e.** 1

6 La courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal est la suivante :



On sait qu'une des affirmations suivantes est exacte : laquelle est-ce que cela peut être ?

❒ **a.** La dérivée f' de f est impaire

❒ **b.** Pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

❒ **c.** Pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

❒ **d.** Pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

❒ **e.** On a $\lim\limits_{x\to\infty} f(e^{-x}-1) = 0$

7 Quelle est la somme des n premiers nombres impairs ?

❒ **a.** n^2 ❒ **b.** $n(n+1)$ ❒ **c.** $2n^2-1$ ❒ **d.** $2n$ ❒ **e.** $2n(n-1)$

8 Le système $\begin{cases} 3e^x - e^y = 13 \\ e^x + 2e^y = 9 \end{cases}$ a pour couple solution :

❒ **a.** $(5; 2)$ ❒ **c.** $(\ln 2; \ln 5)$ ❒ **e.** $(\ln 7; \ln 8)$
❒ **b.** $(-7; 8)$ ❒ **d.** $(\ln 5; \ln 2)$

9 À quel taux d'intérêts composés (approché éventuellement) faut-il placer un capital pour qu'il double en 5 ans ?

❒ **a.** 20 % ❒ **b.** 13,12 % ❒ **c.** 40 % ❒ **d.** 25 % ❒ **e.** 14,8 %

10 L'équation $2z + 5\bar{z} = 7 + i$ a pour ensemble S de solutions complexes :

❒ **a.** $S = \{a + i;\ a \in \mathbb{R}\}$ ❒ **c.** $S = \{\dfrac{3-i}{3}\}$ ❒ **e.** $\{1 - \dfrac{b}{3}i;\ b \in \mathbb{R}\}$

❒ **b.** $S = \{\dfrac{3+i}{3}\}$ ❒ **d.** $\{\dfrac{3+i}{3}; \dfrac{3-i}{3}\}$

11 Parmi les adhérents d'un club de jeux, 3 pratiquent les trois jeux proposés, 16 s'entraînent à l'awalé, 13 pratiquent les échecs chinois, 13 font du go, 4 jouent à la fois à l'awalé et aux échecs chinois, 6 jouent à la fois aux échecs chinois et au go, et enfin 5 jouent à la fois à l'awalé et au go. Tous les adhérents pratiquent au moins un jeu.
Quel est le nombre d'adhérents du club ?

❒ **a.** On ne peut pas le savoir
❒ **b.** 21 ❒ **c.** 25 ❒ **d.** 28 ❒ **e.** 30

12 La valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x\to-\infty} (8-x)e^x$ est :

❒ **a.** $+\infty$ ❒ **b.** $-\infty$ ❒ **c.** 0 ❒ **d.** 8 ❒ **e.** 1

13 Le système paramétré d'équations $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \\ mx + y = 26 \end{cases}$ admet un couple solutions $(x; y)$ unique si et seulement si :

❒ **a.** $m = 1$ ❒ **b.** $m = 2$ ❒ **c.** $m = 3$ ❒ **d.** $m = 5$ ❒ **e.** $m = 10$

14 La fonction f, polynôme de degré 2, telle que $f(-1) = -10$, $f(1) = 2$, et $f'(1) = 8$ est définie par :

❒ **a.** $f(x) = 2x^2 + 13x + 1$
❒ **b.** $f(x) = x^2 + 6x - 5$
❒ **c.** $f(x) = -5x^2 + 6x$
❒ **d.** $f'(x) = 2x + 5$
❒ **e.** $f'(x) = 2x - 6$

15 L'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est :

❒ **a.** $]-\infty ; -1]$
❒ **b.** $]1 ; +\infty[$
❒ **c.** $]-\infty ; -1] \cup]1 ; +\infty[$
❒ **d.** $[-1 ; 1[$
❒ **e.** $]-1 ; 1[$

16 L'ensemble des solutions de l'équation : $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ est :

❒ **a.** $\{\ln 3\}$ ❒ **b.** $\{0\}$ ❒ **c.** $\{\ln 3 ; 0\}$ ❒ **d.** vide ❒ **e.** $\{\ln(-3)\}$

17 L'ensemble des triplets solutions du système $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$ est :

❒ **a.** vide
❒ **b.** $\{(2 ; 7 ; 3)\}$
❒ **c.** $\{(2 ; 1 ; 0)\}$
❒ **d.** $\{(2 ; a ; b)$ avec a et b réels$\}$
❒ **e.** $\{(2 ; k ; 2k + 1)$ pour tout k réel$\}$

18 La limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{-x}}$ vaut :

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** e ❒ **d.** $-\infty$ ❒ **e.** $+\infty$

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{(x-1)^2}$.

Les trois nombres réels a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, on ait $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$ sont :

❒ **a.** $a = 2, b = 1, c = -3$
❒ **b.** $a = 2, b = -1, c = 3$
❒ **c.** $a = -2, b = 3, c = -3$
❒ **d.** $a = 2, b = 1, c = 3$
❒ **e.** $a = 2, b = -3, c = -1$

20 La limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x(x+5)}$ vaut :

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** 0,2 ❒ **d.** 5
❒ **e.** elle n'existe pas

21 Soit deux événements indépendants A et B tels que $p(A) = 50\ \%$ et $p(A \cup B) = 80\ \%$. Alors $p(B) =$:

❒ **a.** 20 % ❒ **b.** 40 % ❒ **c.** 50 % ❒ **d.** 60 % ❒ **e.** 30 %

22 Les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{5}z + 9 = 0$ sont :

❒ **a.** $\sqrt{5} + 2i$ et $\sqrt{5} - 2i$

❒ **b.** $5 - 2\sqrt{5}i$ et $5 + 2\sqrt{5}i$

❒ **c.** $-\sqrt{5} + 2i$ et $-\sqrt{5} - 2i$

❒ **d.** $\sqrt{5} + 2i$ et $-\sqrt{5} - 2i$

❒ **e.** Il n'y en a pas

23 La limite $\lim\limits_{x \to -1^-} (x+1)\ln(x^2 - 1)$ est égale à :

❒ **a.** 0 ❒ **b.** 1 ❒ **c.** $-\infty$ ❒ **d.** $+\infty$

❒ **e.** N'existe pas

24 Le système $\begin{cases} 3x - 2y + z = -9 \\ 2x + y - 4z = 15 \\ x + 4y - 3z = 27 \end{cases}$ a pour triplet solution :

❒ **a.** (2; 1; 3) ❒ **c.** (1; – 5; 2) ❒ **e.** (1; 5; – 2)

❒ **b.** (1; 2; 5) ❒ **d.** (3; 5; 2)

25 log x désigne le logarithme décimal d'un réel positif x.

L'expression : $\log 81 - \log \dfrac{1}{27} + \log 243 - \log 0{,}3$ peut se simplifier en :

❒ **a.** 10,1 log 3 + 1 ❒ **c.** 11 log 3 – 1 ❒ **e.** 12 log 3 + 1

❒ **b.** 10 log 3 – 1 ❒ **d.** 11 log 3 + 1

26 Le nombre de combinaisons de 2 objets parmi n objets est égal à 36. Combien vaut n ?

❒ **a.** 6 ❒ **b.** 7 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** 9 ❒ **e.** 10

27 La limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x(x+8)}$ vaut :

❒ **a.** 1 ❒ **b.** – 8 ❒ **c.** $-\infty$ ❒ **d.** 0

❒ **e.** n'existe pas

28 La valeur de la limite suivante $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{-x}}{e^x}$ est :

❒ **a.** $-\infty$ ❒ **b.** – 1 ❒ **c.** 0 ❒ **d.** 1 ❒ **e.** $+\infty$

29 La courbe de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 2}$ admet au point d'abscisse 1 une tangente dont le coefficient directeur est :

❒ **a.** 3/2 ❒ **b.** 2/3 ❒ **c.** –2/3 ❒ **d.** – 1,5 ❒ **e.** 0

30 Avec toutes les lettres du mot « MILLION » combien de mots différents (sans s'inquiéter de signification) peut-on écrire ?

❒ **a.** 720 ❒ **b.** 3 600 ❒ **c.** 5 040 ❒ **d.** 2 520 ❒ **e.** 1 260

31 Trois nombres sont en progression géométrique non croissante, et leur somme est 468. Le premier vaut 36. Combien vaut le second ?

❒ **a.** 108 ❒ **b.** – 108 ❒ **c.** – 144 ❒ **d.** 144 ❒ **e.** 13×13

32 La courbe représentative de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ possède une asymptote horizontale dont l'équation est :

❒ **a.** $y = 1$ ❒ **b.** $y = -1$ ❒ **c.** $y = 3$ ❒ **d.** $y = 2$ ❒ **e.** $y = -2$

33 La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2e^{2x}$ est :

❒ **a.** $f'(x) = 8\,x\,e^{2x}$

❒ **b.** $f'(x) = 16\,x\,e^{2x}$

❒ **c.** $f'(x) = 8\,x\,(1+x)\,e^{2x}$

❒ **d.** $f'(x) = 8\,x + 2\,e^{2x}$

❒ **e.** $f'(x) = (2\,x)(4\,x + 2\,e^{2x})$

34 Une solution de l'équation $(2\ln x)(\ln x^3) = 24$ est :

❒ **a.** 2^e ❒ **b.** $e + 2$ ❒ **c.** -2^e ❒ **d.** e^2 ❒ **e.** e^3

35 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,e^{x^3}$ admet pour primitive :

❒ **a.** $F(x) = 2\,x\,e + 3\,x^4e^{x^3}$

❒ **b.** $F(x) = (2\,x + 3\,x^4)e^{x^3}$

❒ **c.** $F(x) = (1/3)\,x^3\,e^{x^3}$

❒ **d.** $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{x^3}$

❒ **e.** $F(x)$ = une autre formule que celles ci-dessus

36 La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{e^{2x}} - e^{-2x} + 1\right)$ est égale à :

❒ **a.** 1 ❒ **b.** 0 ❒ **c.** 2 ❒ **d.** $+\infty$ ❒ **e.** $-\infty$

37 500 personnes sont inscrites à un club de sport proposant deux activités : 300 jouent au football, 120 jouent au tennis, 100 sont des dirigeants vétérans sympathisants qui ne jouent plus à rien. On tire au hasard la fiche d'un adhérent du club. La probabilité qu'il joue à un seul sport est :

❒ **a.** 0,2 ❒ **b.** 0,76 ❒ **c.** 0,8 ❒ **d.** 380 ❒ **e.** 420

38 Soit une suite (u_n) telle que $u_0 = e$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ pour tout entier n.
Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \ln(u_n)$.

❒ **a.** $v_0 = 0$

❒ **b.** (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5

❒ **c.** $v_{n+1} = -2\ln u_n$

❒ **d.** $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

❒ **e.** $v_3 = -8$

39 Dans ce pays dont l'économie est sinistrée, les prix ont augmenté de 1 000 % en 2 ans.

❒ **a.** les prix ont été multipliés par 5 chaque année.

❒ **b.** les prix ont été multipliés par 10 en deux ans.

❒ **c.** les prix ont été multipliés par 11 en deux ans.

