



*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

*Les candidats doivent respecter les notations des énoncés et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.*

\*\*\*

*Les calculatrices sont autorisées*

## GUIDES D'ONDE ET CAVITES RESONANTES

Ce problème étudie quelques aspects de la physique des guides d'onde et cavités résonantes. On ne s'intéresse qu'à la partie non statique du champ électromagnétique. Les grandeurs a priori complexes sont notées soulignées. La représentation complexe d'une grandeur réelle  $g$  est  $\underline{g}$  telle que  $\text{Re}(\underline{g}) = g$ . On désigne par  $i$  le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

*Données numériques :*

Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ SI
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI
Vitesse de la lumière :	$c = 3,0 \cdot 10^8$ m · s <sup>-1</sup>

Formule d'analyse vectorielle :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\underline{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\underline{A}) - \Delta\underline{A}$ .

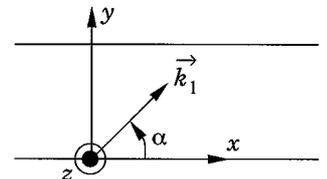
### Partie I - Étude d'un guide d'onde et d'une cavité

#### I.A - Propagation d'une onde guidée

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (Oxyz) associé à la base

$(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ . Le métal considéré dans cette partie est parfait.

**I.A.1)** On considère deux plans métalliques parfaits d'équations  $y = 0$  et  $y = b$ . De façon à éviter des pertes par rayonnement on cherche à faire se propager selon la direction (Ox) une onde plane progressive, harmonique (monochromatique) de pulsation  $\omega$ , polarisée rectilignement selon (Oz). Montrer que ceci est impossible.



**I.A.2)** On choisit alors d'envoyer cette onde en oblique entre les deux plans selon le vecteur d'onde  $\underline{k}_1$  faisant l'angle  $\alpha$  ( $\alpha \in ]0, \pi/2[$ ) avec l'axe (Ox). Le champ électrique associé est noté :

$$\underline{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM})} \underline{e}_z$$

a) En utilisant notamment les lois de Descartes, déterminer l'expression du champ électrique  $\underline{E}_2$  de l'onde plane réfléchie. Déterminer les valeurs possibles de  $\sin \alpha$  en fonction d'un entier  $p$ ,  $\lambda_0$  (longueur d'onde dans le vide) et  $b$ .

b) Donner l'expression de la somme  $\vec{E}$  des champs incident et réfléchi. Justifier sans calcul pourquoi ce champ est bien solution des équations de Maxwell. Dans quelle direction et quel sens y a-t-il propagation ? Déterminer en fonction de  $k_0 = \omega/c$  et  $\alpha$  le module du vecteur d'onde  $k_g$  dans le guide.

- I.A.3)**
- Exprimer en fonction de  $c$  et  $b$  la fréquence minimale  $f_c$  en deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation. Quelle condition doit vérifier  $b$  pour qu'une onde de 2,5 GHz puisse se propager ?
  - Trouver la relation entre  $k_0$  et  $k_g$ . Comment appelle-t-on cette relation ?
  - Trouver une relation entre la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de  $c$ ,  $p$  et du rapport de la fréquence de l'onde sur  $f_c$ . Déterminer littéralement et numériquement la valeur de l'angle  $\alpha$  pour lequel la vitesse de groupe est la plus grande (prendre  $b = 6,6$  cm et  $f = 2,5$  GHz). Quelle est la valeur de  $p$  associée ?

**I.A.4)** On ferme le guide par deux autres plans parallèles en  $z = 0$  et  $z = a$ . Montrer sans calculs que cela est possible sans changer les solutions précédentes. Sur quels plans apparaissent des charges surfaciques ?

**I.B - Du guide d'onde à la cavité**

On ferme le guide d'onde par deux plans infiniment conducteurs en  $x = 0$  et  $x = \ell$ . On obtient une cavité électromagnétique.

