Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit $P = 1 - X^8$

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ et enfin dans $\mathbb{Q}[X]$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $1 + j = -j^2$
2. Montrer que j est une racine multiple de P.
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{Q}[X]$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

1. Déterminer les racines de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Soit $P = -X^3 + X^2 - X + 1$ un polynôme.

Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit

$$P = 1 - X + X^2 - \cdots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$$

Déterminer les racines réelles et complexes de P.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que j est une racine multiple de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.
2. En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$

1. Montrer que j est une racine double de P
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Déterminer les racines réelles et complexes de $(X + 1)^6 - X^6$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = (X + 1)^7 - X^7 - a$$

Déterminer a pour que P admette une racine réelle multiple.

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

1. Le polynôme $A = X^4 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Le polynôme $B = X^3 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Déterminer les réels a, b et c tels que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ soit factorisable par

$$Q = (X^2 - 1)(X - 3)$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $B = X^2 - X + 1$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit

$$P_n = (X+1)^n - X^n - 1$$

On pose $n \equiv a \quad [6]$ avec $a \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Pour quelles valeurs de n, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est-il racine de P_n ?

On pourra discuter selon les valeurs de a.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1.

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Quel est le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X + 1$ par $Q = (X-1)^2$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par $(X-1)^2$.

Déterminer R.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Quel est le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n + X + b$ par $B = (X-a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $B = X^2 + 1$

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.
2. En déduire que le polynôme $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec a, b, c et d entiers naturels est divisible par $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note α, β et γ ses racines.

1. Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
3. Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.
4. On pose $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$

   Calculer D en fonction de p.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.
2. Soit a une racine de P. Si $a \neq 0$, montrer que $a-1$ est racine. Si $a \neq 1$, montrer que $a+1$ est racine.
3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P.

Indication :

S'il existe une racine a telle que $\mathcal{Re}(a) < 1$ différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine a telle que $\mathcal{Re}(a) > 0$ différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k (X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$.
5. Quel est l'ensemble des polynômes de $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de $X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

On considère le couple de polynôme à coefficients réels

$$P = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 1$$

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le $PGCD(P, Q)$.
2. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Retrouvez le résultat de la question 1.
4. Décomposer P en facteur irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soient $P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$ et $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$

Déterminer le $PGCD$ de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q.

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Déterminer les P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes $P = (X-1)^2$ et $Q = X^2 + 1$.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

1. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes

$$P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1 \quad \text{et} \quad Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$$

2. En déduire les racines communes de P et Q.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

1. Calculer le PGCD de P et P'.
2. Quelles sont les racines communes à P et P' ?
   Quelles sont les racines multiples de P dans $\mathbb{C}$?
3. Montrer que $(X^2 + 1)^2$ divise P.
4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on désigne par $P(X + 1)$ le polynôme obtenu en remplaçant X par $X + 1$ dans P.

1. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(0) = 1$?
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme $P(X + 1) - P(X)$?
3. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré trois qui vérifient :

$$P(X + 1) - P(X) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme P dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit n un entier strictement positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$$

Donnez-en un.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

1. Déterminer le $PGCD$ et une identité de Bézout des polynômes P et Q.

$$P = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$
$$Q = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2$$

2. Factoriser P et Q.

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Soit

$$(X + 1)^2 A + (X - 1)^2 B = 1 \qquad (E)$$

1. Trouver une solution particulière $A_0, B_0 \in \mathbb{R}[X]$ de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).
3. Déterminer tous les polynômes P tels que $P - 1$ soit un multiple de $(X + 1)^2$ et que $P + 1$ soit un multiple de $(X - 1)^2$.

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soient P et Q deux polynômes définis par :

$P(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$

Déterminer le PGCD de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38.

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 2$

On pose $Y = X + \frac{1}{X}$

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q, de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q.
3. En déduire les racines de P, puis la factorisatistion de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : Correction exercice 38

Exercice 39.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\sin(n\theta) \neq 0$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : Correction exercice 39

Exercice 40.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

Allez à : Correction exercice 40

Exercice 41.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)}$$

Allez à : Correction exercice 41

Exercice 42.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

1. Dans $\mathbb{R}(X)$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$

Allez à : Correction exercice 42

Exercice 43.

Soit

$$F = \frac{3}{(X^2 + X + 1)(X-1)^2}$$

Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, dans $\mathbb{C}(X)$.

Allez à : Correction exercice 43

Exercice 44.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F=\frac{X^2}{(X^2+1)^{2010}}$$

Allez à : Correction exercice 44

Exercice 45.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F=\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 45

Exercice 46.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 46

Exercice 47.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$

$$G=\frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$

Allez à : Correction exercice 47

Exercice 48.

1. Soit $F=\frac{P}{Q}$. Si $\alpha\in\mathbb{C}$ est une racine simple de Q, montrer que le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.
2. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction

$$F=\frac{X}{X^n-1}$$

Allez à : Correction exercice 48

Exercice 49.

On considère le polynôme $P=X^5-X^3+X^2-1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. Décomposer la fraction $\frac{X+1}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Allez à : Correction exercice 49

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=-(X^8-2X^4+1)=-(X^4-1)^2=-(X^2-1)^2(X^2+1)^2=-(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2$$

Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=-(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$, $(1 - X^4)$ se décompose facilement en $(1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)$, mais pour décomposer $1 + X^4$, c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = \left(1 + X^2 - \sqrt{2}X\right)\left(1 + X^2 + \sqrt{2}X\right)$$

$1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$ sont deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ il suffit de trouver les racines complexes de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

Le discriminant de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Le discriminant de $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$, ses racines sont $X_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ et $X_4 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de $1 - X^8 = 0$

$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}}$ avec $k \in \{0,1;2,3,4,5,6,7\}$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les conjugués

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)&\left(X^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X^2 - \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}} + e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X \right. \\ &\left. + e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^2)\left(X^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right)\left(X^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^2)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{Q}[X]$ on regroupe les deux derniers polynômes

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^2)\left(X^2 + 1 - \sqrt{2}X\right)\left(X^2 + 1 + \sqrt{2}X\right) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^2)\left((X^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2\right) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(1 + X^2)(X^4 + 1) \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1.

$$1+j=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=-j^2$$

Ou mieux

$$1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=0$$

Car $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$.

2.

$$P(j)=(j+1)^7-j^7-1=(-j^2)^7-j^6j-1=-j^{14}-j-1-j^{12}j^2-j-1=-(j^2+j+1)=0$$
$$P'=7(X+1)^6-7X^6$$
$$P'(j)=7((j+1)^6-j^6)=7((-j^2)^6-1)=7(j^{12}-1)=7(1-1)=0$$

Donc j est au moins racine double.

3. $P(0)=(0+1)^7-0^7-1=1^7-1=0$ et $P(-1)=(-1+1)^7-(-1)^7-1=0-(-1)-1=0$
Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.

