MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DES ŒUVRES UNIVERSITAIRES **(DGES)**

DIRECTION DE l'ORIENTATION ET DES EXAMENS **(DOREX)**

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours ITA session 2013

Composition : <u>Mathématiques 7</u> (algèbre, analyse)

Durée : 2 Heures

I ALGEBRE

1°) Déterminer le rang de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et en déduire son inverse si elle existe.

2°) On donne A la matrice de M3(R) telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 , A^3, A^4 en fonction de A et de I.

b) Montrer que par récurrence qu'il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\in N*}$ et $(b_n)_{n\in N*}$ telles que : $\forall n \in N*,\ A^n = a_n A + b_n I$.

Déterminer les relations de récurrence liant $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$.

3°) On donne la matrice $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $(a,b,c) \in R^3$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Préciser la nature de C. Calculer par récurrence l'expression de C^n en fonction de a, b, c et n où $n \in N^*$

4°) a) Calculer et préciser la nature de la matrice $D = P^{-1} A P$; en déduire l'expression de D^n en fonction de n où n est un entier naturel non nul.

b) Déterminer l'expression de D^n en fonction de A, P, P^{-1} et n , puis en déduire celle de A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.

c) Exprimer A^n en fonction de n, pour tout entier naturel non nul.

II ANALYSE

1°) Montrer que la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$ peut s'exprimer sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d_1}{x-1} + \frac{d_2}{(x-1)^2}$ où a, b, c, d_1 et d_2 sont des constantes réelles à préciser ; en déduire une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

2°) Déterminer l'expression de $G(x) = \int \frac{Arctan\, x}{(x+1)^2} dx$ et en déduire la résolution de l'équation différentielle : $x(x+1)y' + y = Arctan\, x$.