**I.B.1)** On considère le champ  $\vec{E}$  de la question I.A.2-b) que l'on note  $\vec{E}_i = E_0(y) e^{i(\omega t - k_g \cdot x)} \vec{e}_z$  et que l'on peut considérer comme un champ incident sur le plan  $x = \ell$ . Expliquer sans calcul pourquoi il existe un champ réfléchi. Montrer que si on suppose un champ réfléchi de la forme  $\vec{E}_r = K E_0(y) e^{i(\omega t + k_g \cdot x)} \vec{e}_z$  seul champ à coexister avec  $\vec{E}_i$ , alors les équations de Maxwell peuvent être vérifiées. Déterminer  $K$  et montrer qu'il existe une condition de quantification sur  $k_g$ .

**I.B.2)** En déduire que les pulsations possibles dans le cadre des hypothèses effectuées sont de la forme

$$\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2} \quad \text{où } m \text{ et } p \text{ sont des entiers}$$

**I.B.3)**

- Montrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme

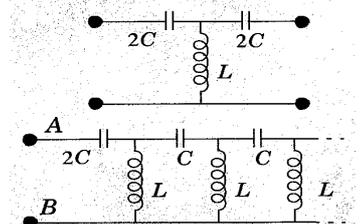
$$\vec{E} = E_c \sin(p\pi y/b) \sin(m\pi x/\ell) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad \text{avec } E_c \text{ réel.}$$

On se place dans la suite dans le cas où  $m = p = 1$ . Quelles sont les parois de la cavité susceptibles de porter une densité surfacique de charge non nulle ? Dessiner un schéma de la cavité en indiquant avec les signes + et - les charges relatives de ces faces en espaçant d'autant plus ces signes que la densité surfacique est faible en valeur absolue (préciser les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ ).

- Donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  en fonction notamment de  $E_c$ ,  $x$  et  $y$ , puis préciser les faces de la cavité où apparaissent des courants surfaciques.
- Calculer  $W_e(t)$  et  $W_m(t)$  les énergies électriques et magnétiques instantanées dans la cavité en fonction de  $W = \epsilon_0 E_c^2 V/8$  ( $V$  étant le volume de la cavité). Représenter sur un même graphe les évolutions temporelles de  $W_e$  et  $W_m$ . Que vaut l'énergie électromagnétique totale  $W$  ? Commenter. Trouver une analogie avec un circuit électrocinétique simple.

**Partie II – Analogie électrocinétique**

On considère le dipôle AB suivant constitué de cellules en T ( $2C, L, 2C$ ) placées en cascade (les deux condensateurs placés en série de deux cellules successives placées en cascade sont équivalents à un condensateur unique de capacité  $C$ ).



**II.1)** Calculer l'impédance du dipôle en mettant en évidence deux cas différents (prendre soin de lever les indéterminations sur les signes). Quelle est en fonction de  $L$  et  $C$ , l'expression de la pulsation critique  $\omega_c$  ainsi mise en évidence ?

II.2) Interpréter énergétiquement la différence de comportement du dipôle dans les deux cas précédents. En quoi ce système est-il analogue à un guide d'onde ?

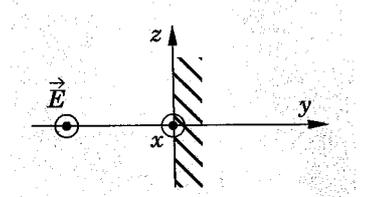
**Partie III - Guide en métal non parfait**

On suppose dans cette section que le métal constituant le guide d'onde est en cuivre de conductivité non infinie  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$ . La fréquence considérée est 2,5 GHz.

**III.A Champ électrique dans le métal et aspect énergétique**

L'espace est muni du repère orthonormé (Oxyz). Afin d'étudier simplement le champ électrique dans le métal du guide on considère la modélisation suivante : un métal remplit le milieu semi-infini  $y \geq 0$ , la variation spatiale selon la direction de l'axe (Oz) (appartenant à l'interface de séparation entre le vide et le métal) est celle d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

On pose  $\vec{E} = \underline{E}(y) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$



**III.A.1)**

a) Montrer que dans le métal la densité volumique de charge est nulle.

b) Calculer dans le métal le rapport des ordres de grandeur du courant de déplacement  $\vec{j}_d$

$= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et du courant volumique de conduction  $\vec{j}_v$ . Commenter.

c) En tenant compte de la question précédente, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ  $\vec{E}$ . En déduire l'équation vérifiée par  $\underline{E}(y)$ . On posera  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ .

En déduire l'expression de  $\vec{j}_v$  en fonction de  $y, \delta, \omega, t, z$  et d'une constante que l'on notera  $\vec{j}_0$

**III.A.2)** On s'intéresse dans cette question au lien entre les représentations surfaciques et volumiques des courants. On considère un cylindre semi-infini dont la base, d'aire  $dS$  appartient à la surface de séparation entre le vide et le métal et dont les génératrices sont parallèles à l'axe des  $y$ . On prendra l'origine de l'axe en: un point de la base de la colonne de métal considérée.

a) En pratique, la profondeur de pénétration de l'onde dans le, métal est faible. On peut donc modéliser les courants dans le métal par un champ de vecteur densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ . Etablir la relation vectorielle entre  $\vec{j}_s$  et le champ de vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}_v$ .

b) On note  $\langle dP_j \rangle$  la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans une colonne d'aire  $dS$  Trouver l'expression de  $\langle dP_j/dS \rangle$  en fonction de  $\gamma$  et de  $\vec{j}_v$ .

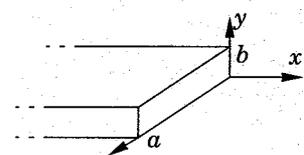
c) En utilisant les résultats de la question IV.A.1-d, exprimer  $\vec{j}_s$  et  $\langle dP_j/dS \rangle$  en faisant intervenir notamment  $\vec{j}_0, \delta$  et  $\gamma$ .

En déduire :  $\left\langle \frac{dP_j}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma \delta} \langle \vec{j}_s^2 \rangle$ .

d) Montrer que l'on pourrait considérer que la répartition surfacique  $\vec{j}_s$  est équivalente énergétiquement à une densité de courant volumique uniforme sur une épaisseur  $\delta_{eff}$ . Exprimer  $\delta_{eff}$  en fonction de  $\delta$ .

**III.B - Pertes énergétiques et optimisation**

On étudie dans cette partie les pertes dues à l'effet Joule. La prise en compte d'une conductivité non infinie modifie les solutions obtenues dans le cas d'un métal parfait. Néanmoins, on considère dans la suite que  $\gamma$  reste suffisamment grand pour que l'on puisse approximer dans le vide les champs par ceux obtenus dans le cas du métal parfait.



On s'intéresse plus particulièrement au cas du premier mode transversal électrique dont le champ s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e}_z$$

**III.B.1)** En utilisant la relation de passage pour le champ magnétique au voisinage d'un métal parfait donner l'expression de  $j_s^2$  en fonction de  $B^2$  et  $\mu_0$ .

**III.B.2)** Déterminer les composantes réelles du champ magnétique  $\vec{B}$ . En déduire l'expression de  $\langle B^2 \rangle$  (où  $\langle \rangle$  est l'opérateur de valeur moyenne dans le temps) en fonction de  $E_0$ ,  $\omega$ ,  $b$ ,  $k_g$  et  $y$ .

**III.B.3)** Montrer que la valeur moyenne dans le temps de la puissance dissipée par unité de longueur du guide peut se mettre sous la forme :

$$\left\langle \frac{dP}{dx} \right\rangle = p_0 \left( \frac{a\lambda_0}{2b^2} + \frac{b}{\lambda_0} \right)$$

où  $p_0$  est une constante à déterminer en fonction de  $E_0$ ,  $\lambda_0$  (longueur d'onde dans le vide),  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\mu_0$  et  $c$ .

**III.B.4)** On suppose fixée la longueur  $a$  transversale du guide. Déterminer en fonction de  $\lambda_0$  et  $a$  la valeur optimale  $b_0$  pour laquelle il y a minimisation des pertes énergétiques lors de la propagation de l'onde dans le guide. Calculer numériquement  $b_0$  dans le cas où  $a = 2,0$  cm

**III.B.5)**

a) Calculer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting. En déduire la puissance moyenne temporelle  $P_m$  traversant une section du guide.

b) Montrer que la variation de  $P_m$  le long du guide est exponentielle et calculer numériquement la longueur caractéristique de décroissance.

... FIN ...