4. Le début de la formule du binôme de $(X+1)^7$ est X^7+7X^6 (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\overline{j}=j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d^\circ P=6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P=7X(X+1)(X-j)^2\left(X-\overline{j}\right)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X-j)\left(X-\overline{j}\right)=(X-j)(X-j^2)=X^2-(j+j^2)X+j^3=X^2+X+1$$

Donc

$$P=7X(X+1)\left((X-j)\left(X-\overline{j}\right)\right)^2=7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

$$P(X)=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5=0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-X^6}{1-X}=0\\ X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-X^6=0\\ X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^6=1\\ X\neq 1\end{cases}$$

Or $X^6=1\Leftrightarrow X_k=e^{\frac{2ik\pi}{6}}=e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k\in\{0,1;2,3,4,5\}$

Ce qui donne $X_0=1$, $X_1=e^{\frac{i\pi}{3}}=-\overline{j}=-j^2$, $X_2=e^{\frac{2i\pi}{3}}=j$, $X_3=e^{i\pi}=-1$, $X_4=e^{\frac{4i\pi}{3}}=j^2$, $X_5=e^{\frac{5i\pi}{3}}=-j$

Les 5 racines de P sont $X_1=-j^2$, $X_2=j$, $X_3=-1$, $X_4=j^2$ et $X_5=-j$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X)=1\times(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)=(X+j^2)(X-j)(X+1)(X-j^2)(X+j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned}P(X)&=(X+1)(X-j)(X-j^2)(X+j^2)(X+j)=(X+1)(X^2-(j+j^2)X+j^3)(X^2+(j+j^2)X+j^3)\\&=(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1.

$$P=1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7=\frac{1-X^8}{1-X}$$

Pour $X\neq 1$

Les racines de P vérifient $\begin{cases} X^8 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, & k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{ik\pi}{4}}, \ k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ et $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

$$\left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1$$

$$\begin{aligned} P &= (X+1)(X-i)(X+i)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\ &= (X+1)(X^2+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= (X+1)(X^2+1)\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P &= (X+1)(X^2+1)\left(X^2 + 1 - \sqrt{2}X\right)\left(X^2 + 1 + \sqrt{2}X\right) = (X+1)(X^2+1)\left((X^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2\right) \\ &= (X+1)(X^2+1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2) = (X+1)(X^2+1)(X^4+1) \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

$$P(X) = 1 + \left(\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^3 + \left(\frac{X}{2}\right)^4 + \left(\frac{X}{2}\right)^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6}{1 - \frac{X}{2}} = 0 \\ \dfrac{X}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 0 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

Or $\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ donc $X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$

Ce qui donne $X_0 = 2$, $X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2\bar{j} = -2j^2$, $X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j$, $X_3 = 2e^{i\pi} = -2$, $X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2$, $X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$

Les 5 racines de P sont $X_1 = -2j^2$, $X_2 = 2j$, $X_3 = -2$, $X_4 = 2j^2$ et $X_5 = -2j$. On a enlevé $X = 2$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32} \times (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \\ &= (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \end{aligned}$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32}(X+2)(X-2j)(X-2j^2)(X+2j^2)(X+2j) \\ &= \frac{1}{32}(X+2)(X^2 - 2(j+j^2)X + 4j^3)(X^2 + 2(j+j^2)X + 4j^3) \\ &= \frac{1}{32}(X+1)(X^2 + 2X + 4)(X^2 - 2X + 4) \end{aligned}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$P=1+(-X)+(-X)^2+(-X)^3+(-X)^4=\frac{1-(-X)^5}{1-(-X)}=\frac{1+X^5}{1+X}$$

Pour $X\neq -1$

Les racines vérifient

$$\begin{cases}X^5=-1\\ X\neq 1\end{cases}=0\Leftrightarrow\begin{cases}|X^5|=|-1|\\ \arg(X^5)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\\ X\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=1\\ 5\arg(X)=(2k+1)\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\\ X\neq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=1\\ \arg(X)=\dfrac{2k+1}{5}\pi,\ \ k\in\{0,1,2,3,4\}\\ X\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=e^{\frac{2k+1}{5}i\pi},\qquad k\in\{0,1,2,3,4\}\\ X\neq -1\end{cases}$$

$$X_0=e^{\frac{i\pi}{5}};X_1=e^{\frac{3i\pi}{5}};X_2=e^{\frac{5i\pi}{5}}=-1;X_3=e^{\frac{7i\pi}{5}}=e^{\frac{-3i\pi}{5}};X_4=e^{\frac{-i\pi}{5}}$$

On élimine $X_3=-1$

2. Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=\left(X-e^{\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=\left(X^2-2X\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right)\left(X^2-2X\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+1\right)$$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. $P=X^2(-X+1)+(-X+1)=-(X-1)(X^2+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

   $P=-(X-1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

2. Si $X\neq -1$.

$$P=\sum_{k=0}^{2n-1}(-X)^k=\frac{1-(-X)^{(n+1)}}{1-(-X)}=\frac{1-(-X)^{n+1}}{1+X}$$

Les racines de P vérifie $X^{(n+1)}=1$ et $X\neq -1$.

$$P(X)=0\Leftrightarrow\begin{cases}(-X)^{n+1}=1\\ X\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-X=e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\ X\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}\\ X\neq -1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X=-e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{1,\dots,n\}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1.

$$P(j)=j^6+2j^5+4j^4+4j^3+4j^2+2j+1=1+2j^2+4j+4+4j^2+2j+1=6j^2+6j+6$$
$$=6(j^2+j+1)=0$$

$$P'=6X^5+10X^4+16X^3+12X^2+8X+2$$

$$P'(j)=6j^5+10j^4+16j^3+12j^2+8j+2=6j^2+10j+16+12j^2+8j+2=18j^2+18j+18$$
$$=18(j^2+j+1)=0$$

Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi racine double.

On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que i est racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser P par

$$(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2=\left((X-j)\left(X-\bar{j}\right)\right)^2=(X^2+X+1)^2=X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X$$
$$=X^4+2X^3+3X^2+2X+1$$

$$\begin{array}{r|l}
X^6+2X^5+4X^4+4X^3+4X^2+2X+1 & X^4+2X^3+3X^2+2X+1 \\ \cline{2-2}
X^6+2X^5+3X^4+2X^3+X^2 & X^2+1 \\ \cline{1-1}
X^4+2X^3+3X^2+2X+1 & \\
X^4+2X^3+3X^2+2X+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$P=(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2(X-i)(X+i)$$

3.

$$P=(X^2+X+1)^2(X^2+1)$$

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

$$P(j)=j^8+2X^6+3j^4+2j^2+1=j^2+2+3j+2j^2+1=3j^2+3j+3=3(j^2+j+1)=0$$

j est une racine de P

$$P'=8X^7+12X^5+12X^3+4X$$
$$P'(j)=8j^7+12j^5+12j^3+4j=8j+12j^2+12+4j=12j^2+12j+12=12(j^2+j+1)=0$$

j est racine au moins double, j est donc une racine multiple.

