



## Concours CAE session 2014

Composition : **Mathématiques 2** (statistiques, probabilités)

Durée : **2 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

### Exercice n° 1 :

Dans une bibliothèque,  $n$  livres (tous différents) sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces  $n$  livres,  $k$  sont d'un même auteur MANADJA, les autres étant d'auteurs tous différents. Calculer la probabilité qu'au moins  $p$  livres de MANADJA se retrouvent côte à côte dans les cas suivants :

1.  $n = 20$ ,  $k = 3$  et  $p = 3$ .
2.  $n = 20$ ,  $k = 5$  et  $p = 2$ .

### Exercice n° 2 :

On considère un sac contenant sept billes blanches et trois billes noires duquel on effectue deux tirages sans remise. Soit  $X$  la variable aléatoire dont la valeur est :

- 0 si le premier tirage donne une bille blanche,
- 1 si le premier tirage donne une bille noire.

Soit  $Y$  la variable aléatoire dont la valeur est :

- 0 si le second tirage donne une bille blanche,
- 1 si le second tirage donne une bille noire.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  et indiquer sur ce tableau les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Calculer la covariance de  $(X, Y)$  notée  $Cov(X, Y)$ . On rappelle que  $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  avec  $\mathbb{E}(X)$  l'espérance mathématique de  $X$ .
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice n° 3 :

BONVIVRE est l'un des meilleurs parcs de loisirs du pays, la tarification est la suivante : forfait annuel à 100 000 francs, forfait journée à 6 000 francs, forfait demi-journée à 4 500 francs. Le coût d'établissement du forfait annuel s'élève à 1 000 francs et celui des forfaits quotidiens à 100 francs dans chacun des cas. Le directeur du parc a remarqué qu'avec une fréquentation moyenne de "20 jours pleins" par an, une part relativement importante de la clientèle n'opte pas pour le forfait annuel. Il se demande si le tarif pratiqué n'est pas proportionnellement élevé par rapport aux forfaits quotidiens. Pour en avoir le cœur net, il fait procéder à une étude qui révèle que le temps qu'il fait en début de matinée joue un rôle important sur l'activité retenue par le client qui n'a pas opté pour le forfait annuel (dénommé "client" dans la suite de l'exercice). En admettant qu'il y a en moyenne 70% de chances pour que le temps puisse être considéré comme beau en début de matinée, les conséquences climatiques sont les suivantes :

- si, pour le client, il fait beau :
  - ✓ il y a 90% de chances qu'il achète un forfait journée ;
  - ✓ et 10% qu'il se contente d'un forfait demi-journée ;
- si, pour le client, il fait mauvais temps :
  - ✓ il y a 30% de chances qu'il achète un forfait journée ;
  - ✓ et 50% qu'il se contente d'un forfait demi-journée ;
  - ✓ et il reste 20% de chances qu'il n'achète rien.

- 1) Calculer la probabilité que, pour un jour quelconque, un client achète un forfait journée, ainsi que celle pour qu'il achète un forfait demi-journée.
- 2) En justifiant votre réponse, indiquer si le client a financièrement raison de ne pas opter pour le forfait annuel.

### Exercice n° 4 :

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

- 1) Soit  $X$  le "nombre de pommes avariées dans un emballage". Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 2) Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?
- 3) Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes ?