 Concours professionnels AP/BTS

Niveau **: AP/BTS TERTIAIRE**
Session : **2014**

Durée de l'épreuve : **03 Heures**
Coefficient : **3**

MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

Soit P un polynôme défini par : $P(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $P(x) = 0$

   b) En déduire les solutions de l'inéquation $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$.

2. A l'aide des solutions de la question 1a) Résoudre les équations 1a) suivantes :

   a) $x \in \mathbb{R}$, $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 = 0$

   b) $x \in \mathbb{R}$, $2(e^x)^2 - 5e^x - 3 = 0$

3. A l'aide des solutions de la question 1b) Déterminer les solutions des inéquations suivantes :

   a) $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 > 0$

   b) $2e^{2x} - 5e^x - 3 > 0$

Exercice 2 :

Une PME est spécialisée dans la distribution des journaux à domicile.
Les dirigeants de cette PME estiment que le nombre d'abonnés est défini par la suite (an) définie par $\begin{cases} a_0 = 10.000 \\ \forall n \geq 0, a_{n+1} = 0,8a_n + 5000 \end{cases}$

Où a_0 désigne le nombre d'abonnés à la création de la PME et a_n le nombre total d'abonnés au terme de n années d'exercice.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3

2. Soit b_n la suite définie par : $b_n = 25000 - a_n \quad \forall n \in N$

   a) Calculer b_0, b_1 et b_2

   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 0,8\ b_n$ puis en déduire la nature de la suite b_n.

   c) Exprimer b_n en fonction de n.

   d) En déduire que :

   $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 25000 - 15000(0,8)^n$

3. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'abonnés dépasse 22 000.

PROBLEME :

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 2}{2x - 4}$ et par (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité : 2 cm

Partie A

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2) Justifier que : $\forall x \in Df, f(x) = x + \dfrac{3}{2} + \dfrac{8}{2x - 4}$
3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C).
4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
5) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.
6) Etudier les positions relatives de (C) et de (D).

Partie B

1) Soit f ' la fonction dérivée de f, justifier que :
   $\forall x \in Df, f'(x) = \dfrac{4x(x-4)}{(2x-4)^2}$
2) Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variation de f.
3) Représenter graphiquement dans le repère (O, I, J), (C) et ses asymptotes.

Partie C

1) Justifier que $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + 4\ln|2x - 4|$ est une primitive de f sur Df.

2) Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan délimité par (C) et les droites d'équations x=3 ; x = 4 et l'axe des abscisses.