2. Comme P est pair, $-j$ est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc $\bar{j}=j^2$ est racine double et $\overline{-j}=-j^2$ est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P=(X-j)^2(X-j^2)^2(X+j)^2(X+j^2)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P=[(X-j)(X-j^2)]^2[(X+j)(X+j^2)]^2=[X^2+X+1]^2[X^2-X+1]^2$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$P(j)=2j^3+3j^2+6j+1+3j=2+3j^2+6j+1-3j=3j^2+3j+3=3(j^2+j+1)=0$$
$$P'=6X^2+6X+6$$
$$P'(j)=6j^2+6j+6=6(j^2+j+1)=0$$

Donc j est une racine double de P.

2. La somme des racines de P est $-\frac{3}{2}$, si on appelle α la troisième racine on a

$$\alpha+2j=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{3}{2}-2j=-\frac{3}{2}-2\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}$$

Donc

$$P=2(X-j)^2\left(X+\frac{1}{2}-i\sqrt{3}\right)$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1.

$$(X+1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X}\right)^6 = 1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention $(X+1)^6 - X^6$ est un polynôme de degré 5

$$(X+1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X}\right)^6 = 1$$

$$\frac{X+1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié $\frac{X+1}{X} = 1$ qui n'a pas de solution, on enlève donc $k = 0$.

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1,2,3,4,5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, k \in \{1,2,3,4,5\}$$

Les cinq racines sont

$$X_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que P admette une racine multiple réelle (donc au moins double), P et P' ont une racine réelle commune.

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

Les racines réelles et complexes de P' vérifient $(X+1)^6 - X^6 = 0$

On cherche les racines réelles donc $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ ce qui équivaut à $k = 0$ (mais on a éliminé ce cas) et $k = 3$

$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2\cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

P ademt une racine double si et seulement si $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}+1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$

Et alors

$$P = (X+1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
2. Les limites de la fonction polynômiale définie par $B(x) = x^3 + 3x + 1$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ et en $+\infty$ vaut $+\infty$, cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraine qu'il existe x_0 tel que $B(x_0) = 0$. B admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ est factorisable par $Q = (X^2-1)(X-3)$ si et seulement si -1, 1 et 3 sont racines de P.

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2\times(-1)^4 - 6\times(-1)^3 + a\times(-1)^2 + b\times(-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2\times 1^4 - 6\times 1^3 + a\times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2\times 3^4 - 6\times 3^3 + a\times 3^2 + b\times 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3 - 2 - 2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases}$$

$L_2 - L_1$ entraine que $2b = 10$ donc $b = 5$

Et $L_2 + L_1$ entraine que $2a + 2c = 4$ donc $a + c = 2 : L_1'$

On remplace $b = 5$ dans L_3 : $9a + 15 + c = 81$ donc $9a + c = 66 : L_2'$

$L_2' - L_1'$ entraine que $8a = 64$ donc $a = 8$ et donc $c = 2 - 8 = -6$

Finalement $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

A_n est divisible par B si et seulement si les racines de B sont aussi des racines de A_n.

Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc les deux racines de B sont :

$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$

Remarque : $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$

Donc les racines du polynôme B vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j - 1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n}(-j) = j^{2n} j^4 - j^{2n} j = 0$$

Comme A_n est un polynôme à coefficients réels, $-\bar{j} = -j^2$ est aussi racine.

On conclut que $X^2 - X + 1$ divisise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

$$P_n(j) = (j + 1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$$

Si $n = 6p$

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 1$

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

Si $n = 6p + 2$

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

Si $n = 6p + 3$

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

Si $n = 6p + 4$

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 5$

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

Il existe $A, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n + X + 1 = A(X - 1)^2 + R \quad (*)$$

Avec $d°R < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$, ce qui entraine que $R' = a$

Prenons $X = 1$

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive $(*)$

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X-1)^2 + A(X-1) + R'$$

On prend $X = 1$

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n+1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n+1)X + 2 - n$$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

$$(X+1)^n = (X^2+1)Q + R$$

Or $d°R < 2$ et donc $R = aX + b$.
On pose $X = i$.

$$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

$$= b + ai \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes, avec $d°R < 2$ tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + R$$

Il existe a et b réels tels que $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

On pose $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive $(*)$

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$$

On pose $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc $b = 2^n - n2^{n-1}$
Finalement

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

Il existe Q_n et R_n tels que :

$$A_n = BQ_n + R_n \Leftrightarrow X^n + X + b = (X-a)^2 Q_n + R_n$$

Avec $d°R_n < 2$. Donc il existe α_n et β_n tels que :

$$X^n + X + b = (X-a)^2 Q_n + \alpha_n X + \beta_n \quad (1)$$

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1}+1=(X-a)[2Q_n+(X-a)^2Q_n']+\alpha_n \quad (2)$$

On fait $X=a$ dans (1) et dans (2).

$$\begin{cases} a^n+a+b=\alpha_n a+\beta_n \\ na^{n-1}+1=\alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n=na^n+1 \\ \beta_n=a^n+a+b-(na^{n-1}+1)a=-(n-1)a^n+b \end{cases}$$

Donc

$$R_n=(na^n+1)X-(n-1)a^n+b$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

Il existe Q et R tels que $A=BQ+R$ et $d°R<d°B=2$ donc degré de R est inférieur ou égal à 1 on a alors $R=aX+b$ où a et b sont des réels.

$A(i)=B(i)Q(i)+R(i)\Leftrightarrow i^{2n}+2i^n+1=ai+b$ car $B(i)=i^2+1=0$

Si $n=2p$ $i^{2n}+2i^n+1=ai+b\Leftrightarrow i^{4p}+2i^{2p}+1=ai+b\Leftrightarrow 1+2(-1)^p+1=ai+b\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=2+2(-1)^p \end{cases}$$

Donc $R=2+2(-1)^p$

Si $n=2p+1$

$$i^{2n}+2i^n+1=ai+b\Leftrightarrow i^{4p+2}+2i^{2p+1}+1=ai+b\Leftrightarrow -1+2(-1)^p i+1=ai+b$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2(-1)^p \\ b=0 \end{cases}$$

Donc $R=2(-1)^pX$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Les quatre racines de $X^4-1=0$, c'est-à-dire $\{1,i,-1,-i\}$ vérifie $X^4=1$ donc $(X^4)^n-1=1^n-1=0$ donc ces racines sont des racines de $X^{4n}-1$, on peut mettre X^4-1 en facteur dans ce polynôme.
2.