❒ **d.** les prix ont augmenté en moyenne de 500 % chaque année pendant 2 ans.

❒ **e.** les prix ont augmenté en moyenne de 200 % chaque année pendant 2 ans.

40 Le nombre dérivé en 2 de la fonction f telle que $f(x) = x\ln x - x$ est :

❒ **a.** 2 ❒ **b.** $2\ln 2 - 2$ ❒ **c.** $\ln 2$ ❒ **d.** $\frac{1}{2}$ ❒ **e.** $-\ln 2$

Corrigés des exercices

1 : a	2 : e	3 : b	4 : d	5 : c	6 : d	7 : a	8 : d	9 : e	10 : c
11 : e	12 : c	13 : c	14 : b	15 : e	16 : b	17 : e	18 : e	19 : a	20 : c
21 : d	22 : a	23 : a	24 : e	25 : d	26 : d	27 : d	28 : e	29 : c	30 : e
31 : c	32 : e	33 : c	34 : d	35 : d	36 : a	37 : b	38 : b	39 : c	40 : c

1 **Bonne réponse : a.**

Conditions d'existence des termes avec ln :

$2 - x > 0$ et $x + 0,5 > 0$ d'où $-0,5 < x < 2$.

L'énoncé $2\ln(2 - x) - \ln(x + 0,5) \leq 3\ln 2$ se traduit par :

$\ln(2 - x)^2 - \ln(x + 0,5) \leq \ln 8$ puis par :

$$\ln\frac{(2-x)^2}{x+0,5} \leq \ln 8 \quad \text{et} \quad \frac{(2-x)^2}{x+0,5} \leq 8$$

$$\frac{4 - 4x + x^2 - 8x - 4}{x + 0,5} \leq 0 \text{ et } \frac{x^2 - 12x}{x + 0,5} \leq 0$$

Comme $-0,5 < x < 2$ le dénominateur est positif.

On doit avoir : $x(x - 12) \leq 0$, dont les solutions sont les réels x tels que : $0 \leq x \leq 12$.

En pensant à $-0,5 < x < 2$, on ne garde pour ensemble de solutions que $[0; 2[$.

2 Bonne réponse : e.

On tire les six boules à la suite.

Le nombre de cas possibles est : $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Pour réaliser l'événement proposé on tire les 5 boules rouges d'abord et la boule noire à la fin.

Le nombre de cas favorables est : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

La probabilité cherchée est $120/720 = 1/6$.

3 Bonne réponse : b.

G sera une primitive si $G'(x) = g(x)$.

En dérivant le b) on obtient :

$G'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)\, e^{-x} = (-2x + 3)\, e^{-x}$

Les dérivées des autres propositions ne donnent pas la bonne expression. Celle du e) donne l'opposé soit $(2x - 3)e^{-x}$.

4 Bonne réponse : d.

On obtient $u_0 = 0$; $u_1 = 3/4$; $u_2 = \dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{19}{4}} = \dfrac{36}{38} = \dfrac{18}{19}$.

D'où $v_0 = -1/3$; $v_1 = \dfrac{-1/4}{15/4} = \dfrac{-1}{15}$; $v_2 = \dfrac{-1/19}{75/19} = \dfrac{-1}{75}$.

On nous dit que la suite est géométrique, pas besoin de faire une vérification pour tout entier i, il suffit de constater qu'on passe du premier terme au terme suivant en multipliant par 1/5 soit 0,2.

5 Bonne réponse : c.

On pose $u' = x$, et $v = \ln x$. D'où $u = \frac{1}{2} x^2$ et $v' = 1/x$.

$$\int_1^e x \ln x\, dx = [0{,}5x^2 \ \ln x]_1^e - \int_1^e (0{,}5x^2)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left(\frac{e^2 \ln e}{2} - 0\right) - \int_1^e (0{,}5x)\, dx = \frac{e^2}{2} - [0{,}25x^2]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

6 Bonne réponse : d.

On sait qu'il n'y a qu'une bonne réponse possible, on donc peut éliminer successivement :

a. car la tangente en un point d'abscisse comprise entre 0 et 1 n'aura pas un coefficient directeur opposé à celui de la tangente au point d'abscisse opposée ;

b. car la limite de f en $+\infty$ est la limite de (x^3/x^2) donc celle de x soit $+\infty$, alors que sur le dessin c'est visiblement 0 ;

c. car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(-1) = -0{,}5$ et non 0 ;

e. car $f'(x) < 0$ quand x est compris entre -1 et 1, donc f est décroissante quand $x \in]-1; 1[$.

Conclusion : la bonne réponse est d.

7 Bonne réponse : a.

Le $n^{\text{ième}}$ terme impair vaut $(2n-1)$: ainsi le premier est 1, le deuxième est 3, le troisième est 5.

La somme des n premiers entiers impairs vaut : $\dfrac{1+(2n-1)}{2} \times n = n^2$.

8 Bonne réponse : d.

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$.

Le système $\begin{cases} 3X - Y = 13 \\ X + 2Y = 9 \end{cases}$ a pour couple solution $(5; 2)$.

$e^x = 5$ donne $x = \ln 5$, et $e^y = 2$ donne $y = \ln 2$.

D'où finalement le couple solution $(\ln 5; \ln 2)$.

9 Bonne réponse : e.

Si l'on avait une calculatrice ce serait plus simple…

Placé à t % l'an, le capital est multiplié par $(1 + t\ \%)^5$ en 5 ans, donc on a $(1 + t\ \%)^5 = 2$ puis $1 + t\ \% = 2^{1/5}$ soit environ 1,148 et t vaut 0,148 soit 14,8 %.

Sans calculatrice, on peut se dire qu'à intérêts simples il faut 20 % chaque année pendant 5 ans pour obtenir 100 %. Comme avec des intérêts composés cela va beaucoup plus vite on élimine ainsi les possibilités supérieures ou égales à 20 % soit a, c et d.

Mais comment choisir entre le b et le e ?

On peut tester un taux compris entre les valeurs proposées, et ayant l'avantage d'être un nombre simple : par exemple 14 %.

$1{,}14^2 = 1{,}296$ qui est inférieur à 1,3.

$1{,}14^4$ sera inférieur à $1{,}3^2 = 1{,}69$.

$1{,}14^5$ sera inférieur à $1{,}69 \times 1{,}14$ et donc à $1{,}7 \times 1{,}14$ qui vaut environ 1,91 et est bien inférieur à 2. Conclusion : 1,14 ne suffit pas et la valeur 1,1312 est trop petite. La solution est la multiplication par 1,148 qui correspond à un taux de 14,8 %.

10 Bonne réponse : c.

Soit $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

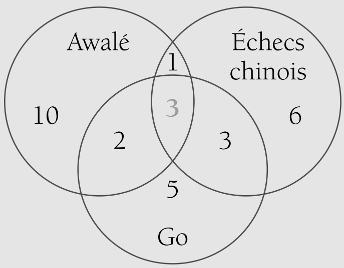
On obtient : $2x + i\,y + 5x - 5i\,y = 7 + i$ donc $7x = 7$ et $-3iy = 1i$.

On trouve $x = 1$ et $y = -1/3$.

D'où la solution $z = 1 - (1/3)\,i = \dfrac{3-i}{3}$.

11 Bonne réponse : e.

On remplit un diagramme de Venn (avec des patates !), en plaçant d'abord le nombre 3 dans la partie commune des trois sous ensembles.



Attention à la bonne compréhension du « à la fois » pour deux jeux, qui comprend les personnes jouant aux trois. Si on ne le comprend pas ainsi on aboutit d'ailleurs en fin d'exercice à une valeur qui n'est pas proposée. Au total on trouve 30 adhérents.

12 Bonne réponse : c.

Au départ, on a une forme indéterminée $(+\infty)(0)$. Mais :

$$\lim_{x \to -\infty} (8-x)e^x = \lim_{x \to -\infty} 8e^x - \lim_{x \to -\infty} xe^x = 8 \times 0 - \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = 0 + 0 = 0$$

13 Bonne réponse : c.

Les deux premières lignes du système permettent de calculer $x = 7$ et $y = 5$.

À la troisième ligne, on a alors : $7m + 5 = 26$ donc $7m = 21$ et $m = 3$.

Si m vaut 3 le système est vérifié pour le seul couple $(7\,;5)$.

Si m est différent de 3 les trois lignes sont incompatibles et il n'y a pas de solution.

14 Bonne réponse : b.

Résolution « générale » :

On cherche $f(x)$ sous la forme $(ax^2 + bx + c)$.

$f(-1) = -10$ donne $a - b + c = -10$.

$f(1) = 2$ donne $a + b + c = 2$.

Par soustraction membre à membre on obtient $-2b = -12$ et $b = 6$.

D'autre part $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(1) = 8$ donc $2a + 6 = 8$ et $a = 1$.

$a + b + c = 2$ donne alors $c = -5$.

Conclusion : $f(x) = 1x^2 + 6x - 5$. C'est la proposition b.

On peut vérifier que $f'(x) = 2x + 6$ n'est pas proposé en d. et e. qui sont donc faux.

Résolution « astucieuse » :

Si $f(-1) = 10$ est vérifié par les trois premières propositions de $f(x)$, il n'en est pas de même pour $f(1) = 2$: seule la formule b) la respecte. Comme il n'y a qu'une bonne réponse… c'est la b).

15 Bonne réponse : e.

$\ln A$ n'existe que pour A strictement positif.

$\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ a pour ensemble solution $]-1\,;1[$.

16 Bonne réponse : b.

On pose $X = e^x$ d'où $X^2 = e^{2x}$.

L'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$.

On peut la résoudre ou remarquer que le membre de gauche se factorise en $(X+3)(X-1)$. On obtient $X = -3$ ou $X = 1$.

$e^x = -3$ ne donne pas de solution en x ; $e^x = 1$ donne $x = 0$.

Il y a une unique solution : $x = 0$.

17 Bonne réponse : e.

En additionnant membre à membre les deux lignes on obtient $2x = 4$ donc $x = 2$.

Ensuite, les deux lignes reviennent à la seule équation $2y - z = -1$.

Si l'on choisit pour y une valeur k il faut alors prendre $z = 2k + 1$.

Il y a une infinité de triplets solutions quand on fait varier k, mais ils ont tous la même forme $(2 ; k ; 2k + 1)$.

18 Bonne réponse : e.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^{-x}}$ est de la forme $\dfrac{+\infty}{0+}$ donc le résultat est $+\infty$.

19 Bonne réponse : a.

Pour tout réel x on doit avoir $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

Donc $2x^2 - 3x - 2 = ax^2 + (b - 2a)x + (a - b + c)$.

D'où, en identifiant les coefficients dans les membres de gauche et de droite : $a = 2$; puis $b - 2a = -3$ donc $b = -3 + 2 \times 2 = 1$;

et enfin $(a - b + c) = -2$ donc $c = -2 + b - a = -2 + 1 - 2 = -3$.

Ainsi $(a, b, c) = (2 ; 1 ; -3)$.

