

1.jpg

2.jpg

3.jpg

004.jpg

005.jpg

006.jpg

007.jpg

008.jpg

009.jpg

010.jpg

011.jpg

012.jpg

013.jpg

014.jpg

015.jpg

016.jpg

017.jpg

018.jpg

019.jpg

020.jpg

021.jpg

022.jpg

023.jpg

024.jpg

025.jpg

026.jpg

027.jpg

028.jpg

029.jpg

TD ECONOMIE

CHAPITRE I : LE
CONSOMMATEUR



030.jpg

031.jpg

032.jpg

033.jpg

034.jpg

035.jpg

036.jpg

037.jpg

038.jpg

039.jpg

Exercice N° 1

Énoncé

Le tableau suivant donne différentes combinaisons de biens 1 et 2 procurant un niveau d'utilité $U_0 = 2$ au consommateur.

Si x_1 est la quantité consommée du bien 1 et x_2 la quantité consommée du bien 2, on a :

x_1	3	6	9	12
x_2	9	5	2	1

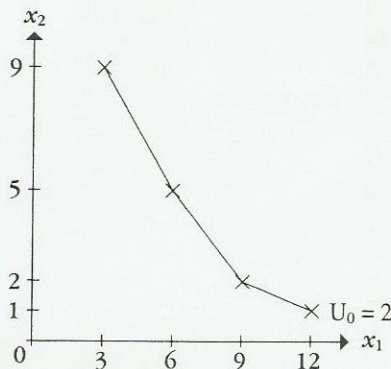
- 1 Tracer la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité $U_0 = 2$.
- 2 Calculer le TMS entre $x_1 = 9$ et $x_1 = 12$ le long de cette courbe d'indifférence.

Corrigé

- 1 Traçons la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité $U_0 = 2$:

Nous savons qu'une courbe d'indifférence est le lieu géométrique des couples (x_1, x_2) nous décrivant un ensemble de situations nous donnant la même satisfaction. Cette satisfaction est ici égale à : $U_0 = 2$.

D'où le graphique suivant :



2 Calculons le TMS entre $x_1 = 9$ et $x_1 = 12$ le long de cette courbe d'indifférence :

Nous savons que le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 indique dans quelle mesure on doit substituer le bien 2 au bien 1 pour rester sur une même courbe d'indifférence, c'est-à-dire pour que le consommateur garde la même satisfaction ($U_0 = 2$, ici).

Soit U la fonction d'utilité du consommateur, calculons sa différentielle totale : $dU = U'_1 dx_1 + U'_2 dx_2$ (1) ;

or le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité est identique, d'où $dU = 0$.

Par conséquent, (1) $\Rightarrow U'_1 dx_1 + U'_2 dx_2 = 0$ (2)

(2) $\Rightarrow U'_1 dx_1 = -U'_2 dx_2$ (3)

$$(3) \Rightarrow \frac{U'_1}{U'_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \text{TMS}$$

Application numérique :

$$\text{TMS} = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1-2}{12-9} = \frac{1}{3}$$

En conclusion, le TMS entre $x_1 = 9$ et $x_1 = 12$, pour un niveau d'utilité $U_0 = 2$ est : $\text{TMS} = 0,333$.

Exercice N° 2

Énoncé

Soit $U = x_1 \cdot x_2$, la fonction d'utilité d'un consommateur.

- 3** Tracer une carte d'indifférence associée à U .
- 4** Calculer les utilités marginales.
- 5** Sont-elles croissantes, décroissantes, constantes ?
- 6** Déterminer le TMS entre les deux biens. Faire une représentation graphique.
- 7** Calculer le niveau d'utilité ressenti par le consommateur si son panier de consommation est : $(x_1^0, x_2^0) = (1, 3)$.

Corrigé

1 Déterminons la signification de x_1 et x_2 :

x_1 représente la quantité consommée du bien 1 ;

x_2 représente la quantité consommée du bien 2.

2 Traçons une courbe d'indifférence associée à U :

Nous savons qu'une courbe d'indifférence est le lieu géométrique des couples (x_1, x_2) nous décrivant un ensemble de situations nous donnant la même satisfaction.

Soit $U_0 = 1$, 1 étant un niveau d'utilité donné.

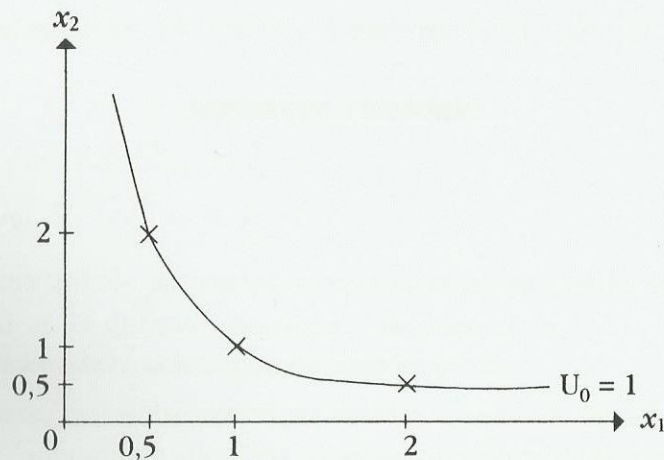
$$U = U_0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \quad (1).$$

(1) représente l'équation de la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité : $U_0 = 1$.

Prenons 3 points : **a** si $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

b si $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$.

c si $x_1 = 0,5$, $x_2 = 2$.



Il est bon de remarquer que la courbe d'indifférence est convexe par rapport à l'origine et que tout le long de cette courbe d'indifférence le niveau de satisfaction est constant et égal à $U_0 = 1$.

3 Traçons une carte d'indifférence :

Nous savons qu'une carte d'indifférence correspond à un ensemble de courbes d'indifférence chacune étant associée à un niveau d'utilité donné et constant.

α Soit $U_0 = 1$, 1 étant un niveau d'utilité donné.

$$U = U_0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{x_1}} \quad (1).$$

(1) représente l'équation de la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité : $U_0 = 1$.

Prenons 3 points : **a** si $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

b si $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$.

c si $x_1 = 0,5$, $x_2 = 2$.

β Soit $U_0 = 2$, 2 étant un niveau d'utilité donné.

$$U = U_0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2}{x_1}} \quad (2).$$

Prenons 3 points : **a** si $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b si $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

c si $x_1 = 0,5$, $x_2 = 4$.

γ Soit $U_0 = 3$, 3 étant un niveau d'utilité donné.

$$U = U_0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 3 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3}{x_1}} \quad (3).$$

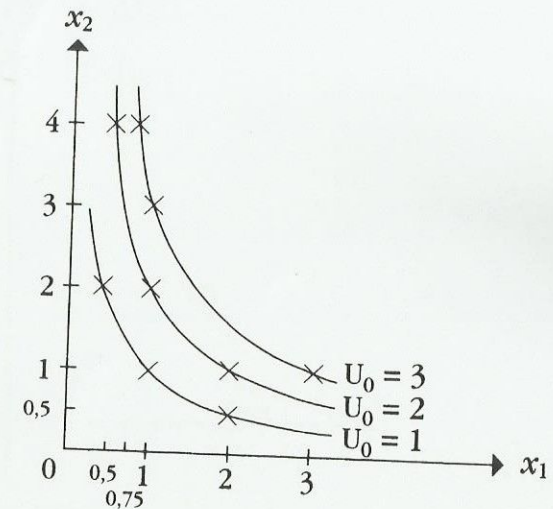
(3) représente l'équation de la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité : $U_0 = 3$.

Prenons 3 points : **a** si $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

b si $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

c si $x_1 = 0,75$, $x_2 = 4$.

D'où le graphique suivant :



En définitive, il est bon de noter que d'une part le long d'une courbe d'indifférence le niveau de satisfaction est constant, d'autre part, plus la courbe d'indifférence est haute par rapport à l'origine, plus son niveau d'utilité est élevé et, enfin, les courbes d'indifférence sont convexes par rapport à l'origine.

4 Calculons les utilités marginales :

Mathématiquement, elle nous est donnée par la formule : $U'_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$.

Application numérique :

Pour le bien 1 : $U'_1 = x_2 > 0$

Pour le bien 2 : $U'_2 = x_1 > 0$

Ici, les deux utilités marginales sont positives ce qui signifie qu'une augmentation de la quantité consommée du bien i ($i = 1, 2$) entraîne un accroissement de la satisfaction du consommateur.

Inversement, si l'utilité marginale du bien i avait été négative, l'interprétation économique aurait été : une augmentation de la quantité consommée du bien i entraîne une diminution de la satisfaction du consommateur. On dit alors que le bien i est une nuisance ou que le bien i est source de désutilité.

Cela est vérifié, entre autre, quant le bien i est le « travail ».

5 Sont-elles croissantes, décroissantes ou constantes ?

or le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité est identique, d'où $dU = 0$.

Par conséquent, $(1) \Rightarrow U'_1 dx_1 + U'_2 dx_2 = 0$ (2)

$(2) \Rightarrow U'_1 dx_1 = -U'_2 dx_2$ (3)

$(3) \Rightarrow \frac{U'_1}{U'_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \text{TMS}$.