Première méthode :

D'après la première question il existe Q_a, Q_b, Q_c et Q_d tels que :

$$X^{4a}-1=Q_a(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4a}=Q_a(X^4-1)+1$$
$$X^{4b}-1=Q_b(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4b}=Q_b(X^4-1)+1$$
$$X^{4c}-1=Q_c(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4c}=Q_c(X^4-1)+1$$
$$X^{4d}-1=Q_d(X^4-1)\Leftrightarrow X^{4d}=Q_d(X^4-1)+1$$

Donc

$$\begin{aligned} P&=X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d}\\ &=(Q_a(X^4-1)+1)X^3+(Q_b(X^4-1)+1)X^2+(Q_c(X^4-1)+1)X+Q_d(X^4-1)\\ &+1=(X^4-1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1\\ &=(X-1)(X^3+X^2+X+1)[Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d]+X^3+X^2+X+1\\ &=(X^3+X^2+X+1)((X-1)(Q_aX^3+Q_bX^2+Q_cX+Q_d)+1)\end{aligned}$$

Deuxième méthode : $X^{4n}-1\equiv 0\ [X^4-1]\Leftrightarrow X^{4n}\equiv 1\ [X^4-1]$

Donc

$$\begin{aligned} X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=X^{4a}X^3+X^{4b}X^2+X^{4c}X+X^{4d}\\ &\equiv 1\times X^3+1\times X^2+1\times X+1\ [X^4-1]\equiv X^3+X^2+X+1\ [X^4-1]\end{aligned}$$

Donc il existe Q tel que

$$\begin{aligned} X^{4a+3}+X^{4b+2}+X^{4c+1}+X^{4d}&=(X^4-1)Q+X^3+X^2+X+1\\ &=(X^3+X^2+X+1)((X-1)Q+1)\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

1. On rappelle que $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p$ et $\alpha\beta\gamma=-q$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$
Donc
$$A=0^2-2p=-2p$$
2. $\alpha^3+p\alpha+q=0$ entraine que $\alpha^3=-p\alpha-q$, idem pour β et γ.
$$B=-p\alpha-q-p\beta-q-p\gamma-q=-p(\alpha+\beta+\gamma)-3q=-3q$$
3.
$$C=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)=\alpha\beta(-\gamma)+\alpha\gamma(-\beta)+\beta\gamma(-\alpha)=-3\alpha\beta\gamma=3q$$
4.
$$\begin{aligned}D=\alpha^3\beta+\alpha\beta^3+\alpha^3\gamma+\alpha\gamma^3+\beta^3\gamma+\beta\gamma^3&=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\gamma(\alpha^2+\gamma^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)\\&=\alpha\beta(-2p-\gamma^2)+\alpha\gamma(-2p-\beta^2)+\beta\gamma(-2p-\alpha^2)\\&=-2p(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma^2-\alpha\beta^2\gamma-\alpha^2\beta\gamma=-2p^2-\alpha\beta\gamma(\gamma+\beta+\alpha)\\&=-2p^2-(q)\times 0=-2p^2\end{aligned}$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1. $0\times P(-1)=(0-2)P(0)\Leftrightarrow 0=-2P(0)\Leftrightarrow P(0)=0$
$1\times P(0)=(1-2)P(1)\Leftrightarrow P(0)=-P(1)\Leftrightarrow 0=P(1)$
Donc 0 et 1 sont des racines de P.
2. Soit $a\neq 0$ tel que $P(a)=0$. $aP(a-1)=(a-2)P(a)\Leftrightarrow aP(a-1)=0\Leftrightarrow P(a-1)=0$
$a-1$ est une racine de P.
Soit $a\neq 1$ tel que $P(a)=0$.
$$(a+1)P(a+1-1)=(a+1-2)P(a+1)\Leftrightarrow (a+1)P(a)=(a-1)P(a+1)\Leftrightarrow 0=(a-1)P(a+1)$$
Donc $P(a+1)=0$, $a+1$ est une racine de P.
3. Supposons que P admette une racine a telle que $\mathcal{R}e(a)<1$ différente de 0 alors $a-1$ est racine, $a-1$ est différent de 0, donc $a-2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a-k$ est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
Supposons que P admette une racine a telle que $\mathcal{R}e(a)>1$ différente de 1 alors $a+1$ est racine, $a+1$ est différent de 1, donc $a+2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a+k$ est racine de P, ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.
0 et 1 sont les deux seules racines de P si P n'est pas le polynôme nul.
4. Si P n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de P il existe $\alpha\neq 0$ tels que $P=\alpha X^k(X-1)^l$, et si $P=0$ alors $P=0\times X^k(X-1)^l$ (c'est-à-dire que $\alpha=0$).
5. Si P vérifie $XP(X-1)=(X-2)P(X)$ alors P est de la forme $P=\alpha X^k(X-1)^l$, il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.
On remplace $P=\alpha X^k(X-1)^l$ dans $XP(X-1)=(X-2)P(X)$, on trouve que :
$$X\alpha(X-1)^k(X-2)^l=(X-2)\alpha X^k(X-1)^l$$
Les puissances en $X-2$ sont les mêmes donc $l=1$.
Les puissances en $X-1$ sont les mêmes donc $k=l=1$
On vérifie qu'alors les puissances en X sont les mêmes, finalement
$$P=\alpha X(X-1)$$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

$$\begin{array}{r|l} 1-2X+X^3+X^4 & 1+X+X^2 \\ \cline{2-2} 1+X+X^2 & 1-3X+2X^2 \\ \cline{1-1} -3X-X^2+X^3+X^4 & \\ -3X-3X^2-3X^3 & \\ \cline{1-1} 2X^2+4X^3+X^4 & \\ 2X^2+2X^3+2X^4 & \\ \cline{1-1} 2X^3-X^4 & \end{array}$$

$$1-2X+X^3+X^4=(1+X+X^2)(1-3X+X^2)+X^3(2-X)$$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^3-X^2-X-2 & X^3-1 \\ \cline{2-2} X^3-1 & 1 \\ \cline{1-1} -X^2-X-1 & \end{array}$$

$$X^3-X^2-X-2=(X^3-1)\times 1+(-X^2-X-1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^3-1 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} X^3+X^2+X & X-1 \\ \cline{1-1} -X^2-X-1 & \\ -X^2-X-1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$X^3-1=(X^2+X+1)(X-1)$$

$$PGCD(P,Q)=\frac{-X^2-X-1}{-1}=X^2+X+1$$

2. X^2+X+1 est un diviseur de P (et de Q bien sur) donc on peut mettre X^2+X+1 en facteur dans P.

$$\begin{array}{r|l} X^3-X^2-X-2 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} X^3+X^2+X & X-2 \\ \cline{1-1} -2X^2-2X-2 & \\ -2X^2-2X-2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Comme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation de P est :

$$P=(X-2)(X^2+X+1)$$

Et il est évident d'après la deuxième division de l'algorithme d'Euclidienne

$$Q=(X-1)(X^2+X+1)$$

3. Il est alors clair que

$$PGCD(P,Q)=X^2+X+1$$

4. Les deux racines complexes de X^2+X+1 sont $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}=j^2=e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Donc

$$P=(X-2)(X-j)(X-j^2)$$

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

$$\begin{array}{r|l} X^5+X^4-6X^3-X^2-X+6 & X^4+2X^3-X-2 \\ \cline{2-2} X^5+2X^4\quad -X^2-2X & X-1 \\ \hline -X^4-6X^3\quad +X+6 & \\ -X^4-2X^3\quad +X+2 & \\ \hline -4X^3\quad +4 & \end{array}$$

On peut « éliminer » le -4 dans $-4X^3+4$

$$\begin{array}{r|l} X^4+2X^3\quad -X-2 & X^3-1 \\ \cline{2-2} X^4\quad -X & X+2 \\ \hline 2X^3\quad -2 & \\ 2X^3\quad -2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc le $PGCD$ de P et Q est

$$D=\frac{-4X^3+4}{-4}=X^3-1$$

Les racines communes de P et Q sont celles de X^3-1, c'est-à-dire $1, j$ et j^2.

