Concours CAE session 2014

Composition : **Mathématiques 1** (algèbre, analyse)

Durée : **2 Heures**

La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé. Si au cours de l'épreuve un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n° 1 :

Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, et on pose :

$$R_n(\theta) = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n, \quad C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta).$$

1) Écrire $R_n(\theta)$ sous forme algébrique.
2) a. Calculer $C_n(\theta) + iS_n(\theta)$.
   b. Déduire des questions précédentes les valeurs de $C_n(\theta)$ et $S_n(\theta)$, en fonction de n et θ.
3) Applications :
   a. Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, puis $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.
   b. En déduire $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} C_n^{2k}$, puis $\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} C_n^{2k+1}$, avec $\lfloor x \rfloor$: partie entière de x.

Exercice n° 2 :

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{\alpha}{x} + \beta \right) = 0;$$

et donner un équivalent de l'expression ci-dessus quand $x \to 0$.

Exercice nº 3 :

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}dx$.

1) Montrer que $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue en 0. En déduire que I est définie.

2) À l'aide du changement de variables $u = \dfrac{x}{6}$, Montrer que

$$I = 12\int_0^{\pi/6} \frac{\sin u}{4\cos^2 u - 1}du.$$

3) En posant $t = 2\cos u$, déterminer la valeur de I.

Problème :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$ composée des vecteurs e_1, e_2, e_3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -e_1 \\ f(e_2) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= -e_2 - e_3 \end{aligned}$$

1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer des bases de Ker f et de Im f, où Ker f désigne le noyau de f et Im f son image.
3) a. L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?
   b. Quel est le rang de f ?
4) a. Montrer que la valeur 0 est une valeur propre de la matrice A.
   b. En déduire un vecteur propre associé à la valeur propre 0.
   c. Calculer les autres valeurs propres de A.
   d. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
5) Soit la famille de vecteurs $\mathscr{B}'$ composée des vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = -e_2$; $u_2 = e_1 + e_3$; $u_3 = e_1$.
   a. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   b. Écrire la matrice P de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
   c. Calculer P^{-1}.
   d. En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$.
   e. Quel est le rang de la matrice A' ?