Application numérique :

$$\text{TMS} = \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

Représentation graphique :

Pour cela traçons la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité $U_0 = 1$.

On peut donc substituer Δx_2 du bien 2 à Δx_1 du bien 1 sans modifier le niveau de satisfaction ressenti par le consommateur.

Le rapport $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ mesure le TMS. Graphiquement, le TMS est donné par la valeur absolue de la pente de la tangente en A à la courbe d'indifférence associée au niveau d'utilité $U_0 = 1$.

Ici comme les courbes d'indifférences sont convexes par rapport à l'origine, le TMS est décroissant lorsqu'on se déplace de C à D car la valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe d'indifférence diminue.

7 Calculons le niveau d'utilité ressenti par le consommateur si $x_1^o = 1$ et $x_2^o = 3$:

Si $x_1^o = 1$ et $x_2^o = 3$, la satisfaction ressentie par le consommateur est : $U^* = x_1^o \times x_2^o = 3$.

Exercice N° 3

Énoncé

Soit $U = 2x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$, la fonction d'utilité d'un consommateur avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

- 1** Si $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, tracer une courbe d'indifférence.
- 2** Calculer les utilités marginales. Sont-elles croissantes, décroissantes, constantes ?
- 3** En déduire, sans démonstration, la valeur du TMS.

Corrigé

- 1** Traçons une courbe d'indifférence avec $\alpha = 1$ et $\beta = 2$:

Or $x_1 > 0$ car le consommateur consomme du bien 1,

$$\text{d'où (3)} \Rightarrow \frac{U_0 - 2}{2} > 0 \Rightarrow U_0 - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{U_0 > 2}.$$

B Le consommateur ne consomme que du bien 2 :

Dans ce cas, $x_1 = 0$; d'où (1) $\Rightarrow x_2 = U_0 - 2$ (2).

Or $x_2 > 0$ car le consommateur consomme du bien 2,

$$\text{d'où (2)} \Rightarrow U_0 - 2 > 0 \Rightarrow \boxed{U_0 > 2}.$$

Au total, la contrainte que nous devons imposer sur U_0 est donc $\boxed{U_0 > 2}$.

Exercice N° 5

Énoncé

Soient : • deux consommateurs A et B ;

• deux biens 1 et 2.

Les TMS du bien 2 au bien 1 sont respectivement :

$$TMS_A = 7 \text{ et } TMS_B = 9.$$

Ces deux consommateurs ont-ils intérêt à procéder à des échanges ?

Corrigé

Déterminons si ces deux consommateurs ont intérêt à procéder à des échanges :

Nous savons que le TMS du bien 2 au bien 1 indique dans quelle mesure on doit substituer le bien 2 au bien 1 pour rester sur une même courbe d'indifférence, c'est-à-dire pour que le consommateur garde la même satisfaction.

$$\bullet TMS_B = 9 \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = 9 \Rightarrow dx_2 = -9dx_1.$$

Dans ces conditions, si le consommateur A cède 1 unité de bien 1 à consommateur B, pour garder la même satisfaction, il lui faudra 7 unités de bien 2 ($dx_2 = -7 \times -1$).

Parallèlement, si le consommateur B reçoit 1 unité de bien 1, pour garder la même satisfaction, il doit céder 9 unités de bien 2 ($dx_2 = -9 \times 1$).

Donc, pour que les deux consommateurs améliorent tous les deux leur satisfaction, il suffit que A cède 1 unité de bien 1 à B et reçoive 8 unités de bien 2 de la part de B.

En effet, comme : • 8 unités de bien 2 > 7 unités de bien 2, la satisfaction de A est plus grande ;

• 8 unités de bien 2 < 9 unités de bien 2, la satisfaction de B est plus grande.

Au total, les deux consommateurs ont intérêt à procéder à des échanges c'est-à-dire à pratiquer le troc car ils peuvent y gagner tous les deux.

Exercice N° 6

Énoncé

Soient : • deux consommateurs A et B ;

• deux biens 1 et 2 ;

• A a comme fonction d'utilité : $U_A = 2x_1x_2$ et possède 3 unités de bien 1 et 18 unités de bien 2 ;

• B a comme fonction d'utilité : $U_B = x_1^2x_2$ et possède 4 unités de bien 1 et 6 unités de bien 2.

Ces deux consommateurs ont-ils intérêt à procéder à des échanges ?

Corrigé

Déterminons si ces deux consommateurs ont intérêt à procéder

courbe d'indifférence, c'est-à-dire pour que le consommateur garde la même satisfaction.

Soit U la fonction d'utilité du consommateur.

Calculons sa différentielle totale : $dU = U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2$ (1).

Or, le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité est identique, d'où $dU = 0$.

Par conséquent : (1) $\Rightarrow U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2 = 0$ (2)

$$(2) \Rightarrow U'x_1 dx_1 = -U'x_2 dx_2 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{\frac{U'x_1}{U'x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \text{TMS}}$$

Application numérique :

$$\text{Ici : } \bullet TMS_A = \frac{U'x_1}{U'x_2} \Leftrightarrow TMS_A = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \boxed{TMS_A = 6} ;$$

$$\bullet TMS_B = \frac{U'x_1}{U'x_2} \Leftrightarrow TMS_B = \frac{2x_2}{x_1} \Rightarrow \boxed{TMS_B = 3} .$$

$$\text{D'où : } \bullet TMS_A = 6 \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = 6 \Rightarrow dx_2 = -6x_1 ;$$

$$\bullet TMS_B = 3 \Leftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = 3 \Rightarrow dx_2 = -3x_1 .$$

Dans ces conditions, si le consommateur B cède 1 unité de bien 1 au consommateur A, pour garder la même satisfaction, il lui faudrait 3 unités de bien 2 ($dx_2 = -3 \times -1$).

Parallèlement, si le consommateur A reçoit 1 unité de bien 1, pour garder la même satisfaction, il doit céder 6 unités de bien 2 ($dx_2 = -6 \times 1$).

Donc, pour que les deux consommateurs améliorent tous les deux leur satisfaction, il suffit que B cède 1 unité de bien 1 à A et reçoive 4 unités de bien 2 de la part de A.

En effet, comme : $\bullet$ 4 unités de bien 2 $>$ 3 unités de bien 2, la satisfaction de B est plus grande ;

$\bullet$ 4 unités de bien 2 $<$ 6 unités de bien 2, la satisfac-

Exercice N° 7

Énoncé

Soient U_1, U_2, U_3, U_4 quatre fonctions d'utilité avec :

$$U_1 = x_1 x_2 ,$$

$$U_2 = 4x_1^{1/2} x_2^{2/3} ,$$

$$U_3 = 2x_1 x_2 + 3x_2 ,$$

$$U_4 = ax_1^2 + bx_2^2, \text{ avec } a > 0 \text{ et } b > 0 .$$

- 1** Le TMS de U_1, U_2, U_3 et U_4 est-il croissant, décroissant, constant ?
- 2** Les courbes d'indifférence associées respectivement à U_1, U_2, U_3 et U_4 sont-elles convexes par rapport à l'origine ?

Corrigé

- 1** Calculons le TMS de chacune des fonctions d'utilité :

Nous savons que le TMS du bien 2 au bien 1 indique dans quelle mesure on doit substituer le bien 2 au bien 1 pour rester sur une même courbe d'indifférence, c'est-à-dire pour que le consommateur garde la même satisfaction.

Soit U la fonction d'utilité du consommateur.

Calculons sa différentielle totale : $dU = U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2$ (1) ;

or le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité est identique, d'où $dU = 0$.

Par conséquent, (1) $\Rightarrow U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2 = 0$ (2)

Application numérique :

$$\alpha \quad TMS_1 = \frac{U'_1 x_1}{U'_1 x_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

$$\beta \quad TMS_2 = \frac{U'_2 x_1}{U'_2 x_2} = \frac{4 \frac{1}{2} x_1^{-1/2} x_2^{2/3}}{4 \frac{2}{3} x_1^{1/2} x_2^{-1/3}} = \frac{3x_2}{4x_1}.$$

$$\text{D'où } TMS_2 = \frac{3x_2}{4x_1}.$$

$$\gamma \quad TMS_3 = \frac{U'_3 x_1}{U'_3 x_2} = \frac{2x_2}{2x_1 + 3}.$$

$$\delta \quad TMS_4 = \frac{U'_4 x_1}{U'_4 x_2} = \frac{2ax_1}{2bx_2}.$$

$$\text{D'où } TMS_4 = \frac{ax_1}{bx_2}.$$

Pour connaître le sens de variation du TMS en fonction de x_1 , nous devons calculer la différentielle totale du TMS.

α En ce qui concerne U_1 :

$$d TMS = d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2};$$

$$\text{d'où } \frac{d TMS}{dx_1} = \frac{x_1 \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) - x_2}{x_1^2},$$

or $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $\frac{dx_2}{dx_1} = -TMS < 0$ car le TMS entre deux biens de consommation est toujours positif.

$$\text{Au total : } \frac{d TMS}{dx_1} < 0.$$

Le TMS de U_1 est donc décroissant.