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

$$\begin{array}{r|l} X^5+2X^4+2X^3\quad -X^2-2X-2 & X^4+3X^3+3X^2-2 \\ \cline{2-2} X^5+3X^4+3X^3\quad -2X & X-1 \\ \hline -X^4-X^3-X^2\quad -2 & \\ -X^4-3X^3-3X^2\quad +2 & \\ \hline 2X^3+2X^2\quad -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4+3X^3+3X^2\quad -2 & 2X^3+2X^2-4 \\ \cline{2-2} X^4+X^3\quad -2X & \frac{1}{2}X+1 \\ \hline 2X^3+3X^2+2X-2 & \\ 2X^3+2X^2\quad -4 & \\ \hline X^2+2X+2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+2X^2\quad -4 & X^2+2X+2 \\ \cline{2-2} 2X^3+4X^2+4X & 2X \\ \hline -2X^2-4X-4 & \\ -2X^2-4X-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul unitaire donc X^2+2X+2

A et B sont divisible par X^2+2X+2 (qui n'a pas de racine réelle)

$$\begin{array}{r|l} X^5+2X^4+2X^3\quad -X^2-2X-2 & X^2+2X+2 \\ \cline{2-2} X^5+2X^4+2X^3 & X^3-1 \\ \hline -X^2-2X-2 & \\ -X^2-2X-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc

$$A=(X^2+2X+2)(X^3-1)$$

Comme $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et que X^2+X+1 n'a pas de racine réelle, la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$A=(X-1)(X^2+2X+2)(X^2+X+1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4+3X^3+3X^2 \qquad -2 & X^2+2X+2 \\ \cline{2-2} X^4+2X^3+2X^2 \qquad & X^2+X-1 \\ \hline X^3+X^2 \qquad -2 & \\ X^3+2X^2+2X & \\ \hline -X^2-2X-2 & \\ -X^2-2X-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc

$$B=(X^2+2X+2)(X^2+X-1)$$

X^2+X-1 admet deux racines réelles

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$B=(X^2+2X+2)\left(X+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$P=X^2-2X+1$$

$$\begin{array}{r|l} X^2-2X+1 & X^2+1 \\ \cline{2-2} X^2 \qquad +1 & 1 \\ \hline -2X & \end{array}$$

$$X^2-2X+1=1\times(X^2+1)+(-2X)$$

$$\begin{array}{r|l} X^2+1 & -2X \\ \cline{2-2} X^2 \qquad & -\frac{1}{2}X \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$X^2+1=-2X\times\left(-\frac{1}{2}X\right)+1$$

$$1=(X^2+1)+(-2X)\left(-\frac{1}{2}X\right)=(X^2+1)+\left((X^2-2X+1)-1\times(X^2+1)\right)\left(-\frac{1}{2}X\right)$$

$$\Leftrightarrow 1=\left(1+\frac{1}{2}X\right)(X^2+1)+\left(-\frac{1}{2}X\right)(X-1)^2$$

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

$$\begin{array}{r|l} 2X^4+X^3 \qquad -2X\ -1 & 2X^4-X^3-3X^2+X+1 \\ \cline{2-2} 2X^4-X^3-3X^2+X\ +1 & 1 \\ \hline 2X^3+3X^2-3X-2 & \end{array}$$

$$P=1\times Q+2X^3+3X^2-3X-2$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^4-X^3\ -3X^2\ +X+1 & 2X^3+3X^2-3X-2 \\ \cline{2-2} 2X^4+3X^3-3X^2-2X & X-2 \\ \hline -4X^3 \qquad +3X+1 & \\ -4X^3-6X^2+6X+4 & \\ \hline 6X^2-3X-3 & \end{array}$$

$$Q=(X-2)(2X^3+3X^2-3X-2)+6X^2-3X-3$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+3X^2-3X-2 & 6X^2-3X-3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 \quad - X^2 \quad - X & \frac{1}{3}X+\frac{2}{3} \\ \hline 4X^2-2X-2 & \\ 4X^2-2X-0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$6X^2-3X-3=Q-(X-2)(2X^3+3X^2-3X-2)=Q-(X-2)(P-Q)$$
$$=-(X-2)P+(X-1)Q$$
$$X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}(X-2)P+\frac{1}{6}(X-1)Q$$

2. Les racines communes de P et Q sont celles de leur $PGCD$, c'est-à-dire celles de $X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}$ soit $X_1=1$ et $X_2=-\frac{1}{2}$.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1. $P'=5X^4+4X^3+6X^2+4X+1$

$$\begin{array}{r|l} X^5+X^4 \quad +2X^3 \quad +2X^2+X+1 & 5X^4+4X^3+6X^2+4X+1 \\ X^5+\frac{4}{5}X^4+\frac{6}{5}X^3 \quad +\frac{4}{5}X^2+\frac{X}{5} \quad & \frac{1}{5}X+\frac{1}{25} \\ \hline \frac{1}{5}X^4+\frac{4}{5}X^3 \quad +\frac{6}{5}X^2+\frac{4}{5}X+1 & \\ \frac{1}{5}X^4+\frac{4}{25}X^3+\frac{6}{25}X^2+\frac{4}{25}X+\frac{1}{25} & \\ \hline \frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25} & \end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{16}{25}X^3+\frac{24}{25}X^2+\frac{16}{25}X+\frac{24}{25}=\frac{8}{25}(2X^3+3X^2+2X+3)$

$$\begin{array}{r|l} 5X^4+4X^3 \quad +6X^2 \quad +4X+1 & 2X^3+3X^2+2X+3 \\ 5X^4+\frac{15}{2}X^3+5X^2 \quad +\frac{15}{2}X \quad & \frac{5}{2}X-\frac{7}{4} \\ \hline -\frac{7}{2}X^3+X^2 \quad -\frac{7}{2}X+1 & \\ -\frac{7}{2}X^3-\frac{21}{4}X^2-\frac{7}{2}X-\frac{21}{4} & \\ \hline \frac{25}{4}X^2 \qquad +\frac{25}{4} & \end{array}$$

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{25}{4}X^2+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}(X^2+1)$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3+3X^2+2X+3 & X^2+1 \\ \hline 2X^3 \qquad +2X \quad & 2X+3 \\ \hline 3X^2 \qquad +3 & \\ 3X^2 \qquad +3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le PGCD de P et P' est X^2+1.

2. Les racines communes à P et P' sont i et $-i$, les racines multiples de P sont i et $-i$. Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon P auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.
3. P est divisible par $(X-i)^2(X+i)^2=[(X-i)(X+i)]^2=[X^2+1]^2$.
4. il reste à diviser P par $(X^2+1)^2=X^4+2X^2+1$ et on trouve, après calculs, $X+1$, donc
$$P=(X^2+1)^2(X+1)$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. Oui ! Par exemple $P = X^3 + 1$
2. Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a \neq 0$, pour qu'il soit de degré exactement 3.

