Concours GE2I/GMEC session 2015

Composition : **Mathématiques 4** (analyse)

Durée : **4 Heures**

Partie 1 : ANALYSE

A)

1) On considère la fonction Γ de Euler définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

a) Déterminer son ensemble de définition.

b) Justifier que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que Γ est de classe C^1 sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Montrer qu'il existe un nombre réel d de l'intervalle $]1\,;2[$ tel que $\Gamma'(d) = 0$.

d) En déduire que la fonction Γ est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

2) Enoncer la formule de Taylor avec reste intégrale pour une fonction de classe C^{∞} sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

B) Application du développement en série entière

On rappelle que si une fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a\,;a[$ avec $a > 0$, alors f est de classe C^{∞} sur $]-a\,;a[$ et son développement en série entière est unique donné par la série de Taylor de f à l'origine :

$$\forall x \in]-a\,;a[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, pour $x \neq 0$.

Démontrer que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

2) <u>**Un théorème des moments.**</u>

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R\,;R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R\,;R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose, que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0}\left(f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n$ est normalement convergente sur $[0\,;1]$.

b) A l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0\,;1]$.

c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R\,;R[$.

3) <u>**Un contre - exemple**</u>

On considère la fonction f telle que pour tout x réel $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}dt$. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On admet que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

a) Pour $t \in]0\,;+\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction : $x \longmapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)x^n$?

La fonction f est – elle développable en série entière ?

PARTIE 2: PROBABILITES

Exercice 1:

Soit $f : \Omega \to \Gamma$ une application et A, B des événements de Σ une tribu de Γ .

1) Comparer $f^{-1}\left(\overline{A}\right)$ et $\overline{f^{-1}(A)}$; puis $f^{-1}(A \cup B)$ et $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2) Montrer que $f^{-1}(\Sigma) = \left\{f^{-1}(B)\ /\ B \in \Sigma\right\}$ est une tribu d'événements de Ω .

Exercice 2:

Trois maladroits tirent sur un objectif. Chacun n'a qu'une seule balle.
Le premier a trois chances sur quatre pour atteindre l'objectif, le second deux chances sur trois et le troisième une chance sur deux seulement.
L'objectif a-t-il alors plus de chances de recevoir une seule balle ou les trois balles ?.

Exercice 3:

Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } t < 1 \\ 1/5 \text{ , si } 1 \le t < 2 \\ 4/5 \text{ , si } 2 \le t < 3 \\ 1 \text{ , si } t \ge 3 \end{cases}$$

Exercice 4:

Une pièce d'un équipement électronique est constituée de trois parties essentielles A,B et C.
On a constaté dans le passé que la partie A tombait en panne dans 10% des cas, la partie B dans 30% des cas et la partie C dans 40% des cas.
La partie A opère indépendamment de B et de C.
Les parties B et C sont dépendantes de telle sorte que si C est défaillante, les chances sont de 1 sur 3 que B soit défaillante aussi.
Deux au moins des trois parties doivent être en état de marche pour que l'équipement fonctionne.
Calculer la probabilité pour qu'il fonctionne.