β En ce qui concerne U_2 :

$$\text{or } d(3 \cdot x_2) = 3 \cdot dx_2 \text{ et } d(4 \cdot x_1) = 4 \cdot dx_1.$$

$$\text{D'où } d TMS = \frac{12 \cdot x_1 \cdot dx_2 - 12 \cdot x_2 \cdot dx_1}{16 \cdot x_1^2} = \frac{3x_1 \cdot dx_2 - 3x_2 \cdot dx_1}{4 \cdot x_1^2}.$$

$$\text{Par conséquent } \frac{d TMS}{dx_1} = \frac{3 \cdot x_1 \cdot \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) - 3 \cdot x_2}{4 \cdot x_1^2},$$

$$\text{or } x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ et } \frac{dx_2}{dx_1} = -TMS < 0,$$

$$\text{d'où } \frac{d TMS}{dx_1} < 0.$$

Le TMS de U_2 est donc décroissant.

γ En ce qui concerne U_3 :

$$d TMS = d\left(\frac{2x_2}{2x_1 + 3}\right) = \frac{(2x_1 + 3) \cdot d(2 \cdot x_2) - 2 \cdot x_2 \cdot d(2x_1 + 3)}{(2x_1 + 3)^2};$$

$$\text{or } d(2 \cdot x_2) = 2 \cdot dx_2 \text{ et } d(2x_1 + 3) = 2 \cdot dx_1.$$

$$\text{D'où } d TMS = \frac{2 \cdot (2x_1 + 3) \cdot dx_2 - 4 \cdot x_2 \cdot dx_1}{(2x_1 + 3)^2}.$$

$$\text{Par conséquent } \frac{d TMS}{dx_1} = \frac{2 \cdot (2x_1 + 3) \cdot \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) - 4 \cdot x_2}{(2x_1 + 3)^2},$$

$$\text{or } x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ et } \frac{dx_2}{dx_1} = -TMS < 0,$$

$$\text{d'où } \frac{d TMS}{dx_1} < 0.$$

Le TMS de U_3 est donc décroissant.

δ En ce qui concerne U_4 :

$$d TMS = d\left(\frac{ax_1}{bx_2}\right) = \frac{b \cdot x_2 \cdot d(ax_1) - a \cdot x_1 \cdot d(bx_2)}{b^2 x_2^2};$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } d TMS &= \frac{a \cdot b \cdot x_2 \cdot dx_1 - a \cdot b \cdot x_1 \cdot dx_2}{b^2 \cdot x_2^2} \\ &= \frac{a \cdot x_2 \cdot dx_1 - a \cdot x_1 \cdot dx_2}{b \cdot x_2^2} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{d TMS}{dx_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1 \cdot \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{b \cdot x_2^2} ;$$

$$\text{or } x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ et } \frac{dx_2}{dx_1} = -TMS < 0,$$

$$\text{d'où } \frac{d TMS}{dx_1} > 0.$$

Le TMS de U_4 est donc croissant.

2 Déduisons-en la forme des courbes d'indifférence :

Nous savons que si le TMS du bien 2 au bien 1 est décroissant alors les courbes d'indifférence sont convexes par rapport à l'origine. Inversement s'il est croissant, elles sont concaves par rapport à l'origine.

Or ici le TMS de U_1 , U_2 et U_3 est décroissant, donc nous pouvons affirmer que les courbes d'indifférence associées respectivement à U_1 , U_2 , U_3 sont convexes par rapport à l'origine.

Par contre, les courbes d'indifférence associées à U_4 sont concaves par rapport à l'origine, puisque le TMS de U_4 est croissant.

Exercice N° 8

Énoncé

Soit $U = 2x_1x_2 + x_1^2$, la fonction d'utilité d'un consommateur.

1 U vérifie-t-elle l'axiome de non-saturation ?

Exercice N° 12

Énoncé

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit : $U = x_1 \cdot x_2$.

- 1 Sachant que P_1 le prix du bien 1 et P_2 le prix du bien 2 sont respectivement 3 et 4, et que le revenu du consommateur est égal à 20, déterminer l'équation de la droite de budget et la représenter graphiquement.
- 2 Déterminer l'optimum du consommateur avec $P_1 = 3$, $P_2 = 4$ et $R = 20$.
- 3 S'agit-il d'un maximum ?

Corrigé

- 1 Déterminons l'équation de la droite de budget :

Nous savons que la droite de budget indique l'éventail de toutes les combinaisons différentes en biens 1 et 2 qu'un consommateur peut acheter compte tenu de son revenu et du prix des deux biens.

La droite de budget a pour équation : $x_2 = \frac{-P_1 x_1}{P_2} + \frac{R}{P_2}$.

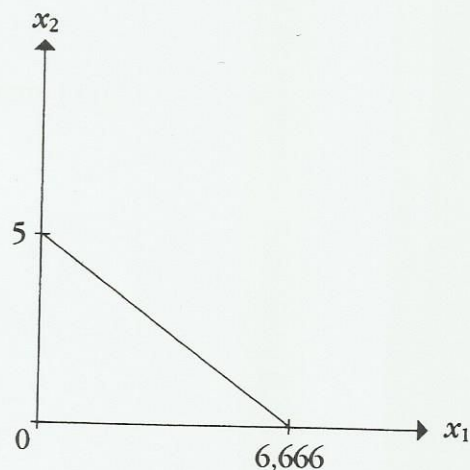
Application numérique :

Ici $P_1 = 3$, $P_2 = 4$ et $R = 20$,

d'où $x_2 = \frac{-3}{4} x_1 + 5$ (α).

(α) représente l'équation de la droite de budget.

D'où le graphique suivant :



2 Calculons l'optimum :

Il s'agit pour le consommateur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } U \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad R = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = U + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

$$\text{D'où } L = x_1 \cdot x_2 + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2).$$

À l'optimum (conditions nécessaires ou conditions du 1^{er} ordre), nous avons :

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \lambda P_1 = 0 \\ x_1 - \lambda P_2 = 0 \\ R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda P_1 & (1) \\ x_1 = \lambda P_2 & (2) \\ R = P_1 x_1 + P_2 x_2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{\lambda P_1}{\lambda P_2} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{P_1}{P_2} \quad (a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{P_1}{P_2}}$$

D'où à l'optimum le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des deux biens considérés.

(a) $\Rightarrow x_2 = \frac{P_1 \cdot x_1}{P_2}$ (b) ; en remplaçant x_2 par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$R = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot \left(\frac{P_1 \cdot x_1}{P_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow R = P_1 \cdot x_1 + P_1 \cdot x_1$$

$$\Leftrightarrow R = 2P_1 \cdot x_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{R}{2P_1}}$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow x_2^* = \frac{P_1 \cdot x_1^*}{P_2} = \frac{P_1 \cdot \left(\frac{R}{2P_1} \right)}{P_2} = \frac{R}{2P_2}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{x_2^* = \frac{R}{2P_2}}$$

x_1^* et x_2^* représentent les fonctions de demande des biens 1 et 2.

Application numérique :

$$\boxed{\begin{aligned} x_1^* &= \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\ x_2^* &= \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \end{aligned}}$$

L'optimum est donc le panier $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2} \right)$.

3 Montrons qu'il s'agit d'un maximum :

Il s'agit d'un maximum ssi le Hessien Bordé (HB) est positif.

$$\text{Or HB} = \begin{vmatrix} L''_{x_1 x_1} & L''_{x_1 x_2} & L''_{x_1 \lambda} \\ L''_{x_2 x_1} & L''_{x_2 x_2} & L''_{x_2 \lambda} \\ L''_{\lambda x_1} & L''_{\lambda x_2} & L''_{\lambda \lambda} \end{vmatrix}$$

Application numérique :

$$\text{HB} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -P_1 \\ 1 & 0 & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = 2P_1 P_2 > 0 \text{ car } P_1 > 0 \text{ et } P_2 > 0.$$

L'optimum $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2} \right)$ est donc bien un maximum. Les conditions suffisantes ou conditions du second ordre sont vérifiées.

En conclusion, en consommant $\frac{10}{3}$ unités du bien 1 et $\frac{5}{2}$ unités du bien 2, le consommateur maximisera son utilité et la satisfaction qu'il ressentira sera $U^* = x_1^* x_2^* = \frac{10}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{3}$.

Exercice N° 13

Énoncé

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit : $U = 2x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$.

Ici $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Soient P_1 le prix du bien 1 et P_2 le prix du bien 2.

Soit R le revenu du consommateur.

- 1** Déterminer les fonctions de demande du consommateur ainsi que leurs propriétés (on ne vérifiera pas les conditions du 2^e ordre).
- 2** Calculer et interpréter le multiplicateur de Lagrange.