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= 3aX^2 + (3a + 2b)X + a + b + c \end{aligned}$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque $a \neq 0$

3.

$$\begin{cases} P(X+1) - P(X) = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a + b + c = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ 2b = -3a = -1 \\ c = -1 - a - b \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{6} \\ d = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{6}X + 1$$

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. $(X-1)^n$ n'a qu'une racine $X = 1$, or 1 est racine simple de $X^n - 1$ donc
$$PGCD\big((X^n - 1), (X-1)^n\big) = X - 1$$
2. D'après le théorème de Bézout il existe (U, V) tels que :
$$(X^3 - 1)U + (X-1)^3 V = X - 1$$
Cette équation équivaut à :
$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1) = 1$$
Car $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$ et $(X-1)^3 = (X-1)(X^2 - 2X + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2} X^2 + X \;\; + 1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + X + 1) + (-3X)$$

$$\begin{array}{l|l} X^2 + X + 1 & \quad -3X \\ \cline{2-2} X^2 & -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \\ \hline X + 1 & \\ X & \\ \hline \quad 1 & \end{array}$$

Donc

$$X^2 + X + 1 = (-3X)\left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right) + 1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned}1 &= (X^2+X+1)-(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\ &= X^2+X+1-\left((X^2-2X+1)-1\times(X^2+X+1)\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\ &= -\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(1+\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right)(X^2+X+1)\\ &= \left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)(X^2+X+1)\end{aligned}$$

Donc

$$U=-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}$$

Et

$$V=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}$$

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1.

$$\begin{array}{l|l} X^4-3X^3+3X^2-3X+2 & X^4+3X^3+3X^2+3X+2 \\ \cline{2-2} X^4+3X^3+3X^2+3X+2 & 1 \\ \cline{1-1} -6X^3 \qquad\quad -6X & \end{array}$$

$$X^4-3X^3+2X^2-3X+2=(X^4+3X^3+2X^2+3X+2\,)\times 1+(-6X^3-6)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4+3X^3+3X^2+3X+2 & -6X^3-6X \\ \cline{2-2} X^4 \qquad\quad +\ \ X^2 \qquad\qquad & -\frac{1}{6}X-\frac{1}{2} \\ \hline 3X^3+2X^2+3X+2 & \\ 3X^3 \qquad\quad +3X \quad\ & \\ \hline 2X^2 \qquad\quad +2 & \end{array}$$

$$X^4+3X^3+3X^2+3X+2=(-6X^3-6X)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)+2X^2+2$$

$$\begin{array}{r|l} -6X^3-6X & 2X^2+2 \\ \cline{2-2} -6X^3-6X & -\frac{1}{3}X \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$-6X^3-6X=(2X^2+2)\left(-\frac{1}{3}X\right)$$

Donc

$$PGCD(X^4-3X^3+3X^2-3X+2,X^4+3X^3+3X^2+3X+2)=\frac{2X^2+2}{2}=X^2+1$$

On trouve une identité de Bézout de la façon suivante :

$$2X^2+2=X^4+3X^3+3X^2+3X+2+(-6X^3-6X)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)$$
$$=X^4+3X^3+3X^2+3X+2$$
$$-(X^4-3X^3+2X^2-3X+2-(X^4+3X^3+2X^2+3X+2)\times 1)\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)$$
$$=(X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(1-\left(-\frac{1}{6}X-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$+(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}\right)$$
$$=(X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{3}{2}\right)$$
$$+(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}\right)$$

Puis il reste à diviser par 2

$$X^2+1=(X^4+3X^3+3X^2+3X+2)\left(\frac{1}{12}X+\frac{3}{4}\right)+(X^4-3X^3+2X^2-3X+2)\left(\frac{1}{12}X+\frac{1}{4}\right)$$

2. En divisant P par X^2+1, on trouve :

$$P=X^4-3X^3+3X^2-3X+2=(X^2-3X+2)(X^2+1)$$

Il reste à factoriser X^2-3X+2, ce polynôme a deux racines réelles 1 et 2 donc

$$P=(X-1)(X-2)(X^2+1)$$

En divisant Q par X^2+1, on trouve :

$$Q=X^4+3X^3+3X^2+3X+2=(X^2+3X+2)(X^2+1)$$

Il reste à factoriser X^2+3X+2, ce polynôme a deux racines réelles -1 et -2 donc

$$Q=(X+1)(X+2)(X^2+1)$$

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

1. Je vais juste écrire les résultats des divisions successives de l'algorithme d'Euclide

$$X^2+2X+1=1\times(X^2-2X+1)+4X$$
$$X^2-2X+1=\left(\frac{1}{4}X-\frac{1}{2}\right)\times 4X+1$$

On en déduit une identité de Bézout

$$1=(X-1)^2-\left(\frac{1}{4}X-\frac{1}{2}\right)\times 4X=(X-1)^2-\left(\frac{1}{4}X-\frac{1}{2}\right)((X+1)^2-1\times(X-1)^2)$$
$$=\left(-\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\right)(X+1)^2+\left(\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\right)(X-1)^2$$

On note

$$A_0=-\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad B_0=\frac{1}{4}X+\frac{1}{2}$$

2. On a

$$\begin{cases}(X+1)^2A+(X-1)^2B=1\\(X+1)^2A_0+(X-1)^2B_0=1\end{cases}$$

En faisant la soustraction de ces deux équations

$$(X+1)^2(A-A_0)+(X-1)^2(B-B_0)=0\Leftrightarrow(X+1)^2(A-A_0)=-(X-1)^2(B-B_0)$$

$(X+1)^2$ divise $-(X-1)^2(B-B_0)$ comme $(X+1)^2$ et $(X-1)^2$ sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine en commun), d'après le théorème de Gauss $(X+1)^2$ divise $-(B-B_0)$, il existe $U\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$-(B-B_0)=U(X+1)^2\Leftrightarrow B=B_0-U(X+1)^2$$

On remplace dans $(X+1)^2(A-A_0)=-(X-1)^2(B-B_0)$

$$(X+1)^2(A-A_0)=(X-1)^2U(X+1)^2\Leftrightarrow A-A_0=(X-1)^2U\Leftrightarrow A=A_0+U(X-1)^2$$

L’ensemble des couples $(A = A_0 + U(X-1)^2, B_0 - U(X+1)^2)$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$ quelconque sont les solutions de (E).