20 Bonne réponse : c.

On sait qu'au point origine O, la fonction $\sin x$ a pour tangente une droite de coefficient directeur le nombre dérivé en 0,

soit $\cos 0 = 1$. Cette tangente a pour équation $y = x$, et cela signifie que pour x proche de 0, la valeur de $\sin x$ est proche de celle de x.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x+5} = 1/5$.

On obtient par produit des deux résultats précédents :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(x+5)} = 1 \times 1/5 = 1/5 = 0{,}2.$$

21 Bonne réponse : d.

A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0{,}5\, p(B)$.

Mais $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$.

Donc : $0{,}5\, p(B) = 0{,}5 + p(B) - 0{,}8$.

puis $0{,}3 = 0{,}5\, p(B)$ et $p(B) = 3/5 = 0{,}6 = 60\ \%$.

22 Bonne réponse : a.

$\Delta = (-2\sqrt{5})^2 - 4 \times 9 = 20 - 36 = -16 = (4i)^2$

Les solutions sont : $\dfrac{2\sqrt{5} + 4i}{2}$ et $\dfrac{2\sqrt{5} - 4i}{2}$ soit en simplifiant

$\sqrt{5} + 2i$ et $\sqrt{5} - 2i$.

23 Bonne réponse : a.

Si x tend vers -1 en étant inférieur (comme $-1{,}1$) on a $x^2 > 1$ et donc $(x^2-1) > 0$ et $\ln(x^2-1)$ existe.

La limite $\lim\limits_{x\to -1^-} (x+1)\ln(x^2-1)$ a la forme indéterminée $0\,(-\infty)$.

Soit $X = -1 - x$, on a $x = -1 - X$ et $x^2 - 1 = X^2 - 2X$

$$\lim_{x\to -1^-} (x+1)\ln(x^2-1) = \lim_{X\to 0^+} (-X)\ln X(X+2)$$

$$= \lim_{X\to 0^+} (-X)\ln X + \lim_{X\to 0^+} (-X)\ln(X+2)$$

$= 0 + 0(\ln 2) = 0.$

24 Bonne réponse : e.

On peut essayer les valeurs proposées sans résoudre le système, et la première ligne suffit à trancher.

Au a) on obtient 7 et non -9.

Au b) on obtient 4 et non -9.

Au c) on obtient 15 et non -9.

Au d) on obtient 1 et non -9.

Au e) on obtient bien $-9 = -9$. On peut vérifier les deux dernières lignes alors ($15 = 15$ et $27 = 27$).

25 Bonne réponse : d.

$\log 81 - \log \dfrac{1}{27} + \log 243 - \log 0{,}3$

$= \log 3^4 - \log 3^{-3} + \log 3^5 - \log 3 + \log 10$

$= (4 + 3 + 5 - 1) \log 3 + \log 10$

$= 11 \log 3 + 1$

26 Bonne réponse : d.

$\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!} = 36$ donc $\dfrac{n(n-1)}{2} = 36$ et $n(n-1) = 72$.

On trouve $n = 9$ en pensant à $9 \times 8 = 72$ et on gagne du temps par rapport à la résolution de l'équation du second degré.

27 Bonne réponse : d.

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$ on va donc encadrer notre limite et utiliser le théorème dit « des deux gendarmes ».

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{x(x+8)} \leq \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x(x+8)} \leq \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x(x+8)}$$

Mais les deux limites extrêmes sont égales à $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-1}{x^2}$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$ donc égales à 0, et ainsi $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x(x+8)} = 0$.

28 Bonne réponse : e.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{-x}}{e^x}$ est de la forme $\dfrac{+\infty}{0^+}$ donc elle vaut $+\infty$.

29 Bonne réponse : c.

Calculons la dérivée puisque le coefficient directeur d'une tangente est un nombre dérivé.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x+2)-(x^2-4x+3)(1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-11}{(x+2)^2}.$$

On obtient $f'(1) = -6/9 = -2/3$.

30 Bonne réponse : e.

Si toutes les lettres étaient différentes, il y aurait :

$7\,! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5\,040$ mots possibles.

Notons i_1 et i_2 les deux i utilisés : le même mot peut être écrit avec i_1 placé avant i_2 ou avec i_2 placé avant i_1.

Chacun des 5 040 mots est compté deux fois trop à cause de ces deux « i », et encore deux fois trop à cause des deux lettres « l ». Il faut donc diviser 5 040 par 4 et on obtient 1 260 mots différents.

31 Bonne réponse : c.

Soit q la raison. Les trois nombres sont : 36, 36q, $36q^2$.

Le total des nombres est : $36(1 + q + q^2) = 468$ d'où $(1 + q + q^2) = 13$.

On résout : $q^2 + q - 12 = 0$. Il y a deux solutions $q = 3$ ou $q = -4$.

Si $q = 3$, la suite est croissante, ce qui ne convient pas.

Mais pour $q = -4$, la suite alterne nombre positif et nombre négatif et n'est donc pas croissante. C'est la seule réponse possible.

Le deuxième nombre est donc $36 \times (-4) = -144$.

32 Bonne réponse : e.

Une asymptote horizontale d'équation y = constante correspond à une limite finie (la constante) quand la variable x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Mais $\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ a même limite que $\dfrac{-2x^2}{x^2}$ donc cette limite est -2.

L'équation de l'asymptote horizontale est $y = -2$.

33 Bonne réponse : c.

Posons $u = 4x^2$ et $v = e^{2x}$, on a alors $u' = 8x$ et $v' = 2\,e^{2x}$.

On obtient : $f'(x) = 8x\,e^{2x} + (4x^2)(2\,e^{2x}) = (8x + 8x^2)e^{2x} = 8x(1+x)e^{2x}$.

34 Bonne réponse : d.

$(2\ln x)(\ln x^3) = 24$ donne $(2\ln x)(3\ln x) = 24$ puis $6\,(\ln x)^2 = 24$ et $(\ln x)^2 = 4$. On obtient $\ln x = 2$ ou $\ln x = -2$.

Par suite $x = e^2$ ou $x = e^{-2}$.

La valeur e^2 est proposée (« une des solutions est... »), les autres ne conviennent pas.

35 Bonne réponse : d.

Il faut dériver une des fonctions F et retrouver f.

Il peut être de bon sens d'essayer la valeur de F la plus simple d'abord, parmi celles proposées…

Au d) on calcule $\left(\frac{1}{3}e^{x^3}\right)' = (1/3)(3x^2)e^{x^3} = x^2e^{x^3}$ et c'est fini !

36 Bonne réponse : a.

On peut calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}} - e^{-2x} + 1\right)$ en additionnant les limites de deux morceaux :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{X}{e^{X}}\right) = 0$ d'une part

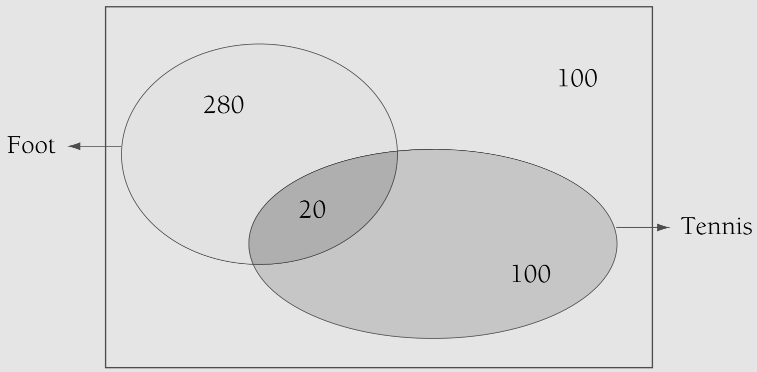
et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-2x} + 1\right) = -0 + 1 = 1$ d'autre part.

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^{2x}} - e^{-2x} + 1\right) = 0 + 1 = 1.$

37 Bonne réponse : b.

On peut faire un diagramme de Venn.

En additionnant les effectifs donnés on trouve : 300 + 120 + 100 = 520 soit 520 – 500 = 20 adhérents de trop. On comprend qu'il y a 20 adhérents qui pratiquent deux sports, on remplit cette partie commune, et les effectifs des autres régions se déduisent vite.



Le nombre de personnes ne jouant qu'à un seul sport est :

280 + 100 = 380.

La probabilité cherchée est 380/500 = 0,76.

38 Bonne réponse : b.

$u_0 = e$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ donc $u_1 = \sqrt{e} = e^{½}$ puis $u_2 = e^{¼}$ ensuite $u_n = e^{1/2^n}$ et encore $u_{n+1} = e^{1/2^{n+1}}$.

$v_n = \ln(u_n)$ donc $v_0 = \ln e = 1$, d'où le a) est faux.

Ensuite $v_1 = \ln(e^{½}) = ½$, puis $v_2 = \ln(e^{¼}) = ¼$ et $v_3 = 1/8$

d'où le e) est faux : il remplace 1/8 par – 8.

De plus $v_n = \ln(e^{1/2^n}) = \dfrac{1}{2^n}$ et $v_{n+1} = \ln(e^{1/2^{n+1}}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$ donc il s'agit d'une suite géométrique de raison ½ et le b) est vrai.

Le c) est faux car $v_{n+1} = (1/2) \ln u_n$.

On pouvait voir vite que $v_{n+1} = \ln u_n = \ln \sqrt{u_n} = (1/2) \ln u_n = (1/2) v_n$.

Le d) est faux avec une erreur de 1 dans l'exposant.

39 Bonne réponse : c.

Dans une augmentation de 1 000 %, le nombre 100 devient : 100 + 1 000 = 1 100, donc les prix ont été multipliés par 11.

40 Bonne réponse : c.

Calculons la dérivée $f'(x) = 1 \ln x + x\,(1/x) - 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x$.

On obtient $f'(2) = \ln 2$.

Conditions minimales (Supplément pour le test Tage Mage) 25

Imaginons un problème dont l'énoncé est incomplet, et qu'on ne peut résoudre avec les données fournies.

On nous propose ensuite deux informations supplémentaires.

- Dans certains problèmes, il est possible qu'avec la première information supplémentaire on puisse répondre à la question.
- Dans certains problèmes, il est possible que sans utiliser cette première information supplémentaire, on puisse grâce à la deuxième information supplémentaire, seule, répondre à la question.
- Dans d'autres problèmes, il sera nécessaire d'utiliser les deux informations ensemble pour pouvoir répondre à la question, et ces deux informations permettront de trouver la solution.
- Il existe des problèmes où quelle que soit l'information qu'on ajoute à l'énoncé du problème (la première information supplémentaire seule, ou la deuxième information supplémentaire seule), cela permet de trouver la solution.
- Il existe encore des problèmes où malgré les deux informations supplémentaires proposées, on n'arrive pas à répondre à la question posée.

Pour un candidat à un concours d'école de commerce, l'épreuve des conditions minimales va consister à dire dans lequel des genres précédents de problème on se trouve, sans donner d'explication et sans donner la solution à la question posée si elle existe.

Il existe donc 5 genres de problèmes qu'on peut coder par les lettres A, B, C, D, E et il faut trouver auquel de ces cinq genres appartient le problème posé.