Corrigé

- 1** Déterminons les fonctions de demande du consommateur :

Il s'agit pour le consommateur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } U \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad R = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = U + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

$$\text{D'où } L = 2x_1^\alpha \cdot x_2^\beta + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2).$$

À l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} L'x_1 = 0 \\ L'x_2 = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \alpha \cdot x_1^{(\alpha-1)} x_2^\beta - \lambda P_1 = 0 \\ 2 \cdot \beta \cdot x_1^\alpha x_2^{(\beta-1)} - \lambda P_2 = 0 \\ R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \alpha \cdot x_1^{(\alpha-1)} x_2^\beta = \lambda P_1 & (1) \\ 2 \cdot \beta \cdot x_1^\alpha x_2^{(\beta-1)} = \lambda P_2 & (2) \\ R = P_1 x_1 + P_2 x_2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \alpha \cdot x_1^{(\alpha-1)} \cdot x_2^\beta}{2 \cdot \beta \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^{(\beta-1)}} = \frac{\lambda P_1}{\lambda P_2} \Leftrightarrow \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{P_1}{P_2} \quad (a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{U'x_1}{U'x_2} = \frac{P_1}{P_2}}$$

D'où à l'optimum le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des biens considérés.

(a) $\Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \frac{P_1 \cdot x_1}{P_2}$ (b) ; en remplaçant x_2 par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$R = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{P_1 \cdot x_1}{P_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow R = P_1 \cdot x_1 + \frac{\beta}{\alpha} P_1 \cdot x_1$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\alpha P_1 \cdot x_1 + \beta P_1 \cdot x_1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha} P_1 \cdot x_1 \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{\alpha R}{(\alpha + \beta) P_1}}$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow x_2^* = \frac{\beta}{\alpha} \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{\alpha R}{(\alpha + \beta) P_1} \right) = \frac{\beta R}{(\alpha + \beta) P_2},$$

$$\text{ainsi : } \boxed{x_2^* = \frac{\beta R}{(\alpha + \beta) P_2}}$$

x_1^* et x_2^* représentent les fonctions de demande des biens 1 et 2.

Déterminons les propriétés de x_1^* et x_2^* :

α x_1^* et x_2^* sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu.

En effet :

$$x_1^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) = \frac{\alpha(t \cdot R)}{(\alpha + \beta)(t \cdot P_1)} = \frac{t \cdot \alpha R}{t \cdot (\alpha + \beta) P_1} = t^0 \cdot x_1^*,$$

$$x_2^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) = \frac{\beta(t \cdot R)}{(\alpha + \beta)(t \cdot P_2)} = \frac{t \cdot \beta R}{t \cdot (\alpha + \beta)P_2} = t^0 \cdot x_2^*.$$

Les fonctions de demande sont donc homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu ce qui signifie que si on multiplie simultanément les prix et le revenu par un même paramètre ($t > 0$) alors les quantités demandées en biens 1 et 2 resteront inchangées. On dit qu'il y a absence d'illusion monétaire.

B Ce sont des fonctions de demande marshalliennes.

N Les biens 1 et 2 sont des biens normaux et typiques.

En effet, la demande du bien 1 et la demande du bien 2 augmentent quand le revenu augmente : les biens 1 et 2 sont donc normaux.

D'autre part, la demande du bien 1 diminue quand P_1 augmente : le bien 1 est donc typique. De même, la demande du bien 2 diminue quand P_2 augmente : le bien 2 est donc, lui aussi, typique.

2 Calculons et interprétons λ :

Pour calculer λ , il suffit de prendre l'équation (1) de l'optimum :

$$(1) \Leftrightarrow 2 \cdot \alpha \cdot x_1^{(\alpha-1)} \cdot x_2^\beta = \lambda P_1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \alpha \cdot x_1^{(\alpha-1)} \cdot x_2^\beta}{P_1} \quad (4).$$

$$\text{Or } x_1^* = \frac{\alpha R}{(\alpha + \beta)P_1} \text{ et } x_2^* = \frac{\beta R}{(\alpha + \beta)P_2} ;$$

d'où en remplaçant x_1 par x_1^* et x_2 par x_2^* dans (4) nous obtenons :

$$(4) \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\alpha R}{(\alpha + \beta)P_1} \right)^{(\alpha-1)} \left(\frac{\beta R}{(\alpha + \beta)P_2} \right)^\beta}{P_1}.$$

Pour interpréter λ , calculons la différentielle totale de U et la différentielle totale de R .

$$dU = U'_1 dx_1 + U'_2 dx_2 ;$$

$$dR = P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + x_1 dP_1 + x_2 dP_2 \text{ car } R = P_1 x_1 + P_2 x_2.$$

Or les prix sont supposés constants, d'où $dP_1 = 0$ et $dP_2 = 0$.

Dans ces conditions, $dR = P_1 dx_1 + P_2 dx_2$.

Or à l'optimum, nous avons :
$$\begin{cases} U'_{x_1} = \lambda P_1 & (1) \\ U'_{x_2} = \lambda P_2 & (2) \end{cases} ;$$

d'où $dU = (\lambda P_1)dx_1 + (\lambda P_2)dx_2$

$\Leftrightarrow dU = \lambda(P_1dx_1 + P_2dx_2)$

$\Leftrightarrow dU = \lambda dR.$

Donc au total :
$$\lambda = \frac{dU}{dR}.$$

λ est donc l'utilité marginale du revenu, c'est-à-dire le supplément d'utilité ressenti par le consommateur lorsqu'il utilise une unité supplémentaire de son revenu $\lambda > 0$.

Exercice N° 14

Énoncé

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit :

$U = x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2$. Soient P_1 et P_2 les prix respectifs des biens 1 et 2, et R le revenu du consommateur.

- 1 Déterminer les fonctions de demande ainsi que leurs propriétés.
- 2 En déduire la fonction d'utilité indirecte.
- 3 Montrer que λ peut représenter alors l'utilité marginale indirecte du revenu.
- 4 Déterminer le complexe optimal quand $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $R = 20$, et quand $P_1 = 6$, $P_2 = 2$, $R = 10$. Conclure.

Corrigé

- 1 Déterminons les fonctions de demande ainsi que leurs propriétés :

Il s'agit pour le consommateur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } U \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad R = P_1 x_1 + P_2 x_2.$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = U + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

$$\text{D'où } L = x_1 x_2 + 2x_1 + 3x_2 + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2).$$

À l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2 - \lambda P_1 = 0 \\ x_1 + 3 - \lambda P_2 = 0 \\ R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2 = \lambda P_1 & (1) \\ x_1 + 3 = \lambda P_2 & (2) \\ R = P_1 x_1 + P_2 x_2 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{x_2 + 2}{x_1 + 3} = \frac{\lambda P_1}{\lambda P_2} \Leftrightarrow \frac{x_2 + 2}{x_1 + 3} = \frac{P_1}{P_2} \text{ (a)} \Leftrightarrow \boxed{\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{P_1}{P_2}}.$$

D'où à l'optimum le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des biens considérés.

$$\text{(a)} \Rightarrow x_2 + 2 = \frac{P_1(x_1 + 3)}{P_2} \Rightarrow x_2 = \frac{P_1(x_1 + 3) - 2P_2}{P_2} \text{ (b);}$$

en remplaçant x_2 par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R &= P_1 x_1 + P_2 \left(\frac{P_1(x_1 + 3) - 2P_2}{P_2} \right) \\ \Leftrightarrow R &= P_1 x_1 + P_1 x_1 + 3P_1 - 2P_2 \\ \Leftrightarrow R - 3P_1 + 2P_2 &= 2P_1 x_1 \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{R - 3P_1 + 2P_2}{2P_1}}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où (b)} \Rightarrow x_2^* = \frac{P_1 \left(\frac{R - 3P_1 + 2P_2}{2P_1} + 3 \right) - 2P_2}{P_2} \text{ (c);}$$

$$\text{(c)} \Rightarrow x_2^* = \frac{R - 3P_1 + 2P_2 + 6P_1 - 4P_2}{2P_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{R + 3P_1 - 2P_2}{2P_2}}.$$

x_1^* et x_2^* représentent les fonctions de demande des biens 1 et 2.

Leurs propriétés sont :

α x_1^* et x_2^* sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } x_1^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) &= \frac{(t \cdot R) - 3(t \cdot P_1) + 2(t \cdot P_2)}{2(t \cdot P_1)} \\ &= \frac{t \cdot (R - 3P_1 + 2P_2)}{t(2P_1)} = t^0 \cdot x_1^*, \\ x_2^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) &= \frac{(t \cdot R) + 3(t \cdot P_1) - 2(t \cdot P_2)}{2(t \cdot P_2)} \\ &= \frac{t \cdot (R + 3P_1 - 2P_2)}{t(2P_2)} = t^0 \cdot x_2^*. \end{aligned}$$

Les fonctions de demande sont donc homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu ce qui signifie que si on multiplie simultanément les prix et le revenu par un même paramètre ($t > 0$) alors les quantités demandées en biens 1 et 2 resteront inchangées. On dit qu'il y a absence d'illusion monétaire.

β Ce sont des fonctions de demande marshalliennes.

γ Les biens 1 et 2 sont des biens normaux, typiques et substituables :

$$\text{En effet, } x_1^* = \frac{R + 2P_2}{2P_1} - \frac{3}{2} \text{ et } x_2^* = \frac{R + 3P_1}{2P_2} - 1 ;$$

d'où la demande du bien 1 et la demande du bien 2 augmentent quand le revenu augmente : les biens 1 et 2 sont donc normaux.

D'autre part, la demande du bien 1 diminue quand P_1 augmente : le bien 1 est donc typique. De même, la demande du bien 2 diminue quand P_2 augmente : le bien 2 est donc, lui aussi, typique.