3. On cherche les polynômes P qui sont de la forme

$$\begin{cases} P - 1 = (X+1)^2 Q_1 \\ P + 1 = (X-1)^2 Q_2 \end{cases}$$

Où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes.
En faisant la soustraction de ces deux égalités

$$2 = (X-1)^2 Q_2 - (X+1)^2 Q_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}Q_1\right)(X+1)^2 + \left(\frac{1}{2}Q_2\right)(X-1)^2 = 1$$

D’après la deuxième question, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}Q_1 = A_0 + U(X-1)^2 \\ \frac{1}{2}Q_2 = B_0 - U(X+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = -2A_0 - 2U(X-1)^2 \\ Q_2 = 2B_0 - 2U(X+1)^2 \end{cases}$$

Ce qui entraine que

$$P - 1 = (X+1)^2(-2A_0 - 2U(X-1)^2) \Leftrightarrow P = 1 - 2A_0(X+1)^2 - 2U(X+1)^2(X-1)^2$$

$$1 - 2A_0(X+1) = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X+1) = 1 + \left(\frac{1}{2}X - 1\right)(X^2 + 2X + 1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}X^3 + X^2 + \frac{1}{2}X - X^2 - 2X - 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X$$

On pose aussi $V = -2U$. Par conséquent

$$P = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + V(X^2-1)^2, \quad V \in \mathbb{R}[X]$$

Il faut faire une réciproque
$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1$ admet -1 comme racine double (c’est facile à vérifier) et 2 comme racine simple.

$$P - 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1 + V(X^2-1)^2 = \frac{1}{2}(X+1)^2(X-2) + V(X+1)^2(X-1)^2$$

$$= (X+1)^2\left[\frac{1}{2}(X-2) + V(X-1)^2\right]$$

$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1$ admet 1 comme racine double (c’est facile à vérifier) et -2 comme racine simple.

$$P + 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1 + V(X^2-1)^2 = \frac{1}{2}(X-1)^2(X+2) + V(X+1)^2(X-1)^2$$

$$= (X-1)^2\left[\frac{1}{2}(X+2) + V(X+1)^2\right]$$

La réciproque est vérifiée
Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & & -X^4 & & -X^2 & & +1 & X^4 + 2X^3 - 2X - 1 \\ \cline{8-8}
X^6 & +2X^5 & & -2X^3 & -X^2 & & & X^2 - 2X + 3 \\ \cline{1-7}
 & -2X^5 & -X^4 & +2X^3 & & & +1 & \\
 & -2X^5 & -4X^4 & & +4X^2 & +2X & & \\ \cline{1-7}
 & & 3X^4 & +2X^3 & -4X^2 & -2X & +1 & \\
 & & 3X^4 & +6X^3 & & -6X & -3 & \\ \cline{1-7}
 & & & -4X^3 & -4X^2 & +4X & +4 &
\end{array}$$

$$PGCD(P,Q) = PGCD(Q, -4X^3 - 4X^2 + 4X + 4) = PGCD(Q, X^3 + X^2 - X - 1)$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^4 & +2X^3 & -2X & -1 & X^3 + X^2 - X - 1 \\ \cline{5-5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4+X^3-X^2-X & X+1 \\ \hline X^3+X^2-X-1 & \\ X^3+X^2-X-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $PGCD(P,Q)=X^3+X^2-X-1=X^2(X+1)-(X+1)=(X^2-1)(X+1)=(X-1)(X+1)^2$
Les racines complexes communes à P et Q sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2.
Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

On pose $d°P=n$.

P' divise P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P=QP'$$

$$d°P=n \text{ et } d°P'=n-1 \Rightarrow d°Q=1$$

Donc Q admet une racine complexe α.

On pose $Q=aX+b$ et $P=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0$ (avec $a_n\neq 0$) alors $P'=na_nX^{n-1}+\dots+a_1$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n=na\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{n}$$

Première méthode :

La formule de Taylor pour le polynôme P en α donne

$$P=\sum_{k=0}^{n}a_k(X-\alpha)^k=a_0+a_1(X-\alpha)+a_2(X-\alpha)^2+\dots+a_n(X-\alpha)^n$$

Donc

$$P'=\sum_{k=0}^{n}a_kk(X-\alpha)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}a_kk(X-\alpha)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}a_kk(X-\alpha)^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}(X-\alpha)^k$$
$$=a_1+2a_2(X-\alpha)+\dots+na_n(X-\alpha)^{n-1}$$

En changeant k en $k+1$.

Comme Q est un polynôme de degré 1 dont α est une racine donc $Q=\frac{1}{n}(X-\alpha)$

On remplace ces deux expressions dans $P=QP'$.

$$a_0+a_1(X-\alpha)+a_2(X-\alpha)^2+\dots+a_n(X-\alpha)^n$$
$$=a(X-\alpha)[a_1+2a_2(X-\alpha)+\dots+na_n(X-\alpha)^{n-1}]$$
$$\Leftrightarrow a_0+a_1(X-\alpha)+a_2(X-\alpha)^2+\dots+a_k(X-\alpha)^k+\dots+a_n(X-\alpha)^n$$
$$=\frac{1}{n}a_1(X-\alpha)+\frac{2}{n}a_2(X-\alpha)^2+\dots+\frac{k}{n}a_k(X-\alpha)^k\dots+a_n(X-\alpha)^n$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_0=0\\ a_1=\dfrac{2}{n}a_1\\ \vdots\\ a_k=\dfrac{k+1}{n}a_k\\ \vdots\\ a_n=a_n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_0=0\\ a_1=0\\ \vdots\\ a_k=0\\ \vdots\\ a_n=a_n\end{cases}$$

Donc

$$P=a_n(X-\alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant $P=QP'$, et on rappelle que $Q'=\frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P''$$

En dérivant $\left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP''$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)P'' = Q'P'' + QP''' = \frac{1}{n}P'' + QP''' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P'' = QP''' \Leftrightarrow P'' = \frac{n}{n-2}QP'''$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P'' = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout $k \in \{0,1, \dots, n-1\}$. On montre par récurrence que

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)}$$

On dérive $\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k+1)} = Q'P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} = \frac{1}{n}P^{(k+1)} + QP^{(k+2)} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)P^{(k+1)} = QP^{(k+2)}$$

$$\Leftrightarrow P^{(k+1)} = \frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}P^{(k+1)} = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}Q^{k+1}\frac{n}{n-k-1}QP^{(k+2)}$$

$$= \frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))}Q^{k+2}P^{(k+2)}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $k \le n-1$.
On l'applique au rang $n-1$:

$$P = \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots\big(n-(n-1)\big)}Q^nP^{(n)}$$

$P^{(n)} = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n$ (ce qui est important c'est que c'est une constante).
Peu importe la constante, il est clair que $P = KQ^n$, comme Q est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2} \Rightarrow X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2} = 2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 1 = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$$

Les racines de Q sont 1 et $-\frac{5}{2}$

Donc les racines de P vérifient

$$\begin{cases} X+\dfrac{1}{X}=1 \\ X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+1=X \\ \text{ou} \\ X^2+1=\dfrac{5}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2-X+1=0 \\ \text{ou} \\ X^2-\dfrac{5}{2}X+1=0 \end{cases}$$

Les racines de $X^2-X+1=0$ sont

$$-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de $X^2-\frac{5}{2}X+1=0$ sont

$$\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2$$

On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X)=2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X-2)(X^2-X+1)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X)=2\left(X-\frac{1}{2}\right)(X-2)(X+j)(X+j^2)$$

Allez à : Exercice 38

Correction exercice 39.