Dans ce type d'épreuve on attend donc que vous répondiez l'une de ces 5 lettres, et une seulement, sans justification. Voilà la signification de ces lettres :

- **A** : l'information supplémentaire (1) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (2) ne le permet pas.
- **B** : l'information supplémentaire (2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (1) ne le permet pas.
- **C** : les deux informations (1) et (2) prises ensemble permettent de répondre à la question et aucune séparément ne le peut.

- **D** : chaque information (1) ou (2) permet séparément de répondre à la question posée.
- **E** : Les deux informations supplémentaires (1) et (2) ne suffisent pas pour répondre à la question.

> Exemple 1
>
> Voici **un exemple** d'énoncé incomplet et sa question :
>
> « La somme de 2006 entiers positifs non nuls est 2010. Combien vaut leur produit ? »
>
> Les deux informations supplémentaires proposées sont :
>
> « (1) : Ce produit est pair.
> (2) : Ce produit est multiple de 3. »

Réfléchissons au problème…

Le plus petit entier positif non nul est 1 : si on le prend 2 006 fois on aura un total de 2 006, qui sera plus petit de 4 que le 2 010 attendu. Comment passer de 2 006 à 2 010 ? On peut ajouter 4 de plusieurs façons : une fois 4 ou quatre fois 1, deux fois 2, ou encore une fois 1 et une fois 3, ou enfin deux fois 1 et une fois 2. Détaillons :

- on ajoute 1 à quatre nombres 1, donc les 2 006 nombres seront 2 002 fois le 1 et 4 fois le 2. Le produit est égal à $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$;
- on ajoute 1 à deux nombres 1, et 2 à un nombre 1, donc les 2 006 nombres seront 2 003 fois le 1, 2 fois le 2 et une fois le 3. Le produit vaudra $1 \times 2 \times 2 \times 3 = 12$;
- on ajoute 1 à un nombre 1 et 3 à un nombre 1, donc les 2 006 nombres seront 2 004 fois le 1, 1 fois le 2 et 1 fois le 4. Le produit vaudra $1 \times 2 \times 4 = 8$;
- on ajoute 2 à 2 nombres 1, donc les 2 006 nombres seront 2 004 fois le 1 et 2 fois le 3. Le produit vaudra $1 \times 3 \times 3 = 9$;
- on ajoute 4 à un nombre 1, donc les nombres seront 2 005 fois le 1 et 1 fois le 5. le produit sera $1 \times 5 = 5$.

Dans un problème de maths ordinaire, on aurait donc cinq solutions possibles.

Dans l'épreuve des conditions minimales, il est sous-entendu qu'il n'y a qu'une bonne réponse; il faut donc étudier les informations supplémentaires pour essayer d'arriver à une seule solution possible.

- L'info (1) permet d'éliminer les solutions donnant pour produit 9 ou 5, mais elle ne suffit pas pour conclure car il reste 3 solutions possibles.
- L'info (2) permet d'éliminer les solutions donnant pour produit 16, 8, et 5 mais il reste 2 solutions possibles.

Aucune des deux infos séparément ne permet de conclure sur une réponse unique.

Par contre, les deux infos réunies permettent d'éliminer quatre solutions possibles et de ne garder que la solution donnant un produit égal à 12.

Ce problème doit donc avoir pour réponse la **lettre C** : **les deux infos prises ensemble permettent de répondre à la question, alors qu'aucune séparément ne le peut.**

> Exemple 2
>
> Imaginons maintenant le même énoncé :
>
> « La somme de 2 006 entiers positifs non nuls est 2 010. Combien vaut leur produit ? »
>
> Les deux informations supplémentaires proposées seront maintenant :
>
> « (1) : Ce produit n'est pas divisible par 5.
>   (2) : Ce produit est multiple de 3. »

On s'aperçoit qu'aucune des deux informations ne permet séparément de réduire les cinq possibilités à une seule solution, et que même réunies on n'aboutit pas non plus. Dans ce cas la réponse à l'épreuve est la **lettre E** : **Les deux informations supplémentaires (1) et (2) ne suffisent pas pour répondre à la question.**

> Exemple 3
>
> Imaginons toujours le même énoncé :
>
> « La somme de 2 006 entiers positifs non nuls est 2 010. Combien vaut leur produit ? »
>
> Les deux informations supplémentaires proposées seront cette fois :
>
> « (1) : Ce produit est divisible par 6.
>   (2) : Ce produit est multiple de 3. »

On s'aperçoit que l'info (1) permet de conclure tout de suite car parmi les cinq produits possibles il n'y en a qu'un qui est divisible par 6 : c'est le cas du produit 12.

Par contre l'info (2) ne permet pas d'aboutir.

Dans ce cas la réponse à l'épreuve est la **lettre A : l'information supplémentaire (1) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (2) ne le permet pas.**

Si on intervertit les deux numéros des infos, la réponse à l'épreuve de façon évidente serait la **lettre B : l'information supplémentaire (2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (1) ne le permet pas.**

Exemple 4

Imaginons finalement ce même énoncé :

« La somme de 2 006 entiers positifs non nuls est 2 010. Combien vaut leur produit ? »

Les deux informations supplémentaires proposées seront cette dernière fois :

« (1) : Ce produit est divisible par 6.

(2) : Ce produit n'est divisible ni par 5 ni par 8, ni par 9. »

Chacune des deux infos permet séparément d'aboutir à la même réponse unique : parmi les cinq possibilités de produit le seul valable est 12.

Dans ce cas la réponse à l'épreuve est la **lettre D : chaque information (1) ou (2) permet séparément de répondre à la question posée**.

Exercices d'entraînement

La question est la même pour chacun des 14 problèmes :

« À laquelle des 5 catégories A, B, C, D, E le problème appartient-il ? »

A : L'information supplémentaire (1) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (2) ne le permet pas.

B : L'information supplémentaire (2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire (1) ne le permet pas.

C : Les deux informations (1) et (2) prises ensemble permettent de répondre à la question et aucune séparément ne le peut.

D : Chaque information (1) ou (2) permet séparément de répondre à la question posée.

E : Les deux informations supplémentaires (1) et (2) ne suffisent pas pour répondre à la question.

1 Les nombres a et b sont des entiers tels que $3a + b = 4a + 2b$. Combien vaut le produit ab ?

1) a et b sont opposés. 2) a et l'opposé de b sont inverses.

❐ **A** ❐ **B** ❐ **C** ❐ **D** ❐ **E**

2 Le nombre a vérifie $a^2 - 1 = 5(a - 1)$. Calculer a.

1) a est le cube d'un entier. 2) l'inverse de a est entier.

❐ **A** ❐ **B** ❐ **C** ❐ **D** ❐ **E**

3 Sur la planète Mathadore, le concours général de maths comporte 30 questions. Une bonne réponse apporte 7 points, une mauvaise en enlève 12. Ne pas répondre n'apporte ni n'enlève de point. Une Mathadorée a obtenu 77 points. Combien a-t-elle fait de réponses fausses ?

1) Elle s'est trompée au moins une fois.

2) Elle a répondu à toutes les questions.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

4 Les masses, en kilogrammes, de 5 citrouilles sont des entiers tous différents.

On pèse les citrouilles deux par deux sur une balance. Les plus petites masses qu'on peut obtenir sont 16 kg et 18 kg; les plus grandes masses qu'on peut obtenir sont 26 kg et 27 kg.

Quelles sont les cinq masses des diverses citrouilles ?

1) L'une des masses est 13 kg. 2) L'une des masses est 12 kg.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

5 Trouver le nombre unique de deux chiffres, qui s'écrit ab avec $a \geq 1$.

1) $2a + 3b = 11a + 2b$. 2) 19 est un diviseur du nombre.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

6 Stève a-t-il plus de DVD que Robert ?

1) Dominique a plus de DVD que Robert.

2) Dominique a plus de DVD que Stève.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

7 Quelle est la valeur de x ?

1) $(x + 2)(y - 3) = 0$. 2) $2x + y = -1$.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

8 x, y, z, t sont des réels.

Peut-on dire que le produit $(x - 5)(y - 4)^2(z - 3)^3(t - 2)^4$ est un nombre positif ou nul ?

1) $y > 4$ et $t > 2$. 2) $x > 5$ et $z > 3$.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

9 Dans une mallette de bois en forme de pavé droit de base 22,5 cm × 37,5 cm, on place des boules de pétanque : on ne peut les empiler en hauteur. Combien la mallette contient-elle de boules ?

1) Le diamètre d'une boule est 75 mm.

2) On peut ranger exactement 3 boules le long du plus petit côté de la mallette.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

10 La moyenne des poids de mes trois enfants est 36 kg. Est-ce que le poids du plus léger d'entre eux dépasse 20 kg ?

1) Le plus lourd des enfants pèse 44 kg.

2) L'un des enfants pèse 40 kg.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

11 On coupe une corde de 280 m de long en trois morceaux. Quelle est la longueur du morceau le plus long ?

1) La différence de longueur entre les deux premiers morceaux est 32 m, et le troisième et dernier morceau mesure 16 m.

2) Un des morceaux mesure 148 m.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

12 Quelle est la valeur du produit $xyzt$?

1) $\frac{xy}{zt} = 1$.

2) $x = \frac{1}{y}$ et $z = \frac{1}{t}$.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

13 a et b sont deux nombres entiers strictement positifs.
Le produit ab est-il strictement plus grand que 1 000 ?

1) $a > 50$.

2) $b < 20$.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

14 Que vaut la fraction $\frac{x-y}{x+z}$?

1) $x + z = 7$.

2) $y + z = 8$.

❒ **A** ❒ **B** ❒ **C** ❒ **D** ❒ **E**

Corrigés des exercices

1 : B	2 : D	3 : D	4 : A	5 : A	6 : E	7 : C
8 : B	9 : D	10 : A	11 : D	12 : B	13 : E	14 : C

1 $3a + b = 4a + 2b$ donne $-b = a$ donc a et b sont opposés.

- La première proposition ne nous apprend rien de plus que l'énoncé, qui ne permet pas de conclure puisque le produit ab est alors égal à $-a^2$ donc à l'opposé du carré d'un entier inconnu.

- La deuxième proposition donne $a(-b) = 1$ d'où $a^2 = 1$. On obtient $a = 1$ avec $b = -1$, ou $a = -1$ avec $b = 1$. Dans les deux cas le produit ab est égal à -1. La deuxième proposition, prise seule, permet donc de conclure.

La réponse à cet exercice est donc la lettre B : l'information supplémentaire 2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire 1) ne le permet pas.

2 L'énoncé conduit à une équation du second degré $a^2 - 5a + 4 = 0$. On peut la résoudre et trouver comme solutions 1 et 4.

On peut aussi remarquer que 1 est une solution évidente de l'énoncé, rassembler tout à gauche du symbole = et trouver la factorisation

$(a-1)(a-4) = 0$.

L'énoncé oriente vers une seule solution : pour l'instant on ne sait qui choisir de 1 ou 4.

- La proposition 1) s'applique à 1 qui est le cube de 1, mais pas à 4 qui n'est pas un cube. On peut donc conclure grâce à la proposition 1.
- La proposition 2) s'applique à 1 qui a pour inverse 1 qui est entier, mais pas à 4 donc l'inverse, un quart n'est pas entier. La proposition 2 permet donc de conclure.