Enfin, la demande du bien 1 augmente avec P_2 et la demande du bien 2 augmente avec P_1 : les biens 1 et 2 sont donc substituables.

δ Les demandes en biens 1 et 2 peuvent être nulles :

$$\text{En effet, } x_1^* = 0 \text{ ssi } R - 3P_1 + 2P_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{R + 2P_2 = 3P_1}.$$

Donc : **a** Si $R + 2P_2 > 3P_1$, la quantité demandée en bien 1 sera strictement positive ;

b Si $R + 2P_2 = 3P_1$, elle sera nulle ;

III. Droite de budget. Fonctions de demande. Fonctions d'utilités indirectes. Équilibres en coin. (Exercices 12 à 18)

- c** Si $R + 2P_2 < 3P_1$, mathématiquement cela induit une quantité demandée négative ; or cela n'a aucune signification économique. Pour que cela en ait on suppose que l'agent économique ne consommera que du bien 2 en quantité $x_2^* = \frac{R}{P_2}$ car le prix du bien 1 est trop élevé.

Au total : si $R + 2P_2 > 3P_1 \Rightarrow x_1^* > 0$.

si $R + 2P_2 \leq 3P_1 \Rightarrow x_1^* = 0$, on dit alors qu'on est en présence d'un équilibre en coin car l'agent économique ne désire pas consommer du bien 1.

De même, $x_2^* = 0$ ssi $R + 3P_1 - 2P_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{R + 3P_1 = 2P_2}$.

Donc : **a** Si $R + 3P_1 > 2P_2$, la quantité demandée en bien 2 sera strictement positive ;

b Si $R + 3P_1 = 2P_2$, elle sera nulle ;

- c** Si $R + 3P_1 < 2P_2$, mathématiquement cela induit une quantité demandée négative ; or cela n'a aucune signification économique. Pour que cela en ait on suppose que l'agent économique ne consommera que du bien 1 en quantité $x_1^* = \frac{R}{P_1}$ car le prix du bien 2 est trop élevé.

Au total : si $R + 3P_1 > 2P_2 \Rightarrow x_2^* > 0$.

si $R + 3P_1 \leq 2P_2 \Rightarrow x_2^* = 0$, on dit alors qu'on est en présence d'un équilibre en coin car l'agent économique ne désire pas consommer du bien 2.

2 Déduisons-en la fonction d'utilité indirecte :

Pour obtenir la fonction d'utilité indirecte, il suffit de remplacer, dans la fonction d'utilité U , x_1 et x_2 par x_1^* et x_2^* . Nous obtiendrons ainsi une fonction W dont les variables explicatives seront P_1 , P_2 , et R .

Application numérique :

$$W = x_1^* x_2^* + 2x_1^* + 3x_2^*$$

$$W = \left(\frac{R - 3P_1 + 2P_2}{2P_1} \right) \left(\frac{R + 3P_1 - 2P_2}{2P_2} \right) + 2 \left(\frac{R - 3P_1 + 2P_2}{2P_1} \right) + 3 \left(\frac{R + 3P_1 - 2P_2}{2P_2} \right)$$

$$W = \frac{R^2 - 9P_1^2 - 4P_2^2 + 12P_1P_2}{4P_1P_2} + \frac{4P_2R - 12P_1P_2 + 8P_2^2}{4P_1P_2} + \frac{6P_1R + 18P_1^2 - 12P_1P_2}{4P_1P_2}$$

$$W = \frac{R^2 + 9P_1^2 + 4P_2^2 - 12P_1P_2 + 4P_2R + 6P_1R}{4P_1P_2}$$

Au total,
$$W = \frac{R^2 + 9P_1^2 + 4P_2^2 + 4P_2R + 6P_1R}{4P_1P_2} - 3$$

3 Montrons que λ est l'utilité marginale indirecte du revenu :

Pour cela, procédons en deux temps.

Étape n° 1 : calculons l'utilité marginale indirecte du revenu à partir de la fonction d'utilité indirecte.

Elle nous est donnée par la formule :
$$W'_R = \frac{\delta W}{\delta R}$$

Application numérique :

$$W'_R = \frac{2R + 4P_2 + 6P_1}{4P_1P_2} = \frac{R + 2P_2 + 3P_1}{2P_1P_2}$$

Étape n° 2 : calculons la valeur de λ à partir de l'équation (1) de l'optimum.

$$(1) \Leftrightarrow x_2 + 2 = \lambda P_1 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 + 2}{P_1} \quad (4)$$

$$\text{Or } x_2^* = \frac{R + 3P_1 - 2P_2}{2P_2};$$

d'où en remplaçant x_2 par x_2^* dans (4), nous obtenons :

$$(4) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\left(\frac{R + 3P_1 - 2P_2}{2P_2}\right) + 2}{P_1} \quad (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow \lambda = \frac{R + 3P_1 - 2P_2 + 4P_2}{2P_1P_2} \quad (6)$$

$$(6) \Leftrightarrow \lambda = \frac{R + 3P_1 + 2P_2}{2P_1P_2}.$$

En conclusion, nous avons donc bien : $\lambda = W'_R = \frac{R + 3P_1 + 2P_2}{2P_1P_2}$.

λ est donc l'utilité marginale indirecte du revenu, c'est-à-dire le supplément d'utilité indirecte ressenti par le consommateur lorsqu'il utilise une unité supplémentaire de son revenu. $\lambda > 0$.

4 Déterminons le complexe optimal avec :

a $P_1 = 1, P_2 = 2, R = 20$:

Dans ce cas, $x_1^* = \frac{21}{2}$ et $x_2^* = \frac{19}{4}$.

Donc en consommant 10,5 unités du bien 1 et 4,75 unités du bien 2, le consommateur maximisera son utilité et sa satisfaction sera égale à :

$$U^* = 10,5 \times 4,75 + 21 + 14,25, \text{ soit } U^* = 85,125.$$

b $P_1 = 6, P_2 = 2, R = 10$:

Dans ce cas, $x_1^* = -\frac{1}{3}$ et $x_2^* = 6$.

Or cet optimum n'a aucune signification économique : il n'est pas rationnel pour le consommateur d'avoir une fonction de demande négative. Dans ce cas, ce dernier ne consommera que du bien 2 en

quantité $x_2^* = \frac{R}{P_2} = 5$, car le prix du bien 1 est trop élevé.

La satisfaction que ressentira le consommateur sera alors :

$$U^* = 0 \times 5 + 2 \times 0 + 3 \times 5, \text{ soit } U^* = 15.$$

Il est bon de noter que $x_2^* = \frac{R}{P_2}$ car $x_1^* = 0$,

et donc la contrainte budgétaire s'écrit :

$$R = P_2 x_2^* \Rightarrow x_2^* = \frac{R}{P_2}.$$

Exercice N° 15

Énoncé

La fonction d'utilité d'un consommateur s'écrit :

$U = 5 \log(x_1 + 1) + \log x_2$. Soient P_1 et P_2 les prix respectifs des biens 1 et 2, R le revenu de ce consommateur.

- 1 Montrer que cette fonction d'utilité peut admettre un équilibre en coin.
- 2 Déterminer des valeurs pour P_1 , P_2 et R telles que l'agent économique ne consomme que du bien 2.
- 3 Que se passe-t-il si les prix ainsi que le revenu de la question 2 sont divisés par trois ?

Corrigé

- 1 Montrons que cette fonction d'utilité peut admettre un équilibre en coin :

Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons déterminer les fonctions de demande de U .

Il s'agit pour le consommateur de résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } U \\ \text{sous la contrainte} \end{cases} \quad R = P_1 x_1 + P_2 x_2.$$

Le lagrangien s'écrit :

$$L = U + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2), \lambda \text{ étant le multiplicateur de Lagrange.}$$

$$\text{D'où } L = 5 \log(x_1 + 1) + \log x_2 + \lambda \cdot (R - P_1 x_1 - P_2 x_2).$$

À l'optimum, nous avons :

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{(x_1 + 1)} - \lambda P_1 = 0 \\ \frac{1}{x_2} - \lambda P_2 = 0 \\ R - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{(x_1 + 1)} = \lambda P_1 & (1) \\ \frac{1}{x_2} = \lambda P_2 & (2) \\ R = P_1 x_1 + P_2 x_2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{5x_2}{x_1+1} = \frac{\lambda P_1}{\lambda P_2} \Leftrightarrow \frac{5x_2}{x_1+1} = \frac{P_1}{P_2} \quad (a) \Leftrightarrow \boxed{\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = \frac{P_1}{P_2}} \end{aligned}$$

D'où à l'optimum le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des biens considérés.

(a) $\Rightarrow x_2 = \frac{P_1(x_1+1)}{5P_2}$ (b); en remplaçant x_2 par cette expression dans l'équation (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} R &= P_1x_1 + P_2 \left(\frac{P_1(x_1+1)}{5P_2} \right) \\ \Leftrightarrow R &= P_1x_1 + \frac{P_1x_1+P_1}{5} \\ \Leftrightarrow R &= \frac{6P_1x_1+P_1}{5} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{5R-P_1}{6P_1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où (b)} &\Rightarrow x_2^* = \frac{P_1}{5P_2} \cdot \left(\frac{5R-P_1}{6P_1} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow x_2^* &= \frac{5R-P_1+6P_1}{30P_2} \\ \Leftrightarrow x_2^* &= \frac{5R+5P_1}{30P_2} \Rightarrow \boxed{x_2^* = \frac{R+P_1}{6P_2}} \end{aligned}$$

D'où les fonctions de demande du consommateur en bien 1 et bien 2 sont x_1^* et x_2^* .

