



Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours AMCPE session 2015
Composition : Mathématiques 5 (algèbre, analyse)
Durée : 3 Heures

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants

EXERCICE 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1-Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$ où I est la matrice unité d'ordre 3.
- 2-A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- 3-Justifier, sans calcul de déterminant, que A est inversible et déterminer A^{-1} .

EXERCICE 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B=(e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z)=(2x - 2y + z, 2x - 3y + 2z, -x + 2y)$.

- 1- Déterminer la matrice A de f relativement à la base B .
- 2-a) Déterminer les valeurs propres de f .
b) Déterminer le sous-espace propre de associé à chaque valeur propre.
c) Justifier que f est diagonalisable.

3- On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer P^{-1} (inverse de P) et montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

- 4- Calculer A^n pour tout entier naturel non nul n .

5- Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 \end{cases}$ où x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions

dérivables de la variable réelle t et de fonctions dérivées x_1', x_2' et x_3' .

EXERCICE 3

Soit $f : \mathbb{R}_+^* - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ On pose $A = \int_0^1 f(t)dt$

$$x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$$

1- Démontrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ et que A converge.

2- On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Démontrer que F et h sont dérivables sur $]0 ; 1[$, calculer $F'(x)$ et $h'(x)$, et en déduire que pour tout x de $]0 ; 1[$, $F'(x) = h(x)$.

3- Calculer pour tout x de $]0 ; 1[$, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, en déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ puis la valeur de A .

EXERCICE 4

On considère l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$ (E)

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1- Montrer que g est impaire.

2- Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).

3- En déduire en fonction de g toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

4- Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle (E).

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$.

b) Déterminer a_1 . Expliciter les coefficients a_{2n+1} pour tout entier n .

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de a_0 , et exprimer les coefficients a_{2n} , pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de a_0 .

d) Réciproquement, on considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

e) Expliciter le développement en série entière de g .

5- On considère les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = e^{-x^2} \text{ et } g_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

a) Expliciter le développement en série entière des fonctions g_1 et g_2 .

b) En déduire le développement en série entière de la fonction $g_1 g_2$ à l'aide d'un résultat dont on

rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.