Finalement chacune des deux propositions permet seule de conclure.

La réponse à cet exercice est donc la lettre D : chaque information 1) ou 2) permet séparément de répondre à la question posée.

3 Soit b le nombre de bonnes réponses et f le nombre de réponses fausses.

On a alors $b + f \leq 30$. Ce n'est pas forcément = car il peut y avoir des questions non résolues.

Pour avoir 77 points il faut avoir répondu juste à au moins 11 questions à 7 points chacune, donc $b \geq 11$.

On doit avoir $7b - 12f = 77$ donc $12f = 7b - 77 = 7(b - 11)$.

Ainsi il faut chercher 12f parmi les multiples communs de 12 et de 7. Les plus petits sont 0 (pour $f = 0$) et 84 (pour $f = 7$). Le suivant serait $84 \times 2 = 168$ mais alors on aurait $f = 14$ puis $7b = 77 + 168 = 245$ et $b = 245/7 = 35$ ce qui est trop grand par rapport à 30. Les seules possibilités sont donc :

- soit $f = 0$ avec $7b = 77$ donc $b = 11$ (et 19 non réponses) ;
- soit $f = 7$ avec $7b = 77 + 84 = 161$ donc $b = 161/7 = 23$ (et aucune non réponse).

La proposition 1) permet d'éliminer $f = 0$ et donne la solution $f = 7$. Elle permet donc de conclure, seule.

La proposition 2) donne $b + f = 30$ ce qui élimine le cas $f = 0$ conduisant à $b + f = 11$. Elle permet donc de conclure, seule.

Finalement chacune des deux propositions permet seule de conclure. La réponse à cet exercice est donc la lettre D : chaque information 1) ou 2) permet séparément de répondre à la question posée

4 Notons a, b, c, d, e les cinq masses dans l'ordre croissant.

On traduit l'énoncé par :

$\{a + b = 16 ; a + c = 18 ; d + e = 27 ; c + e = 26\}$.

On peut ensuite essayer d'exprimer toutes les masses à l'aide de la variable « a », et remarquer que :

$a + b = 16$ donc $b = 16 - a$

$a + c = 18$ donc $c = 18 - a$

$c + e = 26$ donc $e = 26 - c = 26 - 18 + a = 8 + a$

$d + e = 27$ donc $d = 27 - e = 27 - 8 - a = 19 - a$

Les cinq masses sont dans l'ordre croissant :

$a < 16 - a < 18 - a < 19 - a < 8 + a$.

Comme $a < b$ on obtient $a < 16 - a$ donc $2a < 16$ et $a < 8$. On peut envisager diverses valeurs de a plus petites que 8, et les valeurs qu'on déduit pour les autres masses.

On peut dresser le tableau ci-dessous :

a	$16 - a$	$18 - a$	$19 - a$	$8 + a$
7	9	11	12	15
6	10	12	13	14
5	11	13	14	13

On ne poursuit pas pour a plus petit que 5 car déjà pour cette valeur il y a un problème : la valeur de e n'est pas supérieure à la valeur de d comme nécessaire. Finalement il n'y a que deux possibilités : $a = 7$ ou $a = 6$.

- L'info 1) permet de trouver que $a = 6$ car c'est la seule possibilité conduisant à l'une des masses valant 13 kg.
- L'info 2) ne permet pas de conclure car la masse 12 kg figure dans les deux possibilités.

La réponse à l'épreuve est la lettre A : l'information supplémentaire 1) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire 2) ne le permet pas.

5 Sans précisions le nombre qui s'écrit ab peut prendre 90 valeurs de 10 à 99.

- Avec l'info 1) soit $2a + 3b = 11a + 2b$ on obtient $b = 9a$. Comme a et b sont des chiffres la seule possibilité est $a = 1$ et $b = 9$. Le nombre est donc 19 et l'info (1) suffit à le déterminer.
- Avec l'info 2), on sait que le nombre se divise par 19 ce qui donne les possibilités 19, 38, 57, 76, 95. On ne sait lequel choisir alors que l'énoncé réclame une seule solution. L'info 2) ne suffit pas.

Conclusion : le problème entre dans la catégorie A (l'info 1) suffit mais pas la 2), pour résoudre le problème posé).

6 Dominique est celui qui a le plus de DVD, mais les informations supplémentaires, seules ou les deux réunies, ne suffisent pas pour savoir qui en a de plus entre Robert et Stève.

Les informations peuvent être respectées par exemple par :

- la situation : Stève 8 DVD, Robert 5 DVD et Dominique 10 ;
- ou la situation : Stève 6 DVD, Robert 7, Dominique 10.

Le problème entre dans la catégorie E : les deux informations ensemble ne permettent pas de répondre au problème.

7 Un produit est nul si au moins un des facteurs est nul.

- L'info 1) peut conduire à $x = -2$ ou/et $y = 3$. Si c'est $y = 3$, la valeur de x peut être autre chose que -2. L'info (1) ne suffit pas à conclure.
- L'info 2) donne $y = -2x - 1$. Il y a une infinité de couples de la forme $(k ; -2k - 1)$ avec k entier, qui peuvent être solutions. L'info(2) ne suffit pas à conclure.

Si on prend les deux infos ensemble : avec $x = -2$ on obtient $y = 3$, avec $y = 3$ on obtient $x = -2$. Il n'y a qu'une possibilité, le couple $(-2; 3)$ et donc une seule valeur pour x : le nombre -2.

Le problème entre dans la catégorie C : les deux informations ensemble permettent de répondre au problème, alors qu'aucune séparément ne le permet.

8 Un carré est toujours positif ou nul donc $(t-2)^2$ et $(y-4)^4$ sont positifs ou nuls. Le signe du produit qui nous occupe est celui de $(x-5)(z-3)^3$.

Comme le signe de $(z-3)^3$ est celui de $(z-3)$, le signe cherché est finalement le même que celui de $(x-5)(z-3)$.

- L'info 1) n'apporte aucun renseignement utile supplémentaire à ce qui précède.
- L'info 2) donne le signe positif à chacune des parenthèses, donc à leur produit, et permet de conclure.

Le problème entre dans la catégorie B : l'information supplémentaire 2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire 1) ne le permet pas.

9 Remarquons d'abord que 75 mm = 7,5 cm.

- L'info 1) est suffisante : en largeur on peut placer 22,5/7,5 = 3 boules; en longueur on peut placer 37,5/7,5 = 5 boules. Dans la mallette on peut placer $3 \times 5 = 15$ boules.
- L'info 2) est suffisante : si on place exactement 3 boules en largeur c'est que le diamètre d'une boule est 22,5/3 = 7,5 cm. On trouve alors qu'on peut mettre 37,5/7,5 = 5 boules en longueur et le nombre total des boules est de $3 \times 5 = 15$.

Le problème entre dans la catégorie D : chaque information 1) ou 2) permet séparément de répondre à la question posée

10 Le poids total des trois enfants est : $36 \times 3 = 108$ kg.

L'info 1) va suffire à répondre au problème.

En effet $108 - 44 = 64$ donc les deux enfants les moins lourds ont pour poids total 64 kg. Le plus lourd de ces deux-là pèse moins de 44 kg donc au maximum 43 kg, et le plus léger pèse alors au minimum $64 - 43 = 21$ kg. On peut donc répondre « oui le poids du plus léger dépasse 20 kg ».

L'info 2) n'est par contre pas suffisante.

Il reste à se partager entre deux enfants $108 - 40 = 68$ kg. Cela peut se faire sous la forme $19 + 49$ ou $21 + 47$ par exemple, or ces deux situations correspondent l'une à avoir le poids le plus léger inférieur à 20 kg, et l'autre à avoir le poids le plus léger supérieur à 20 kg.

Le problème entre dans la catégorie A (l'info 1 seule suffit pour résoudre le problème posé, mais pas la 2).

11 L'info 1) est suffisante.

Les deux premiers morceaux ont une longueur totale de :

$280 - 16 = 264$ m.

Si x est la longueur du plus petit de ces deux morceaux, alors $(x + 32)$ est la longueur de l'autre et : $x + (x + 32) = 264$ d'où $2x = 232$ et $x = 116$ m.

Les morceaux ont donc pour longueurs : 116 m, 148 m et 16 m.

On peut dire que le plus long mesure 148 m.

L'info 2) est suffisante.

Un morceau mesure 148 m, donc le total des deux autres est : $280 - 148 = 132$ m. Le plus grand de ces deux ne peut dépasser 132 m, il est donc plus petit que celui de 148 m.

On peut être sûr que le plus long mesure 148 m.

Le problème entre dans la catégorie D : chaque information 1) ou 2) permet séparément de répondre à la question posée.

12 Info 1) : on a $xy = zt$ mais on ne sait pas combien cela fait, et le produit $xyzt$ est donc le carré d'un nombre inconnu. L'info 1) est insuffisante.

Info 2) : on en tire que $xy = 1$ et que $zt = 1$, d'où le produit $xyzt$ vaut $1 \times 1 = 1$. L'info 2) est suffisante pour répondre au problème posé.

Le problème entre dans la catégorie B : l'information supplémentaire 2) permet à elle seule de répondre à la question posée, et l'information supplémentaire 1) ne le permet pas.

13 Chaque information prise seule est insuffisante de façon évidente.

Voyons si, ensemble, on peut en tirer quelque chose.

On peut avoir $a = 120$ et $b = 10$, les deux infos sont respectées et le produit ab vaut 1 200 qui est strictement plus grand que 1 000.

On peut avoir $a = 60$ et $b = 10$, les deux infos sont respectées et le produit ab vaut 600 qui n'est pas strictement plus grand que 1 000.

Tout peut donc arriver, on ne peut répondre à la question posée « oui » ou « non ».

Le problème entre dans la catégorie E : les deux informations ensemble ne permettent pas de répondre au problème.

14 Il y a trois inconnues; chaque info concerne deux inconnues, ce qui est insuffisant pour que chaque info seule permette de résoudre le problème.

Prenons les deux infos ensemble maintenant.

Par soustraction membre à membre de la ligne $x + z = 7$ et de la ligne $y + z = 8$ on obtient $x - y = 7 - 8 = -1$. On peut alors calculer :

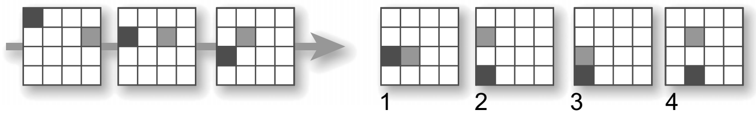
$\dfrac{x-y}{x+z} = \dfrac{-1}{7}$. Le problème est résolu avec les deux infos.

Le problème entre dans la catégorie C : les deux informations ensemble permettent de répondre au problème, alors qu'aucune séparément ne le permet.

