MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours A2GP session 2016

Composition : Mathématiques 5 (algèbre, analyse)

Durée : 3 Heures

EXERCICE 1

Dans IR^4, on considère les vecteurs $v_1 = (1,1,1,2)$, $v_2 = (3,2,4,7)$, $v_3 = (2,1,3,m^2)$, $v_4 = (5,3,7,12)$, $v_5 = (2,1,4,7)$ où m est un paramètre réel. On pose $S=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et $H_m=\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

1-Déterminer le rang de la famille S suivant les valeurs du paramètre réel m.

2-Donner une base du sous-espace vectoriel H_m suivant les valeurs du paramètre réel m.

On suppose m=1 dans la suite.

3-Donner un supplémentaire G du sous-espace vectoriel H_1 dans IR^4.

4-La famille S est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.

5-Soit p la projection de IR^4 sur H_1 parallèlement à G. Déterminer $p(v_4)$ et $p(v_5)$.

EXERCICE 2

On pose $M_a = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, $a \in IR$.

1-Pour quelles valeurs du réel a, la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2-Etude de M_{-1}

a)Déterminer les valeurs propres de M_{-1} et les sous-espaces propres associés.

b)En déduire les coefficients de M_{-1}^n pour tout entier naturel n.

3-Calculer les coefficients M_0^n pour tout entier naturel non nul n.

EXERCICE 3

Soit la série entière dont la somme f est définie par $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$.

1-Déterminer le rayon de convergence de la série.

2-Soient les fonctions g et h définies par $g(x)=f(x^2)$ et $h(x)=f(-x^2)$. Montrer que g et h sont des sommes de séries entières dont on précisera le rayon de convergence.

3-En déduire une expression de f(x) à l'aide de fonctions usuelles. (On pourra distinguer deux cas)

4-Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n)!}$.

EXERCICE 4

Soit $F(x)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}dt$ où x est un réel.

1-Déterminer l'ensemble de définition I de F.(Il s'agit du domaine de convergence de l'intégrale)

2-Calculer F(2), F(3) et $F(\frac{3}{2})$ (On pourra faire le changement de variable $u=\sqrt{t}$).

3-Pour tout x de I, montrer que $F(x)=\int_0^1 \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x}dt$.

4-Montrer que l'application F est convexe sur I. (On pourra, pour tout t fixé dans]0,1], considérer l'application $h_t : x \mapsto \frac{1+t^{x-2}}{1+t^x}$)

EXERCICE 5

Soit N l'application définie sur IR^2 par :pour tout (x,y) de IR^2 $N(x,y)=\sup_{t\in IR} \frac{|tx+y|}{1+t^2}$.

1-Montrer que N est une norme sur IR^2.

2-Déterminer et tracer la boule unité fermée de N.