Nous voyons donc que $\forall (P_1, P_2, R) \in R^{*+}, x_2^* > 0$.

Par contre, en ce qui concerne la demande du bien 1, nous devons distinguer trois cas : **a** Si $5R > P_1 \Rightarrow x_1^* > 0$;

b Si $5R = P_1 \Rightarrow x_1^* = 0$;

c Si $5R < P_1 \Rightarrow x_1^* < 0$.

Nous venons donc de démontrer que la fonction d'utilité admet un équilibre en coin ssi $\boxed{5R \leq P_1}$ car dans ces conditions, l'agent économique ne consommera que du bien 2 en quantité $x_2^* = \frac{R}{P_2}$.

2 Déterminons des valeurs pour P_1, P_2 et R telles que l'agent économique ne consomme que du bien 2 :

Pour que cela soit vérifié, il suffit que $5R \leq P_1$. Docs à portée de main

En prenant $P_1 = 10$, $P_2 = 4$ et $R = 2$, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3 Les prix ainsi que le revenu sont divisés par trois :

Nous pouvons affirmer que si les prix et le revenu sont simultanément divisés par trois, alors les quantités demandées en biens 1 et 2 seront

toujours : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{1}{2}$.

Cela vient du fait que les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } x_1^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) &= \frac{5(t \cdot R) - (t \cdot P_1)}{6(t \cdot P_1)} = \frac{t \cdot (5R - P_1)}{t \cdot (6P_1)} \\ &= t^0 \cdot x_1^*, \\ x_2^*(t \cdot P_1, t \cdot P_2, t \cdot R) &= \frac{(t \cdot R) + (t \cdot P_1)}{6(t \cdot P_2)} = \frac{t \cdot (R + P_1)}{t \cdot (6P_2)} \\ &= t^0 \cdot x_2^*. \end{aligned}$$

Les fonctions de demande sont donc homogènes de degré zéro par rapport aux prix et au revenu ce qui signifie que si on multiplie simultanément les prix et le revenu par un même paramètre ($t > 0$) (ici $t = \frac{1}{3}$)

alors les quantités demandées en biens 1 et 2 resteront inchangées.

On dit qu'il y a absence d'illusion monétaire.

Exercice N° 16

Énoncé

Nous avons vu dans l'exercice N° 15 que dans le cas où la fonction d'utilité est $U = 5 \log(x_1 + 1) + \log x_2$, les fonctions de demande sont :

Exercice N° 27

Énoncé

Soient trois fonctions d'utilités :

$$U_1 = 3x_1 + 6x_2,$$

$$U_2 = bx_1^2 \cdot x_2^2,$$

$$U_3 = \left(\frac{1}{3} x_1^{-0,5} + \frac{2}{5} x_2^{-0,5} \right)^{-2}.$$

Calculer l'élasticité de substitution du bien 2 au bien 1.

Corrigé

Calculons l'élasticité de substitution du bien 2 au bien 1 :

Nous savons que l'inverse de l'élasticité de substitution du bien 2 au bien 1 correspond à la variation du TMS du bien 2 au bien 1 exprimée en pourcentage sur la variation du rapport x_2/x_1 exprimée en pourcentage.

Mathématiquement, elle nous est donnée par la formule :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\delta TMS}{\delta \left(\frac{x_2}{x_1} \right)} \times \frac{\left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{TMS}, \quad \sigma \text{ étant l'élasticité de substitution.}$$

Pour la calculer, nous devons d'abord déterminer le TMS de chacune des fonctions d'utilités.

Nous savons que le TMS du bien 2 au bien 1 indique dans quelle mesure on doit substituer le bien 2 au bien 1 pour rester sur une même courbe d'indifférence, c'est-à-dire pour que le consommateur garde la même satisfaction.

Soit U la fonction d'utilité du consommateur.

Calculons sa différentielle totale : $dU = U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2$ (1),

or le long d'une courbe d'indifférence, le niveau d'utilité est identique, d'où $dU = 0$.

Par conséquent (1) $\Rightarrow U'x_1 dx_1 + U'x_2 dx_2 = 0$ (2)

$$(2) \Rightarrow U'x_1 dx_1 = -U'x_2 dx_2 \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{\frac{U'x_1}{U'x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS}$$

Donc : $\boxed{TMS = \frac{U'x_1}{U'x_2}}$

Application numérique :

$$TMS_1 = \frac{U'_1 x_1}{U'_1 x_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$TMS_2 = \frac{U'_2 x_1}{U'_2 x_2} = \frac{2b \cdot x_1 x_2^2}{2b \cdot x_1^2 x_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{aligned} TMS_3 &= \frac{U'_3 x_1}{U'_3 x_2} = \frac{-2\left(\frac{1}{3}x_1^{-0,5} + \frac{2}{3}x_2^{-0,5}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{0,5}{3}x_1^{-1,5}\right)}{-2\left(\frac{1}{3}x_1^{-0,5} + \frac{2}{3}x_2^{-0,5}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3}x_2^{-1,5}\right)} \\ &= 0,5\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-1,5} = 0,5\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1,5} \end{aligned}$$

Il est bon de noter que le TMS de la fonction d'utilité U_1 est constant. Dans ce cas, les biens 1 et 2 sont dits parfaitement substituables.

Graphiquement, les courbes d'indifférence associées à U_1 sont des droites parallèles :

Exercice N° 45

Énoncé

Une entreprise fabrique un bien Q et a, comme fonction de production, $Q = AK^\alpha L^\beta$; avec $A > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

- 1 Interpréter cette fonction de production.
- 2 Calculer les productivités moyennes et marginales.
- 3 Si $A = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, tracer une isoquante.

Corrigé

1 Interprétons la fonction de production Q :

Nous savons que Q indique le niveau de production ou output à partir des quantités de facteurs utilisés de façon efficiente.

Ici les facteurs de production sont le travail (L) et le capital (K).

Comme ces deux facteurs de production ou inputs sont variables, nous sommes en présence d'une fonction de production de longue période. Le paramètre A est un coefficient de dimension ; il incorpore notamment le progrès technique.

α et β sont respectivement les élasticités de l'output par rapport au capital et de l'output par rapport au travail.

Enfin :

- a si $\alpha + \beta = 1$, la fonction de production Q est une Cobb-Douglas car elle s'écrit de la forme : $Q = \lambda K^a L^b$ avec $a + b = 1$.
- b si $\alpha + \beta \neq 1$, la fonction de production Q est de type Cobb-Douglas car elle s'écrit de la forme : $Q = \lambda K^a L^b$ avec $a + b \neq 1$.

2 Calculons les productivités moyennes et marginales :

a Calcul des productivités moyennes :

Nous savons que la productivité moyenne du facteur x est le rapport de sa productivité totale à sa quantité.

Mathématiquement, elle nous est donnée par la formule :

$$PM_x = \frac{Q}{x}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \text{La productivité moyenne du travail est : } PML &= \frac{Q}{L} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{L} \\ &= AK^\alpha L^{(\beta-1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{La productivité moyenne du capital est : } PMK &= \frac{Q}{K} = \frac{AK^\alpha L^\beta}{K} \\ &= AK^{(\alpha-1)} L^\beta. \end{aligned}$$

$$\text{Au total : } \begin{cases} PML = AK^\alpha L^{(\beta-1)} \\ PMK = AK^{(\alpha-1)} L^\beta \end{cases}.$$

b Calcul des productivités marginales :

Nous savons que la productivité marginale du facteur x correspond au supplément d'output résultant de l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur.

Mathématiquement, elle nous est donnée par la formule :

$$Pm_x = \frac{\delta Q}{\delta x}.$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \text{La productivité marginale du travail est : } PmL &= \frac{\delta Q}{\delta L} = A\beta K^\alpha L^{(\beta-1)} \\ &= \frac{\beta}{L} Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{La productivité marginale du capital est : } PmK &= \frac{\delta Q}{\delta K} = A\alpha K^{(\alpha-1)} L^\beta \\ &= \frac{\alpha}{K} Q. \end{aligned}$$

Au total :

$$\begin{aligned} PmL &= \frac{\beta}{L} Q \\ PmK &= \frac{\alpha}{K} Q \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que : $PmL = \beta \cdot PML$ et $PmK = \alpha \cdot PMK$.

3 Traçons une isoquante si $A = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

Si $A = 1$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, la fonction de production s'écrit :

$Q = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$; nous sommes donc en présence d'une fonction de production Cobb-Douglas.

Nous savons qu'une isoquante est l'ensemble des combinaisons d'inputs K et L qui permettent, lorsqu'elles sont utilisées de la façon la plus efficace possible, la réalisation d'un niveau d'output donné Q_0 .

Soit $Q_0 = 1$, 1 étant un niveau d'output donné.