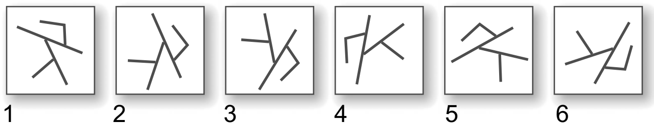
Concours blanc

Épreuve de logique

1 Quelle figure numérotée continue la série ?



2 Trouvez l'intrus :



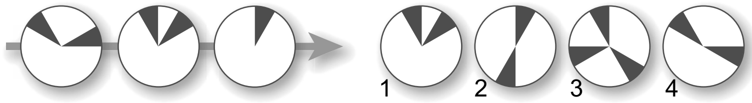
3 Complétez logiquement la grille :

7	3	9	1
4	8	2	10
6	9	5	10
5	2	?	?

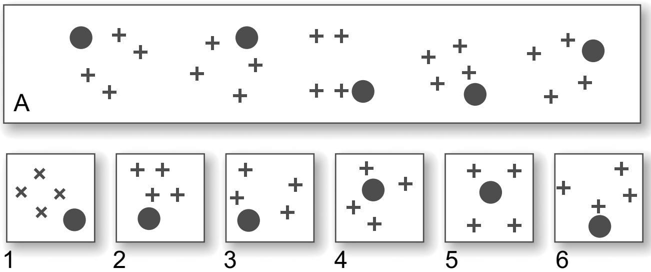
4 .... est à ville, ce que chemin est à.............

❒ **a.** voiture
❒ **b.** circulation
❒ **c.** densité
❒ **d.** pollution
❒ **e.** hameau
❒ **f.** fraîcheur
❒ **g.** déplacement
❒ **h.** autoroute
❒ **i.** promenade
❒ **j.** piéton

5 Quelle figure numérotée continue la série ?

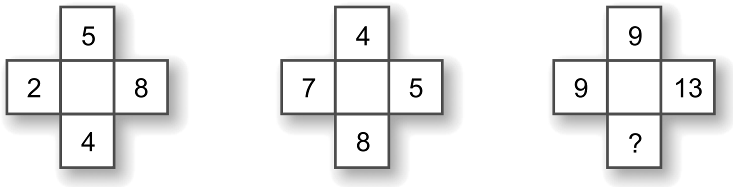


6 Quelle figure complète logiquement l'ensemble A ?



7 Quatre voitures se suivent qui appartiennent à Aurélie, Bob, Elsa et Jack. Sachant que la voiture de Jack est juste devant celle de Bob. La voiture d'Elsa est juste devant celle d'Aurélie. Les voitures de Bob et d'Elsa ne se suivent pas. À qui appartient la voiture de tête ?

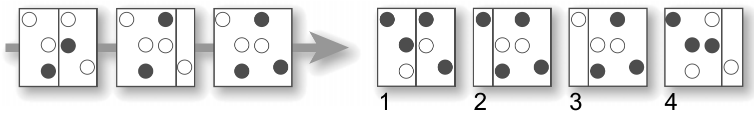
8 Quel nombre complète logiquement la dernière croix ?



9 Trouvez l'intrus :

Financier - Bûche - Tambour - Diplomate - Tuile

10 Quelle forme numérotée continue la série ?



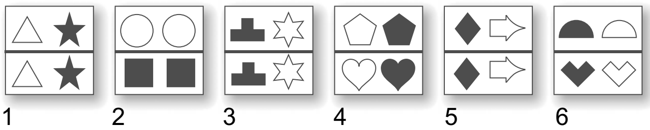
11 Si Charles habite à Sedan, Loïc à Chinon, Jeanne à Étampes et Myriam à Marigny, est-ce que selon cette même logique, Samuel doit habiter à :

1 Loctudy, 2 Meulan, 3 Sochaux, 4 Luzenac, 5 Senlis ou 6 Marnay ?

12 Quel nombre continue la série ?

3 - 9 - 5 - 15 - 11 - 33 - 29 - 87 - …

13 Trouvez l'intrus :



14 En établissant la liste des médicaments de l'infirmerie, on a noté que :

• Tous les médicaments liquides étaient conditionnés dans des bouteilles ou des flacons.

• Tous les médicaments non-liquides venaient dans des conditionnements pesant plus de 250 grammes.

• Seuls des médicaments en bouteille étaient accompagnés de doseurs.

• Seuls des médicaments en conditionnement de plus de 250 grammes avaient des avertissements d'effets secondaires.

En tenant compte de ces affirmations, les médicaments suivants peuvent-ils venir de cette infirmerie ?

❒ **a.** Un médicament en granulés.

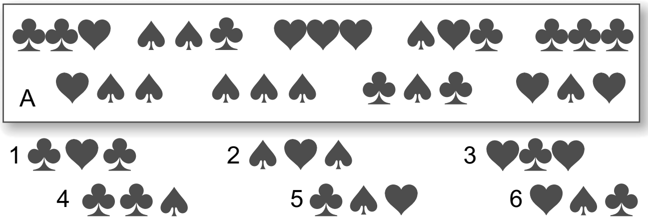
❒ **b.** Un médicament accompagné d'un doseur et d'un avertissement sur les effets secondaires.

❒ **c.** Un médicament liquide dans un conditionnement de 75 grammes accompagné d'un avertissement sur les effets secondaires.

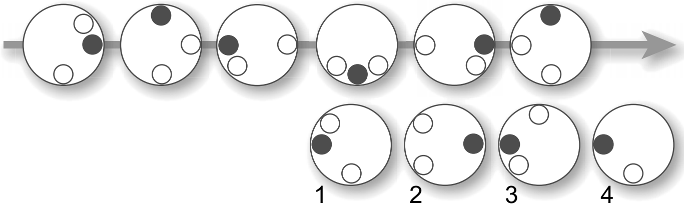
❒ **d.** Un sirop dans un conditionnement de 525 grammes, en flacon, mais sans avertissement sur les effets secondaires.

❒ **e.** Un médicament liquide en ampoules sécables dans un conditionnement pesant 300 grammes, accompagné d'une notice sur les effets secondaires mais pas de doseur.

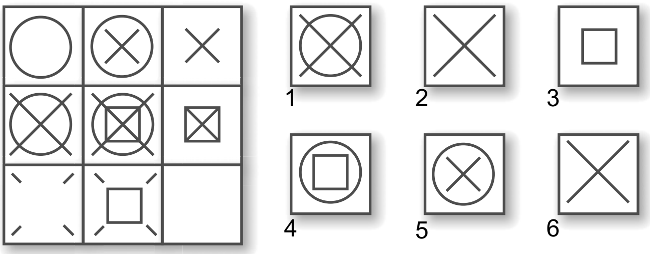
15 Quelle figure complète logiquement l'ensemble A ?



16 Quelle figure numérotée continue logiquement la série ?



17 Quelle figure complète logiquement la grille ?



Pour toutes les questions suivantes : Quel groupe de chiffres ou de lettres s'inscrit logiquement à la place du point d'interrogation ?

18

		AET		
		EIE		
TRT	GFG	?	ADA	TFT
		HUY		
		PAE		

❒ **A)** BOB ❒ **B)** MSM ❒ **C)** EIE ❒ **D)** TIO ❒ **E)** AEI

19

			142	
			366	
			214	
			112	
589	256	701	?	034

❒ **A)** 145 ❒ **B)** 682 ❒ **C)** 690 ❒ **D)** 234 ❒ **E)** 478

20

			ONL	
			WVT	
BAZ	DEG	NIQ	?	RUV
			UTR	
			MLJ	

❒ **A)** RQO ❒ **B)** POM ❒ **C)** COR ❒ **D)** NOQ ❒ **E)** ZYW

21

		981		
		422		
		624		
240	304	?	528	192
		817		

❒ **A)** 516 ❒ **B)** 642 ❒ **C)** 752 ❒ **D)** 211 ❒ **E)** 444

22

	KLA			
CFH	?	EDJ	FCK	GBL
	PQO			
	UVF			
	JKY			

❒ **A)** BGI ❒ **B)** DEI ❒ **C)** MNO ❒ **D)** RSA ❒ **E)** DGD

23

				361
				169
756	213	980	645	?
				256
				900

❒ **A)** 324 ❒ **B)** 435 ❒ **C)** 687 ❒ **D)** 225 ❒ **E)** 144

24

	OPY			
DAR	?	JYN	MEL	PUJ
	LPO			
	POC			
	ORS			

❒ **A)** SOP ❒ **B)** GOP ❒ **C)** ORY ❒ **D)** GLP ❒ **E)** GNO

25

			353	
634	723	912	?	720
			812	
			443	
			128	

❒ **A)** 901 ❒ **B)** 353 ❒ **C)** 501 ❒ **D)** 461 ❒ **E)** 227

Épreuve numérique

Voici un ensemble de 24 questions.

Il peut y avoir deux réponses justes à certaines questions, et dans ce cas si vous n'en trouvez qu'une seule vous n'aurez que la moitié des points; d'autre part une réponse fausse enlève la moitié des points qu'une réponse juste apporterait à cette question. L'absence de réponse ne pénalise pas.

1 Une caissière de cinéma a vendu les tickets suivants :

– tickets à 4,50 euros : n° 10 231 à 10 489;

– tickets à 3,50 euros : n° 6 837 à 7 041;

– des tickets à 3 euros.

Sachant que la recette totale se monte à 2 801 euros, que le premier numéro vendu des tickets à 3 euros était le 2 139, déterminez le numéro du dernier ticket à 3 euros vendu.

❒ **a.** 2 443 ❒ **b.** 2 446 ❒ **c.** 2 445 ❒ **d.** 2 444 ❒ **e.** 2 447

2 On divise un nombre entier A par 11, on s'arrête au moment où il faudrait mettre une virgule : le reste est alors 10. Si on divisait $(20 \times A)$ par 11, quel serait le reste ?

❒ **a.** 2 ❒ **b.** 200 ❒ **c.** 9 ❒ **d.** 0 ❒ **e.** 10

3 Combien y a-t-il d'heures dans la fraction $\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)$ d'un jour ?

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 11 ❒ **c.** 13 ❒ **d.** 14 ❒ **e.** 17

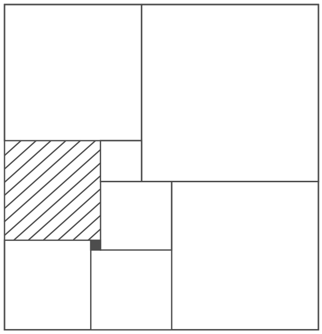
4 Dans mon équipe de handball, on se serre tous la main avant chaque match, les 7 titulaires et les 2 remplaçants. Combien cela fait-il de poignées de mains ?

❒ **a.** 64 ❒ **b.** 36 ❒ **c.** 45 ❒ **d.** 72 ❒ **e.** 90

5 Le rectangle représenté est formé de 9 carrés.

Le petit carré noir a 1,5 cm de côté, et le carré hachuré a 15 cm de côté.

Quelles sont les deux dimensions L (longueur) et l (largeur) du rectangle ?



❒ **a.** L = 48 cm

❒ **b.** L = 49,5 cm

❒ **c.** L = 50 cm

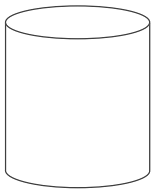
❒ **d.** l = 47,5 cm

❒ **e.** l = 48 cm

6 Marc et Sophie, séparés de 30 km, partent en vélos à la même heure en direction l'un de l'autre, à la vitesse de 20 km/h chacun. Le pigeon voyageur domestique de Marc part en même temps que lui, à 48 km/h, vers le vélo de Sophie : quand il atteint son guidon, il revient vers le guidon de Marc, puis repart vers le guidon de Sophie, et ainsi de suite jusqu'à ce que les deux amoureux se rejoignent. Quelle distance aura alors parcouru le pigeon ?

