Concours CAE session 2013

Composition : Mathématiques 2 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

Exercice 1

L'étude statistique des ventes de télévisions d'un grand magasin montre que :

- Le nombre de récepteurs vendus en une semaine est une variable aléatoire $X \rightsquigarrow \wp(\lambda)$ avec $\lambda = 12$
- La probabilité pour qu'un client achetant un téléviseur prenne récepteur couleur est $\frac{1}{4}$

1. Déterminer les probabilités des événements suivants
   a. $(X \geq 15)$ ou $(X \leq 6)$
   b. $(X \geq 16)$ sachant que $(X \geq 8)$
2. Soit Y le nombre de récepteurs couleurs vendus en une semaine. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y sous l'hypothèse $(X = x)$ que nous noterons $Y\ /\ x$?
3. Déterminer les probabilités des événements suivants :
   a. $[(Y = 3)\ /\ (X = 12)]$
   b. $[(Y > 1)\ /\ (X = 10)]$
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y seule. On montrera que Y suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive vérifiant l'équation de récurrence linéaire :

$$3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0 \qquad (E)$$

1.
   a. Résoudre l'équation (E)
   b. Calculer la somme puis la limite qui suivent :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ et \ \lim_{n\to+\infty} S_n$$

2. Soit X la variable aléatoire discrète de référentiel $\Re_X = \mathbb{N}$ dont la fonction densité de probabilité (en abrégé fdp) notée $f_X(x)$ satisfait l'équation (E) ci-dessus.
   a. Déterminer les constantes réelles A et B telles que : $\forall x \in \mathbb{N}, f_X(x) = A\lambda_1^x + B\lambda_2^x$ soit une densité de probabilité $(\lambda_1 < \lambda_2)$. Que représentent les réelsλ_1 et λ_2?
   b. On suppose que $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{var}(Y)$ existent. Calculer

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in\Re_X} x f_X(x) \ et \ \mathrm{var}X = \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2$$

3. On pose $Y = X - 1$ si $X \geq 1 \ et \ Y = 0 \ si \ X = 0$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{var}(Y)$

Exercice 3

1. On donne deux événements A et B tels que : $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$ et $P(B/\bar{A}) = 0,6$
    a. Calculer $P(A \cup B)$?
    b. Calculer $P(A/\bar{B})$?
2. Si A et B sont indépendants, si A et C sont indépendants est-il de même de
    a. A et $(B \cap C)$?
    b. A et (BUC) ?

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X = -1) = \frac{1}{3}$$
$$P(X = 0) = \frac{1}{3}$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{3}$$

1. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?
2.
    a. Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$
    Rappel : $\text{cov}(X, Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X).\text{E}(Y)$
    b. Monter que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ et suivant une loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3\}$. On appelle $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$

1. Donner le tableau de la loi conjointe
2. Donner la loi marginale de U puis celle de V
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?