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{L}} \quad (1).$$

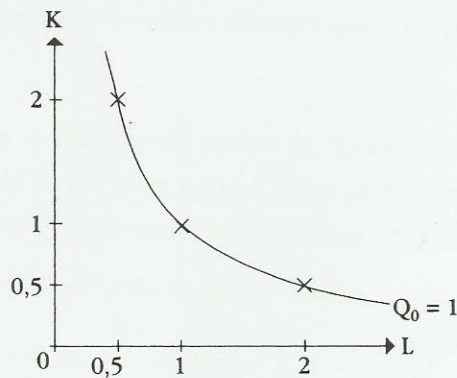
(1) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 1$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 1$, $K = 1$.

b si $L = 2$, $K = 0,5$.

c si $L = 0,5$, $K = 2$.

D'où le graphique :



Il est bon de remarquer que l'isoquante est convexe par rapport à l'origine et que tout le long de cette isoquante, le niveau de production est constant et est égal à $Q_0 = 1$.

Exercice N° 46

Énoncé

Une entreprise fabrique un bien Q et a, comme fonction de production, la fonction de type Cobb-Douglas : $Q = 2KL$.

- 1 Tracer les isoquantes associées respectivement aux niveaux d'output : $Q_0 = 2$ et $Q_0 = 3$. Commenter.
- 2 Calculer le niveau de production de l'entreprise si les quantités de facteurs utilisés sont : $L = 2$ et $K = 5$.
- 3 Calculer les productivités marginales des deux facteurs.
- 4 En déduire le TMST de K à L .

Corrigé

- 1 Traçons les isoquantes associées aux niveaux d'output $Q_0 = 2$ et $Q_0 = 3$:

Nous savons qu'une isoquante est l'ensemble des combinaisons d'inputs K et L qui permettent, lorsqu'elles sont utilisées de la façon la plus efficace possible, la réalisation d'un niveau d'output donné Q_0 .

Soit $Q_0 = 2$, 2 étant un niveau d'output donné.

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow 2KL = 2 \Leftrightarrow KL = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{L}} \quad (1).$$

(1) représente l'équation $Q_0 = 2$.

Prenons 3 points : a

b

c

De même, soit $Q_0 = 3$

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow 2KL = 3$$

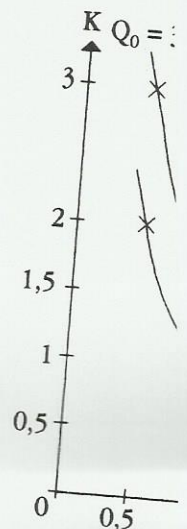
(2) représente l'équation

Prenons 3 points : a

b

c

D'où le graphique suivant



En commentaire, nous pouvons dire que le niveau de production est constant par rapport à l'origine et enfin, plus son niveau d'output est élevé, plus son niveau d'output est élevé.

- 2 Calculons le produit de

Si $L = 2$ et $K = 5$, le produit est : $Q_0 = 2 \times 5 \times 2 = 20$.

(1) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 2$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 1$, $K = 1$.
b si $L = 2$, $K = 0,5$.
c si $L = 0,5$, $K = 2$.

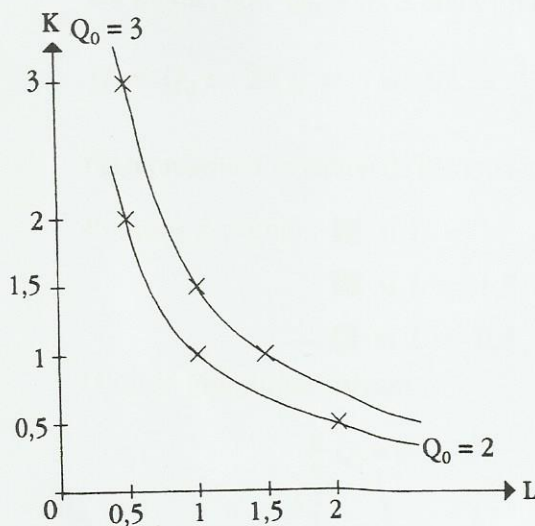
De même, soit $Q_0 = 3$, 3 étant un niveau d'output donné.

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow 2KL = 3 \Leftrightarrow KL = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{2L}} \quad (2).$$

(2) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 3$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 1$, $K = 1,5$.
b si $L = 1,5$, $K = 1$.
c si $L = 0,5$, $K = 3$.

D'où le graphique suivant :



En commentaire, nous pouvons dire que le long d'une isoquante le niveau de production est constant, que les isoquantes sont convexes par rapport à l'origine et enfin, que plus l'isoquante est haute par rapport à l'origine, plus son niveau d'output est élevé.

2 Calculons le produit de l'entreprise si $L = 2$ et $K = 5$:

Si $L = 2$ et $K = 5$, le produit ou niveau de production de l'entreprise est : $\boxed{Q_0 = 2 \times 5 \times 2 = 20}$.

(1) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 2$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 1$, $K = 1$.

b si $L = 2$, $K = 0,5$.

c si $L = 0,5$, $K = 2$.

De même, soit $Q_0 = 3$, 3 étant un niveau d'output donné.

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow 2KL = 3 \Leftrightarrow KL = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{K = \frac{3}{2L}} \quad (2).$$

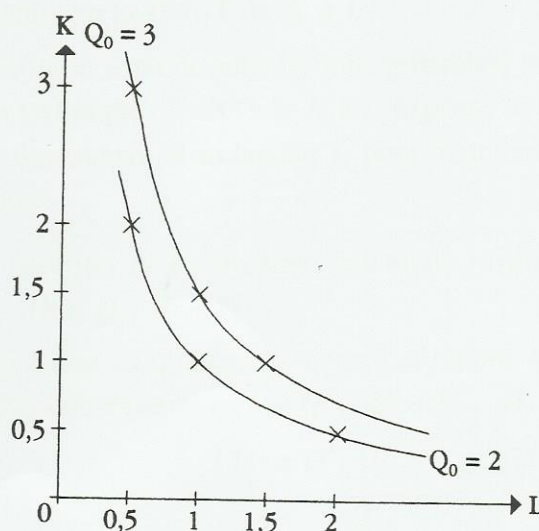
(2) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 3$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 1$, $K = 1,5$.

b si $L = 1,5$, $K = 1$.

c si $L = 0,5$, $K = 3$.

D'où le graphique suivant :



En commentaire, nous pouvons dire que le long d'une isoquante le niveau de production est constant, que les isoquantes sont convexes par rapport à l'origine et enfin, que plus l'isoquante est haute par rapport à l'origine, plus son niveau d'output est élevé.

2 Calculons le produit de l'entreprise si $L = 2$ et $K = 5$:

Si $L = 2$ et $K = 5$, le produit ou niveau de production de l'entreprise est : $\boxed{Q_0 = 2 \times 5 \times 2 = 20}$.

3 Calculons les productivités marginales :

Nous savons que la productivité marginale du facteur x correspond au supplément d'output résultant de l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur.

Mathématiquement, elle nous est donnée par la formule :

$$P_{mx} = \frac{\delta Q}{\delta x}.$$

Application numérique :

La productivité marginale du travail est : $P_{mL} = \frac{\delta Q}{\delta L} = 2K$.

La productivité marginale du capital est : $P_{mK} = \frac{\delta Q}{\delta K} = 2L$.

Au total :
$$\begin{cases} P_{mL} = 2K \\ P_{mK} = 2L \end{cases}.$$

4 Déduisons-en le TMST de K à L :

À l'intérieur de la zone de substitutions possibles, le taux marginal de substitution technique (TMST) de K à L exprime le taux auquel le facteur K doit être substitué au facteur L pour maintenir un niveau donné de production.

Soit Q la fonction de production, calculons sa différentielle totale :

$$dQ = Q'_K dK + Q'_L dL \quad (1);$$

or le long d'une isoquante, le niveau d'output est constant, d'où $dQ = 0$. Par conséquent, $(1) \Rightarrow Q'_K dK + Q'_L dL = 0 \quad (2)$

$$(2) \Rightarrow Q'_L dL = -Q'_K dK \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{Q'_L}{Q'_K} = -\frac{dK}{dL} = TMST.$$

Application numérique :

$TMST = \frac{Q'_L}{Q'_K}$, or nous savons que : $Q'_L = 2K$ et $Q'_K = 2L$,

d'où
$$TMST = \frac{K}{L}.$$

Exercice N° 47

Énoncé

On note K et L les quantités de capital et de travail nécessaires à la production d'une unité de bien Q .

La fonction de production s'écrit : $Q = L + K^{1/2}$.

- 1 Tracer l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 4$. Commenter.
- 2 On suppose que K est fixé : $K = K_0 = 8$. Interpréter cela économiquement.
- 3 Quelle sera alors la quantité du facteur travail que l'entreprise devra employer pour dégager un niveau de production : $Q_0 = 100$?