❒ **a.** 30 km ❒ **b.** 80 km ❒ **c.** 40 km ❒ **d.** 48 km ❒ **e.** 36 km

7 Un récipient de forme cylindrique de 510 cm^2 de base est rempli de 8,5 litres d'eau, correspondant au tiers de sa contenance. Quelle est la hauteur de ce récipient ?



❒ **a.** 25,5 cm ❒ **c.** 50 cm ❒ **e.** 50 mm

❒ **b.** 35 cm ❒ **d.** 0,05 m

8 D'après l'acte notarié, mon terrain mesure 22 ares 65 centiares.

C'est la même chose que :

❒ **a.** 226,5 m^2 ❒ **c.** 2 850 m^2 ❒ **e.** 22,65 dam^2

❒ **b.** 22 650 m^2 ❒ **d.** 0,2265 ha

9 Sur une carte, un terrain rectangulaire de 42 m sur 35 m est représenté par un rectangle de 14 millimètres sur 16,8 mm. L'échelle du plan est :

❒ **a.** $\frac{1}{300}$ ❒ **b.** $\frac{1}{3\,000}$ ❒ **c.** $\frac{1}{2\,500}$ ❒ **d.** $\frac{1}{250}$ ❒ **e.** 2 500

10 On utilise le système d'échange suivant : contre 9 jetons rouges, on a 20 jetons jaunes ; contre 15 jetons rouges, on a 16 jetons bleus.

Combien de jetons bleus a-t-on en échange de 25 jetons jaunes ?

❒ **a.** 18 ❒ **b.** 12 ❒ **c.** 8 ❒ **d.** 16 ❒ **e.** 15

11 Dans ce lycée, il y a 60 % d'externes, 85 % des autres élèves sont demi-pensionnaires et le reste ce sont les internes. Quel est le pourcentage d'élèves qui prennent tous leurs repas au lycée ?

❒ **a.** 15 % ❒ **b.** 49 % ❒ **c.** 9 % ❒ **d.** 6 % ❒ **e.** 25 %

12 La somme de 4,5 % (4,5 pour cent) et de 6 ‰ (6 pour mille) est :

❒ **a.** 10,5 % ❒ **b.** 51 ‰ ❒ **c.** 4,65 % ❒ **d.** 4,56 % ❒ **e.** 5,1 %

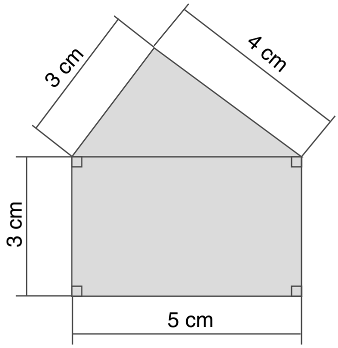
13 Dans la multiplication ci-dessous, on a remplacé quatre chiffres par quatre lettres : a, b, c, d.
La somme (a + b + c + d) est égale à :

❒ **a.** 15 ❒ **c.** 37 ❒ **e.** 32
❒ **b.** 16 ❒ **d.** 19

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 4 & 2 & 4 \\
\times & & & & a & 7 \\
\hline
 & & 2 & 9 & 6 & b \\
 & 1 & 2 & 7 & 2 & c \\
\hline
= & 1 & 5 & 6 & 8 & d
\end{array}$$

14 L'aire de la surface grisée ci-dessous est égale à :

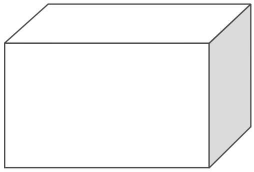
❒ **a.** 15 cm² ❒ **b.** 18 cm² ❒ **c.** 21 cm² ❒ **d.** 26 cm² ❒ **e.** 27 cm²



15 Le nombre $\dfrac{3^4 \times 10^{-5}}{2^3}$ est égal à :

❒ **a.** 0,000 02 ❒ **c.** 0,000 002 ❒ **e.** 0,000 015
❒ **b.** 0,000 101 25 ❒ **d.** 200 000

16 Un récipient en forme de parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont 150 mm, 60 cm et 5 dm, contient :



❒ **a.** 20 litres ❒ **c.** 100 litres ❒ **e.** 45 litres
❒ **b.** 450 cm^3 ❒ **d.** 4,5 dm^3

17 Un champ carré mesure 3 000 mètres de côté. La superficie du champ est :

❒ **a.** 30 000 m^2 ❒ **c.** 3 000 m^2 ❒ **e.** 9 000 000 m^2
❒ **b.** 900 hm^2 ❒ **d.** 600 ha

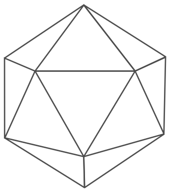
18 Soit une tige d'un mètre. J'ajoute à celle-ci un quart de sa longueur, j'obtiens une deuxième tige. À la deuxième tige, j'ajoute un huitième de la longueur de cette dernière. Quelle est la longueur de la tige obtenue ?

❒ **a.** 1,3 m ❒ **c.** 1,375 m ❒ **e.** 1,031 25 m
❒ **b.** 1,406 25 m ❒ **d.** 1,281 25 m

19 Un agriculteur possède un champ carré et il souhaite l'entourer d'une clôture électrique. Il commence donc par planter des piquets tout autour, également espacés avec un piquet à chaque coin. Il a commencé à 7 h 45, puis à 10 h 30 il a complètement terminé un côté et planté 11 piquets. Combien de temps va-t-il mettre pour le reste, en supposant qu'il aille toujours à la même vitesse ?

❒ **a.** 10 h ❒ **b.** 10 h 15 ❒ **c.** 11 h ❒ **d.** 7 h 15 ❒ **e.** 7 h 30

20 Le dessin ci-contre représente un solide dont les 20 faces sont toutes des triangles équilatéraux. Le nombre d'arêtes de ce solide est :



❒ **a.** 20 ❒ **b.** 30 ❒ **c.** 40 ❒ **d.** 50 ❒ **e.** 60

21 40 % des élèves d'une école sont des garçons; 30 % des garçons mangent à la cantine; 20 % des filles mangent à la cantine. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

❒ **a.** 12 % des élèves de l'école sont des garçons qui mangent à la cantine.
❒ **b.** 10 % des élèves de l'école sont des garçons qui mangent à la cantine.
❒ **c.** 50 % des élèves de l'école mangent à la cantine.
❒ **d.** 24 % des élèves de l'école mangent à la cantine.
❒ **e.** 25 % des élèves de l'école mangeant à la cantine sont des filles.

22 Un cycliste parcourt 88 km en deux étapes dont la première mesure un tiers de la deuxième. La longueur de cette deuxième étape est :

❒ **a.** 33 km ❒ **c.** 66 km ❒ **e.** incalculable
❒ **b.** 45,4 km ❒ **d.** 33,2 km

23 Si $x = \sqrt{3}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, et $z = \dfrac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ alors :

❒ **a.** $x < y < z$ ❒ **b.** $x > y > z$ ❒ **c.** $z < x < y$ ❒ **d.** $x < z < y$ ❒ **e.** $y < x < z$

24 Chez nous, il y a papa, maman, mes frères, mes sœurs et moi, plus mes poissons rouges. Cela fait en tout 16 bras et 13 bouches; aucun de nous n'est manchot. Combien ai-je de poissons rouges ?

❒ **a.** 3 ❒ **b.** 4 ❒ **c.** 5 ❒ **d.** 6 ❒ **e.** 7

Corrigé du concours blanc

Épreuve de logique

1 Réponse 2. La case noire descend, la case grise progresse vers la gauche.

2 Réponse 3. Toutes les cases représentent des rotations de la même figure, sauf 3 qui est un retournement.

3 Réponse 6 – 1. Horizontalement comme verticalement les deux premières cases = les deux suivantes $5 + 2 = 6 + 1$.

4 Réponse e h. Dimensions. Un hameau est une petite agglomération, ville une grande, comme chemin est une petite voie de circulation et autoroute une grande.

5 Réponse 1. Les deux sections tournent de 30° dans des sens opposés, et à la troisième figure, elles se superposent.

6 Réponse 3. Toutes les petites croix, orientées comme des signes +, délimitent un rectangle à l'extérieur duquel se trouve un rond noir. Seul 3 correspond à ces exigences. (En 1 les croix sont comme des x, en 5 le point est dans le rectangle, les autres croix délimitent des formes qui ne sont pas des rectangles).

7 Réponse Elsa. Nous avons deux paires qui se suivent, J-B et E-A, comme B et E ne se suivent pas, il faut les placer E – A – J – B.

8 Réponse 12. Chaque case de la troisième croix donne la somme des nombres dans les sections équivalentes des deux croix précédentes. $5 + 4 = 9$, $2 + 7 = 9$, $8 + 5 = 13$, $4 + 8 = 12$.

9 Réponse Tambour. Tous les autres sont des pâtisseries ou friandises.

10 Réponse 2. La barre verticale progresse un quart du carré vers la droite. Quand elle passe sur une figure, celle-ci change de couleur. Dans la troisième figure, on ne voit pas la barre puisqu'elle est superposée au bord droit. Sortie à droite, elle réapparaît à gauche.

11 Réponse 4. La première lettre de la ville est la même que la dernière lettre du prénom et les deux mots contiennent les mêmes voyelles, mais pas nécessairement dans le même ordre.

12 Réponse 83. Alternativement $\times 3$ et -4 :

$$3\ (\times 3)\ 9\ (-4)\ 5\ (\times 3)\ 15\ (-4)\ 11\ (\times 3)\ 33\ (-4)\ 29\ (\times 3)\ 87\ (-4)\ 83$$

13 Réponse 2. Quand deux formes identiques se trouvent du même côté, elles sont de couleurs différentes ; quand elles se trouvent sur des côtés différents, elles sont de la même couleur, sauf N° 2.

14 Réponse a, b, d. Les médicaments a b et d peuvent venir de cette infirmerie, mais pas les c (pour avoir un avertissement, le médicament doit peser plus de 250 grammes) ni les e (car les liquides sont conditionnés en ampoules ou flacons).

15 Réponse 3. L'ensemble contient toutes les combinaisons différentes de trois éléments, (Trèfle, cœur et pique) sans tenir compte de l'ordre. (AAA, AAB, ABB, AAC, ACC, ABC, BBB, BBC, BCC, CCC). Il manque deux cœurs et trèfle, la figure 3.

16 Réponse 1. Le rond noir tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre de 90° à chaque fois. Les ronds blancs tournent dans le sens des aiguilles d'une montre alternativement de 45° (chacun, une fois sur deux).

17 Réponse 3. Que ce soit horizontalement ou verticalement, la case du milieu représente la superposition des deux cases de chaque côté.

18 Réponse c.

Horizontalement : la première et la 3^{e} lettre sont identiques. Solutions possibles : a., b. ou c.

