

fiche de TD 1

Exercice 1

Parmi les énoncés suivants indiqués ceux qui sont des propositions :

- (1) L'eau peut avoir trois états.
- (2) Bonne journée.
- (3) Comment allez-vous ?
- (4) 10 est un nombre premier.
- (5) $2 + 2 = 4$.
- (6) $2 + 3$.
- (7) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

Exercice 2

- (1) Dans quels énoncés $\ll \text{et} \gg$ joue le rôle de connecteur logique.
 - (a) Le portier **et** le journaliste déplacent la table.
 - (b) Il a été classé trente **et** unième.
 - (c) La fille dance **et** le garçon joue au ballon.
 - (d) Il fait froid **et** je me baigne dans le lac.
- (2) Dans quels énoncés $\ll \text{ou} \gg$ joue le rôle de connecteur .
 - (a) Je me lave les cheveux **ou** je suis dans mon bain
 - (b) Le ministre **ou** le secrétaire de l'état présidera la cérémonie.
 - (c) Je viendrai soit demain soit dimanche.

Exercice 3

Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k/k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers paires.

- (1) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1; 4; 7; \dots\}$.
- (2) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1; 10; 100; \dots\}$.
- (3) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationels.
- (4) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (5) Décrire en compréhension l'ensemble $]0; +\infty[$.
- (6) Décrire en compréhension l'ensemble des images d'un réel x par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 4

Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 5

Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

- (1) $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.
- (2) $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C \iff B = C$

Exercice 6

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Discuter et Résoudre les équations :

- (1) $A \cup X = B$.
- (2) $A \cap X = B$.

Exercice 7

Soient A, B et C trois parties de E . On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

- (1) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (2) $A \triangle B = A \triangle C \iff B = C$
- (3) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$.
- (4) $A \triangle B = A \cap B \implies A = B = \emptyset$.

Exercice 8

Soient P, Q et R des propositions. Vérifier à l'aide de tables de vérité les équivalences suivantes. lorsqu'il

- (1) $P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$
- (2) $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$
- (3) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- (4) $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Exercice 9

Soient les quatre assertions suivantes :

- (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

- (1) Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
- (2) Donner leur négation.
- (3) Donner la négation de la proposition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in \mathbb{R} (|x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \right| < \epsilon).$$

Exercice 10

Simplifier : soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- (1) $C = \overline{\overline{A \cap B} \cap (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) \cap (A \cap B)}$
- (2) $D = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

Exercice 11

En utilisant le raisonnement par contraposition, montrer l'implication

(1) $a + b$ est irrationnel $\implies a$ ou b irrationnel. Est-ce que la réciproque de cette assertion est vraie ?

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 1 \implies x > -1$.

Exercice 12

Démontrer en raisonnant par récurrence que :

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(3) 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 \text{ est divisible par } 111 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(4) \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$