



Concours GE21/GMEC session 2015

Composition : **Mathématiques 3** (algèbre)

Durée : **4 Heures**

Ce sujet comporte un exercice et un problème avec deux parties indépendantes

EXERCICE

Soit \mathbb{IK} un sous-corps de \mathbb{IR} et f un isomorphisme du corps \mathbb{IR} sur le corps \mathbb{IK} .

1- Montrer que, pour tout x de \mathbb{IR}_+ , $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2$. En déduire que f est croissante.

2-a) Montrer que, pour tout (n, x) de $\mathbb{IN} \times \mathbb{IR}$, $f(nx) = nf(x)$.

b) Montrer que pour tout rationnel x , $f(x) = x$.

3- Montrer que f est l'application identité de \mathbb{IR} dans \mathbb{IR} .

(on pourra utiliser la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{IR} . Attention : f n'est pas dite continue).

Problème

Partie 1

On munit l'espace \mathbb{IR}^3 de son produit scalaire canonique et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique (i, j, k) soit orthonormale directe.

Pour $u = (a, b, c)$ de \mathbb{IR}^3 on définit la matrice $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

et f_u l'endomorphisme de \mathbb{IR}^3 de matrice M_u dans la base (i, j, k) . On note \mathcal{M} l'ensemble des matrices M_u , $u \in \mathbb{IR}^3$ et \mathcal{V} l'ensemble des endomorphismes f_u , $u \in \mathbb{IR}^3$.

A.

1- Montrer que \mathcal{M} et \mathcal{V} sont des espaces vectoriels. Quelles sont leurs dimensions ?

2- Soit $u = (a, b, c)$ et $v = (x, y, z)$. Calculer $M_u M_v$ et montrer que $M_u M_v \in \mathcal{M}$.

En déduire que \mathcal{M} est une algèbre. Est-elle commutative ?

3- On note $w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$.

i) Montrer que w_1 est un vecteur propre commun à tous les f_u .

ii) Soit \mathcal{P} le plan orthogonal à w_1 . On note $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$ et $w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$. Montrer que (w_2, w_3) est une base orthonormale de \mathcal{P} et $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ est une base orthonormale de \mathbb{IR}^3 .

Donner la matrice de f_u dans cette base \mathcal{B}' .

iii) Montrer que \mathcal{P} est stable pour chaque f_u .

4-Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_u soit diagonalisable dans \mathbb{R} .

B.

Soit $\Psi : u \mapsto f_u(u)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 et $P_m(X) = X^3 - X^2 + m$ où m désigne un paramètre réel.

1-i) Caractériser les éléments de $U = \Psi^{-1}(\{i\})$.

ii) En déduire que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in U$.

2-Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que P_m admette trois racines réelles (éventuellement confondues).

3-Montrer que pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, M_u est la matrice d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les racines de P_m avec $m \in [0; \frac{4}{27}]$.

4-Etudier f_u pour $u = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Partie 2

A .On appelle \mathcal{F} l'ensemble des fonctions de $] -1; 1[$ dans \mathbb{R} de la forme $f(x) = \frac{p(x)}{1-x^3}$ où p désigne une fonction polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

1-Montrer que \mathcal{F} est un espace vectoriel.

2-Pour $k=0, 1, 2$ on note h_k l'application définie sur $] -1; 1[$ par $h_k(x) = \frac{x^k}{1-x^3}$.
 Montrer que $\mathcal{B}=(h_0, h_1, h_2)$ est une base de \mathcal{F} .

3-On note \mathcal{F}_1 l'ensemble des éléments de \mathcal{F} qui admettent une limite finie quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. Montrer que \mathcal{F}_1 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} . Quelle est sa dimension ?
 Montrer que les éléments de \mathcal{F}_1 peuvent être prolongés par continuité en des fonctions C^∞ sur $[-1; 1]$.

4-Pour $x \in] -1; 1[$ on note $g_0(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{3}}$, $g_1(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)\sqrt{2}}$ et $g_2(x) = \frac{1+2x}{(1+x+x^2)\sqrt{6}}$.
 Montrer que (g_1, g_2) est une base de \mathcal{F}_1 , que $\mathcal{B}_1=(g_0, g_1, g_2)$ est une base de \mathcal{F} et que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_1 est orthogonale.

B. On considère l'ensemble \mathcal{S} des fonctions développables en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1-i) Montrer que h_0, h_1, h_2 sont des éléments de \mathcal{S} et donner leur développement en série entière $\sum a_n x^n$.

ii) Comparer a_{n+3} et a_n .

iii) En déduire que \mathcal{F} est l'ensemble des éléments de \mathcal{S} dont le développement en série entière $\sum a_n x^n$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3}=a_n$.

2- On définit sur \mathcal{F} l'opération :

$$(f|g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{f''(0)g''(0)}{4}.$$

Montrer que ceci définit un produit scalaire sur \mathcal{F} et que \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 sont des bases orthonormales de \mathcal{F} .

3- Pour $f \in \mathcal{F}$ on définit g_f sur $] -1; 1[$ par $g_f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et l'on définit $g_f(0)$ en prolongeant par continuité.

i) Montrer que $g_f \in \mathcal{F}$.

ii) On appelle φ l'application de \mathcal{F} dans \mathcal{F} qui à f fait correspondre g_f . Montrer que φ est une rotation et préciser son axe et son angle.

iii) Soit $f \in \mathcal{F}_1$. Montrer que $\varphi(f) \in \mathcal{F}_1$. Déterminer les limites de $\varphi(g_1)(x)$ et $\varphi(g_2)(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

C. On considère l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ qui vérifient l'équation différentielle

$$(1 - x^3)y''' - 9x^2y'' - 18xy' - 6y = 0 \tag{1}$$

1- Chercher les solutions développables en série entière et montrer que ce sont des éléments de \mathcal{F} . Les a-t-on tous ?

2- On cherche les solutions définies sur \mathbb{R} . Pour ceci, si g est une solution de (1) sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, déterminer l'équation différentielle d'ordre 3 vérifiée par f , où $f(x) = (1-x^3)g(x)$. Déterminer f et déduire les solutions de (1) sur $] -\infty; 1[$ et $] 1; +\infty[$.

Etudier les prolongements des solutions en 1 et donner toutes les solutions définies sur \mathbb{R} .