Verticalement : deux voyelles qui se suivent alphabétiquement, se suivent dans chaque groupe. Solutions possibles : c., d. ou e.

19 Réponse e.

Horizontalement : dans chaque groupe, le deuxième chiffre = 1er chiffre + 3 et troisième chiffre = 2^{e} chiffre + 1. Solutions possibles : a., c. ou e.

Verticalement : le troisième chiffre de chaque groupe est le double du premier. Solutions possibles : d. ou e.

20 Réponse b.

Horizontalement : les lettres du milieu de chaque groupe forment la série des voyelles dans l'ordre. Manque O. Solutions possibles : b., c. ou d.

Verticalement : dans chaque groupe, la seconde lettre recule d'une place et la troisième de deux places dans l'alphabet. Solutions possibles : a., b. ou e.

21 Réponse c.

Horizontalement : nombres divisibles par 4. Solutions possibles : a., c. ou e.

Verticalement : dans chaque groupe, le premier chiffre = la somme des deux suivants. Solutions possibles : b., c. ou d.

22 Réponse b.

Horizontalement : les premières lettres de chaque groupe forment une série alphabétique croissante (manque D). Les secondes lettres de chaque groupe forment une série alphabétique décroissante (manque E). Troisièmes lettres de chaque groupe forment une série croissante (manque I). Solution possible : b.

Verticalement : dans chaque groupe les deux premières lettres sont en ordre alphabétique croissant. Solutions possibles : b., c. ou d.

23 Réponse a.

Horizontalement : chaque groupe contient trois chiffres qui se suivent numériquement, mais dans le désordre. Solutions possibles : a., b. ou c.

Verticalement : carrés (de 19, 13, 16, 30). Solutions possibles : a. (18), d. (15) ou e. (12)

24 Réponse b.

Horizontalement : la première lettre de chaque groupe forme une série où on progresse dans l'alphabet en sautant deux lettres à chaque fois. Solutions possibles : b., d. ou e.

Verticalement : chaque groupe contient un O qui progresse d'abord vers la droite, puis vers la gauche. Solutions possibles : a. ou b.

25 Réponse d.

Horizontalement : le dernier chiffre de chaque groupe forme une série des nombres qui se suivent à rebours. Manque 1. Solutions possibles : a., c. ou d.

Verticalement : la somme des chiffres dans chaque groupe est toujours égale à 11. Solutions possibles : b., d. ou e.

Épreuve numérique

1 Réponse d.

Le nombre de billets vendus n'est pas la différence entre le numéro du dernier et le numéro du premier, il y a un décalage de 1 : c'est l'histoire du nombre de piquets qui vaut toujours un de plus que le nombre d'intervalles…

Du numéro 10 231 au numéro 10 489, on a vendu : (10 489 – 10 231) + 1 = 259 billets.

Dans l'autre série, on en a vendu : (7 041 – 6 837) + 1 = 205.

Si x est le nombre de tickets à 3 euros, on a :

$$259 \times 4{,}5 + 205 \times 3{,}5 + 3\,x = 2\,801$$

puis : $1\,883 + 3\,x = 2\,801$, et $3\,x = 918$, d'où $x = 306$.

Le dernier numéro est donc 2 139 + 306 – 1 = 2 444.

2 Réponse a.

On ne peut pas multiplier bêtement le reste par 20, car $20 \times 10 = 200$ ne peut être un reste dans une division par 11 : en effet, ce reste est au maximum 10. Il faut voir combien de fois on peut mettre 11 dans 200. Comme $200 = 11 \times 18 + 2$, le nouveau quotient ne sera pas seulement 20 fois le quotient de départ, on va l'augmenter de 18 et le reste sera 2.

3 Réponse c.

On réduit au même dénominateur 24; ainsi : $\frac{4}{24} + \frac{9}{24} = \frac{13}{24}$ donc il y a 13 heures.

4 Réponse b.

Le premier serre 8 mains, le deuxième donne 7 poignées de mains nouvelles, le troisième 6, etc. d'où le total des nombres de 8 à 1, qui est 36.

5 Réponses b. et e.

Les côtés des carrés se trouvent de proche en proche : 13,5 cm, puis 12 cm, puis 10,5 cm, et 6 cm pour le petit vers le centre; ensuite 21 cm en haut à gauche, 27 cm en haut à droite, d'où la longueur L = 49,5 cm et la largeur – plus petite par définition que la longueur – soit l = 48 cm.

6 Réponse e.

Il ne faut surtout pas se lancer dans des calculs détaillés des diverses longueurs de trajets aller-retour du pigeon; quand ce genre de travail semble très compliqué, c'est qu'il y a une astuce. Il faut s'intéresser d'abord au temps plutôt qu'à la distance; les amoureux se rapprochent de $2 \times 20 = 40$ km chaque heure donc la rencontre a lieu au bout de trois quarts d'heure, et le pigeon a parcouru $48 \times \frac{3}{4} = 36$ km.

7 Réponse c.

Dès que l'on a la surface de base, peu importe qu'elle soit celle d'un disque ou d'un carré, etc.; on calcule le volume du cylindre en multipliant la surface de base par la hauteur; la contenance est $8{,}5 \times 3 = 25{,}5$ litres soit 25 500 centimètres cubes; et :

$$h = \frac{25\,500}{510} = 50 \text{ cm}$$

8 Réponses d. et e.

1 are = 100 m^2 = 1 dam^2, donc 22 a = 2 200 m^2.

1 ca = 1 m^2, d'où 22 a 65 ca = 2 265 m^2 = 22,65 dam^2 = 0,226 5 ha.

9 Réponse c.

Attention à bien associer les dimensions réelles et celles qui correspondent sur la carte; comparer 42 m et 16,8 mm d'une part et 35 m et 14 mm d'autre part; bien utiliser la même unité partout, par exemple le mm; comme $\frac{42\,000}{16{,}8} = \frac{35\,000}{14} = 2\,500$, il s'agit bien du même coefficient, et l'échelle est $\frac{1}{2\,500}$.

10 Réponse b.

1 jaune = $\frac{9}{20}$ rouge; 1 rouge = $\frac{16}{15}$ bleu; 1 jaune = $\frac{9}{20} \times \frac{16}{15}$ bleu = $\frac{12}{25}$ bleu,
donc 25 jaunes = 12 bleus.

11 Réponse d.

Remarquons d'abord que seuls les internes prennent tous leurs repas au lycée; s'il y a 60 % d'externes, il y a 40 % de non externes dont 85 % sont demi-pensionnaires et

15 % sont internes. Le pourcentage d'internes est 15 % de 40 %, soit $0{,}15 \times 0{,}40 = 0{,}0600 = 6$ %.

12 Réponses b. et e.

On a $\frac{4{,}5}{100} + \frac{6}{1\,000}$ soit avec un dénominateur commun $\frac{45}{1\,000} + \frac{6}{1\,000} = \frac{51}{1\,000}$ qui peut s'écrire aussi 5,1 %.

13 Réponse d.

b = 8, c = 0, a = 3, d = 8, donc a + b + c + d = 19.

14 Réponse c.

$$3 \times 5 + \left(\frac{3 \times 4}{2}\right) = 15 + 6 = 21$$

15 Réponse b.

En effet : $$\frac{81 \times 0{,}00001}{8} = 0{,}000\,101\,25$$

16 Réponse e.

150 mm = 1,5 dm, 60 cm = 6 dm, et $1{,}5 \times 6 \times 5 = 45$ dm^3 soit 45 litres.

17 Réponses b. et e.

$3\,000^2 = 9\,000\,000$, mais 9 000 000 m^2 = 900 hm^2

18 Réponse b.

Ajouter un quart c'est multiplier par 5 quarts; ajouter un huitième c'est multiplier par 9 huitièmes et $\frac{5}{4} \times \frac{9}{8} = \frac{45}{32}$ soit 1,406 25.

19 Réponse d.

En 2 h 45 il plante 11 piquets soit un en $\frac{165}{11} = 15$ minutes; il y a 11 piquets à mettre sur le côté opposé et 9 sur chacun des côtés adjacents soit 11 + 9 + 9 = 29 piquets; il lui faut $15 \times 29 = 435$ minutes soit 7 h 15.

20 Réponse b.

Chaque face a 3 côtés mais chaque côté est compté deux fois car il appartient à deux faces, d'où $\frac{3 \times 20}{2} = 30$ arêtes.

21 Réponses a. et d.

On peut faire un tableau de répartition entre sexes et appartenance ou non à la cantine :

	cantine	pas de cantine	total
garçons	12	28	40
filles	12	48	60
total	24	76	100

22 Réponse c.

Soit x la longueur de la première étape, la deuxième vaut 3 x et donc 4 x = 88, puis x = 22, et la deuxième étape vaut 66 km.

23 Réponse e.

Des valeurs approchées sommaires peuvent suffire à faire le classement, avec 1,7 pour $\sqrt{3}$, et 2,2 pour $\sqrt{5}$, ainsi y vaut environ 1,6 et z environ 1,8; ce qui donne $y < x < z$.

24 Réponse c.

16 bras donnent 8 humains, donc avec 13 bouches en tout il faut 13 – 8 = 5 poissons.

Index

A

additions 271
affirmations et déductions 88
aires 186
analogies 86
apparentés 94
arithmétique 242
arrangements 224
arrondis 251
asymptotes 287

B

boule 205

C

calcul
  de limites 289
  mental 268
carré 187
cercle 187
choix multiples 89
classement 88
combinaisons 224
conditions minimales 326
cône de révolution 204
continuité 288
conversions 170
critères de divisibilité 139, 273
cube 203
cylindre droit 204

D

dénombrement 223
disque 187
distance 214
division 268
  euclidienne 138
durée 214

E

ensembles 32, 36
équations 233, 284
exponentielle de base e 292

F

fonctions 285
fractions 137, 272

I

inéquations 284
intégration 299
intrus 34, 38

L

logarithme népérien 291
logigramme 90
losange 187

M

menteurs 96
multiplications 268

N

nombres
  complexes 310
nombres relatifs 123
notation scientifique 149

O

ordre de grandeur 252, 274

P

parallélépipède rectangle 203
parallélogramme 187
permutation 223
Plus Grand Commun Diviseur 242
Plus Petit Commun Multiple 243
point fixe 290
pourcentages 129
primitives 296
priorités de calcul 137
prisme droit 203
probabilités conditionnelles 301
produit en croix 129
proportionnalité 158
puissances 148
pyramide à base triangulaire 203

R

racine carrée 178
rectangle 187
règle de trois 158

S

schémas numériques 81
séries
  alphabétiques 9
  doubles 50
    ensembles de chiffres 56
    ensembles de lettres 53
  graphiques 1
  numériques 9
soustractions 271
sphère 187
suites 294
  arithmétiques 294
  géométriques 295
syllogismes 94

T

tableau de proportionnalité 158
tangente 287
taux de pourcentage 129
tests de raisonnement 84
trapèze 187
triangles 187
troncatures 251

U

unités
  d'aire 170
  de capacité 171
  de longueur 170
  de temps 172
  de vitesse 172
  de volume 171

V

vitesse 214

Photocomposition : **SCM**, Toulouse