Corrigé

- 1 Traçons l'isoquante associée à $Q_0 = 4$:

Nous savons qu'une isoquante est l'ensemble des combinaisons d'inputs K et L qui permettent, lorsqu'elles sont utilisées de la façon la plus efficace possible, la réalisation d'un niveau d'output donné Q_0 . Soit $Q_0 = 4$, 4 étant un niveau d'output donné.

$$Q = Q_0 \Leftrightarrow L + K^{1/2} = 4 \Leftrightarrow K^{1/2} = 4 - L \Rightarrow K = (4 - L)^2 \quad (1).$$

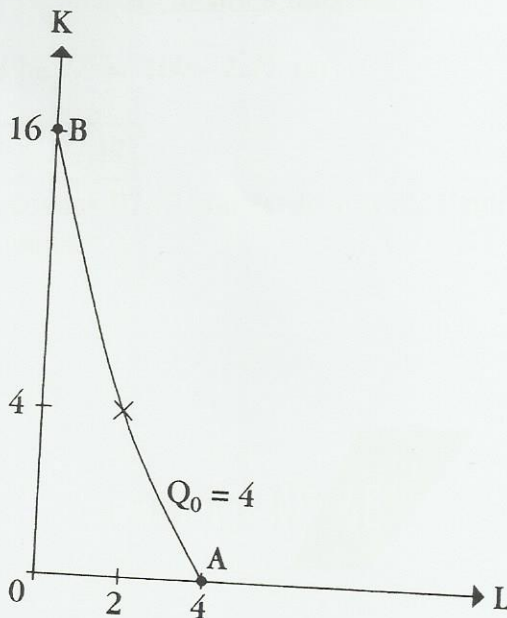
(1) représente l'équation de l'isoquante associée au niveau d'output $Q_0 = 4$.

Il est bon de noter que le facteur K doit être positif ou nul ; d'où $K \geq 0 \Rightarrow 4 - L \geq 0 \Rightarrow L \leq 4$.

Donc pour que les deux inputs K et L soient utilisés en quantités positives ou nulles (pour avoir une signification économique), nous devons imposer une contrainte sur L : $0 \leq L \leq 4$.

Prenons 3 points : **a** si $L = 0$, $K = 16$.
b si $L = 2$, $K = 4$.
c si $L = 4$, $K = 0$.

D'où le graphique suivant :



En commentaire, nous pouvons dire que le long d'une isoquante le niveau de production est constant et est égal à $Q_0 = 4$, que l'isoquante est convexe par rapport à l'origine et enfin, que l'isoquante coupe l'axe des abscisses au point A (4, 0) et l'axe des ordonnées au point B(0, 16). C'est un cas particulier.

En effet, en général une isoquante admet deux asymptotes : une pour $L = 0$ et l'autre pour $K = 0$.

2 Interprétons économiquement le fait que le capital soit fixé à $K_0 = 8$:

Si l'on fixe le facteur capital, seul le facteur travail varie. Nous nous situons alors, comme le disait Alfred Marshall, en courte période : le

stock de capital est supposé fixe et varie en fonction du seul :

Ap

Ici $K_0 = 8$, d'où $Q = 1$

3 Déterminons la qua

Nous savons que : $Q = L$

Ap

$Q_0 = 100$, d'où $L^* = 100$

(a) $\Rightarrow L^* = 97,17$.

D'où en employant 97,17 unités d'output.

Exer

Énoncé

On note K et L les quantités des facteurs utilisés pour la production d'une unité

La fonction de production :

1 Calculer sans le démo

2 Si $K = K_0 = 2$. Con

3 Que devient alors la

stock de capital est supposé constant et la production varie en fonction du seul facteur travail $Q = f(L)$.

Application numérique :

Ici $K_0 = 8$, d'où $Q = L + 2\sqrt{2}$.

3 Déterminons la quantité de travail telle que $Q_0 = 100$:

Nous savons que : $Q = L + 2\sqrt{2} \Rightarrow L^* = Q - 2\sqrt{2}$.

Application numérique :

$Q_0 = 100$, d'où $L^* = 100 - 2\sqrt{2}$ (a)

(a) $\Rightarrow L^* = 97,17$.

D'où en employant 97,17 unités de travail, l'entrepreneur produira 100 unités d'output.

Exercice N° 48

Énoncé

On note K et L les quantités de capital et de travail nécessaires à la production d'une unité de bien Q .

La fonction de production s'écrit : $Q = 7K^3L$.

- 1** Calculer sans le démontrer le TMST de K à L .
- 2** Si $K = K_0 = 2$. Comment s'écrit la fonction de production ?
- 3** Que devient alors la valeur du TMST de K à L ?

Dans ce cas le rendement factoriel du travail est décroissant.

Exercice N° 51

Énoncé

On se situe en courte période, le travail est donc le seul facteur de production variable.

La fonction de production Q est donc uniquement fonction du travail : $Q = f(L)$.

Le tableau suivant nous donne le niveau de production Q réalisé en fonction du nombre d'unités de travail utilisées :

Unités de travail L	Unités de production Q
0	0
1	10
2	30
3	55
4	69
5	80
6	88
7	93
8	93
9	92
10	87

- 1 Calculer les productivités totales, moyennes et marginales. Faire un tableau.

- 2 Tracer sur un graphique les courbes de productivités totales, moyennes et marginales.

Corrigé

- 1 Calculons les productivités totales, moyennes et marginales. Nous savons que la productivité totale à court terme est donnée par :

Elle nous est donnée par :

Quant à la productivité moyenne, elle nous est donnée par :

Elle nous est donnée par :

Unités de travail L	Productivité totale Q/L	Productivité moyenne Q/L	Productivité marginale Q'_L
0			
1	10	10	10
2	15	15	20
3	18,3	18,3	25
4	17,25	17,25	22
5	16	16	16
6	14,67	14,67	10
7	13,3	13,3	5
8	11,625	11,625	0
9	10,22	10,22	-5
10	8,7	8,7	-10

- 2 Représentation graphique des courbes de productivités totales, moyennes et marginales.

- 2** Tracer sur un même graphique les courbes de productivités totales, moyennes et marginales. Commenter.

Corrigé

- 1** Calculons les productivités totales, moyennes et marginales :

Nous savons que la productivité moyenne du travail est le rapport de sa productivité totale à sa quantité.

Elle nous est donnée par la formule : $PML = \frac{Q}{L}$.

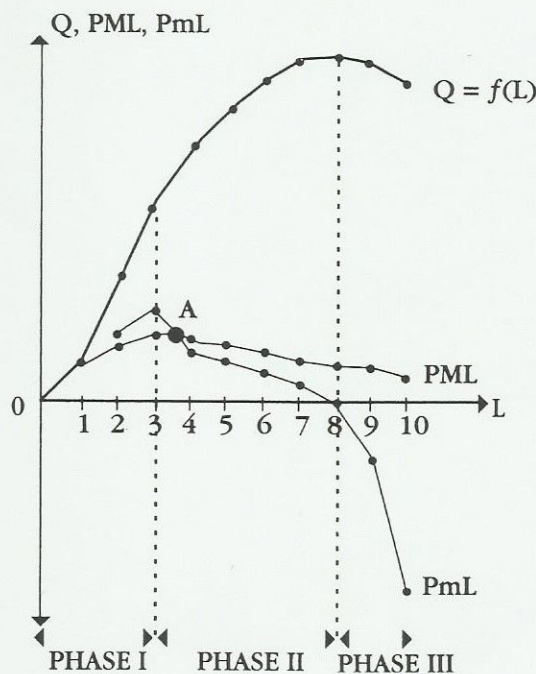
Quant à la productivité marginale, c'est-à-dire le supplément d'output résultant de l'utilisation d'une unité supplémentaire du facteur travail,

elle nous est donnée par la formule : $PmL = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$.

Application numérique :

Unités de travail L	Unités de production Q	PML	PmL
0	0	—	—
1	10	10	—
2	30	15	20
3	55	18,33	25
4	69	17,25	14
5	80	16	11
6	88	14,66	8
7	93	13,28	5
8	93	11,62	0
9	92	10,22	— 1
10	87	8,7	— 5

- 2** Représentation graphique et commentaire :



- La phase I correspond à la phase de rendements croissants. En effet, dans cette phase le produit total augmente à un rythme croissant. Ceci est dû au fait que le rapport capital sur travail est trop élevé. Comme nous sommes en courte période et que le stock de capital est fixé, pour diminuer le rapport K/L , l'entreprise a intérêt à augmenter la quantité de travail pour ne pas rester dans cette phase.
- La phase II correspond à la phase de rendements décroissants. Dans cette phase, le comportement de l'entreprise est rationnel. La décision optimale de cette dernière est le point d'intersection des courbes de productivités moyenne et marginale (point A sur le graphique).
- La phase III correspond à la phase de rendements négatifs. En effet, dans cette phase le produit total décroît rapidement. Ceci est dû au fait que le rapport capital sur le travail est trop faible. Comme nous sommes en courte période et que le stock de capital est fixé, pour augmenter le rapport K/L , l'entreprise a intérêt à diminuer la quantité de travail pour ne pas rester dans cette phase.

Au total, il est bon de savoir que les décisions de l'entreprise sont rationnelles quand la productivité marginale du facteur travail est d'une part strictement positive ($Q'_L > 0$), d'autre part décroissante ($Q''_{LL} < 0$) c'est-à-dire lorsque le rendement factoriel du travail est décroissant.