MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DES ŒUVRES UNIVERSITAIRES **(DGES)**

DIRECTION DE L'ORIENTATION ET DES EXAMENS **(DOREX)**

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours GE2I/GMEC session 2013

Composition : Mathématiques 4 (analyse)

Durée : 4 Heures

Cette épreuve comporte deux pages

EXERCICE 1

1) On considère l'intégrale $\omega(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)dx$.

Pour quelles valeurs de α et β cette intégrale converge - t - elle ? Pour ces valeurs trouvées, calculer cette intégrale. Démontrer que, quel que soit le nombre réel a on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch}(x)}dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+a^2}$$

2) Pour n entier naturel, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4k+1}$. Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Calculer la somme en cas de convergence.

EXERCICE 2

On considère la fonction f de la variable réelle telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n^2+x^2}\right)$.

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ? Etudier la parité de f.
2) Démontrer que f est continue sur D.
3) On pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)$.

   Montrer que $R_n(2n) \geq n\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{4n}\right)$. Que peut – on en déduire pour la convergence uniforme éventuelle sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions de terme général $u_n : x \mapsto \operatorname{Arctan}\frac{x}{n^2+x^2}$?

4) Démontrer que $\forall u > 0$, $\forall v \in [0,u]$ on a $\frac{v}{u}\operatorname{Arctan} u \leq \operatorname{Arctan} v \leq v$

   a) Etablir que $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$ on a : $\int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

   b) En déduire que $x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\operatorname{Arctan} x \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout x>0 et que f admet une limite finie en $+\infty$ $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$ que l'on déterminera. Déduisez en le résultat de la question 3).

5) F est – elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

PROBLEME

1) On considère la série entière réelle $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

   a) Déterminer son rayon de convergence R.

   b) Démontrer que cette série entière converge uniformément sur le segment [-R ; R] et calculer sa somme.

2) Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

   Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que, si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $w_n = a_n \cos nx$, la série de fonctions de terme général w_n converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$, et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = f$. Calculer a_n en fonction de n.

3) Soient a et b deux nombres réels tels a<b, et soit h une fonction réelle de la variable réelle, de classe C^1 sur le segment [a,b].

   Pour tout réel λ posons $J(\lambda) = \int_a^b h(t)\left|\sin\frac{\lambda t}{2}\right|dt$.

   a) Démontrer que, lorsque $\lambda \to +\infty$, l'intégrale $I(\lambda) = \int_a^b h(t)\cos(\lambda t)dt$ tend vers une limite dont on déterminera la valeur.

   b) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série de terme général $a_n I(n\lambda)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

   c) Soit ρ un nombre réel tel que $\rho > 0$. Démontrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait : $$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n I(n\lambda)\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \left|a_n I(n\lambda)\right|\right) + \rho .$$

   En déduire que, lorsque $\lambda \to +\infty$, l'intégrale $J(\lambda)$ tend vers une limite dont on donnera l'expression en fonction de $\int_a^b h(t)dt$.

4) Les hypothèses sont celles de la question 3), soit q une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période 2π, et continue sur $\mathbb{R}$.

   Posons $\bar{q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt$ et pour tout réel λ, $K(\lambda) = \int_a^b h(t)q(\lambda t)dt$.

   a) On fait l'hypothèse $\bar{q} = 0$. Etudier, pour tout réel t fixé, la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ de l'intégrale $v_t(\lambda) = \int_0^t q(\lambda s)ds$ et en déduire la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ de l'intégrale $K(\lambda)$.

   b) On ne fait plus l'hypothèse $\bar{q} = 0$. Etudier lorsque $\lambda \to +\infty$ la limite de $K(\lambda)$.