1. Comme $\sin(n\theta)\neq 0$, $d^\circ P=n$.

$$P=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)X^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}}{2i}X^k$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}X^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{-ik\theta}X^k=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}X\right)^k-\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{-i\theta}X\right)^k$$

$$=\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}X\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}X\right)^n$$

Les racines $z\in\mathbb{C}$ de P vérifient

$$\frac{1}{2i}\left(1+e^{i\theta}z\right)^n-\frac{1}{2i}\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n=0\Leftrightarrow\left(1+e^{i\theta}z\right)^n=\left(1+e^{-i\theta}z\right)^n\Leftrightarrow\left(\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}\right)^n=1$$

$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},\frac{1+e^{i\theta}z}{1+e^{-i\theta}z}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},1+e^{i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(1+e^{-i\theta}z\right)$$

$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},e^{i\theta}z-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}z=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$

$$\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z\left(e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\right)=e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$$

Il faut quand même vérifier que $e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}\neq 0$

$$e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}=0\Leftrightarrow e^{2i\theta}=e^{\frac{2ik\pi}{n}}\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},2\theta=\frac{2k\pi}{n}+2l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},\theta=\frac{k\pi}{n}+l\pi\Leftrightarrow\exists j\in\mathbb{Z},n\theta=k\pi+nl\pi\Leftrightarrow\sin(n\theta)=0$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z)=0\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,\dots,n-1\},z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$$

Les n racines de P sont les complexes $z_k=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}$ avec $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

2.

$$\overline{z_k}=\frac{\overline{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}=\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}}=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{2ik\pi}{n}}-1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\left(e^{-i\theta}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}e^{i\theta}\right)}=\frac{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}-e^{i\theta}}$$

$$=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}{e^{i\theta}-e^{\frac{2ik\pi}{n}}e^{-i\theta}}=z_k$$

Donc ces complexes sont des réels.

Allez à : Exercice 39

Correction exercice 40.

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $X-1$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1}=\frac{6+3-5}{2\times 2}=1$$

Je multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$b=\left[\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1}=\frac{-6+3-5}{-2\times 2}=2$$

Je multiplie par X, puis X tend vers l'infini.

$6=a+b+c$, donc $c=6-1-2=3$

$X=0$

$5=-5+b+d$ donc $d=5+1-2=4$

Donc

$$F(X)=\frac{6X^3+3X^2-5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1}{X-1}+\frac{2}{X+1}+\frac{3X+4}{X^2+1}$$

Allez à : Exercice 40

Correction exercice 41.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser X^4-X+2 par $(X-1)(X^2-1)=X^3-X^2-X+1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 \qquad\qquad -X+2 & X^3-X^2-X+1 \\ \hline X^4-X^3-X^2+X \qquad & X+1 \\ \hline X^3+X^2-2X+2 & \\ X^3-X^2\ \ -X+1 & \\ \hline 2X^2\ \ -X+1 & \end{array}$$

$$F(X)=\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}=X+1+\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}$$

On pose

$$G(X)=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)(X^2-1)}=\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{X-1}+\frac{c}{X+1}$$

Je multiplie par $(X-1)^2$ puis $X=1$

$$a=\left[\frac{2X^2-X+1}{X+1}\right]_{X=1}=\frac{2}{2}=1$$

Je multiplie par $X+1$ puis $X=-1$

$$c=\left[\frac{2X^2-X+1}{(X-1)^2}\right]_{X=-1}=\frac{4}{4}=1$$

Je multiplie par X puis X tend vers l'infini.
$2 = b + c$ donc $b = 1$.
Donc

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$$

Allez à : Exercice 41

Correction exercice 42.

1.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $X - 1$ puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2\times 2} = 1$$

Je multiplie par $X + 1$ puis $X = -1$

$$b = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = \frac{-6+3-5}{-2\times 2} = 2$$

Je multiplie par X, puis X tend vers l'infini.
$6 = a + b + c$, donc $c = 6 - 1 - 2 = 3$
$X = 0$
$5 = -5 + b + d$ donc $d = 5 + 1 - 2 = 4$
Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$$

2. Il reste à décomposer dans $\mathbb{C}[X]$

$$\frac{3X+4}{X^2+1} = \frac{3X+4}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{\overline{a}}{X+i}$$

Je multiplie par $X - i$, puis $X = i$.

$$a = \left[\frac{3X+4}{X+i}\right]_{X=i} = \frac{3i+4}{2i} = \frac{(3i+4)(-i)}{2} = \frac{3}{2} - 2i$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{\frac{3}{2} - 2i}{X-i} + \frac{\frac{3}{2} + 2i}{X+i}$$

Allez à : Exercice 42

Correction exercice 43.

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} \quad (*)$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$

$$d = \left[\frac{3}{X^2+X+1}\right]_{X=1} = 1$$

Première méthode

On multiplie par $X^2 + X + 1$, puis $X = j$

$$aj + b = \left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j} = \frac{3}{(j-1)^2} = \frac{3}{j^2 - 2j + 1} = \frac{3}{-3j} = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1 + j$$

Donc $b = 1$ et $a = 1$

On prend $X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Rightarrow c=-3+b+d=-3+1+1=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Deuxième méthode

$X=0$ dans $(*)$

$$3=b-c+d\Leftrightarrow b-c=3-d=2\Leftrightarrow b=2+c$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$0=a+c\Leftrightarrow a=-c$$

$X=-1$ dans $(*)$

$$\frac{3}{4}=-a+b-\frac{c}{2}+\frac{d}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=c+(2+c)-\frac{c}{2}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-2=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}c\Leftrightarrow c=-1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{X+1}{X^2+X+1}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, il suffit de décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$, comme

$$X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$$

Il existe $A\in\mathbb{C}$ tel que

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)}=\frac{A}{X-j}+\frac{\overline{A}}{X-j^2}$$

On multiplie par $X-j$, puis $X=j$

$$A=\left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j}=\frac{j+1}{j-j^2}=\frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{X+1}{X^2+X+1}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j}+\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}$$

Allez à : Exercice 43

Correction exercice 44.

$$F=\frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^{2010}}=\frac{X^2+1}{(X^2+1)^{2010}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2010}}=\frac{1}{(X^2+1)^{2009}}-\frac{1}{(X^2+1)^{2010}}$$

Allez à : Exercice 44

Correction exercice 45.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$X^4(X-1)^3=X^4(X^3-3X^2+3X-1)=X^7-3X^6+3X^5-X^4$$

$$\begin{array}{lr|l}
X^8 & +X+1 & X^7-3X^6+3X^5-X^4 \\
\cline{3-3}
X^8-3X^7+3X^6-X^5 & & X+3 \\
\hline
\quad 3X^7-3X^6+X^5 & +X+1 & \\
\quad 3X^7-9X^6+9X^5-3X^4 & & \\
\hline
\qquad 6X^6-8X^5+3X^4 & +X+1 &
\end{array}$$

$$\frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}=\frac{(X^7-3X^6+3X^5-X^4)(X+3)+6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$
$$=X+3+\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

On pose alors

$$G(X)=\frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4(X-1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de

$1+X+3X^4-8X^5+6X^6$ par $(X-1)^3=-1+3X-3X^2+X^3$ à l'ordre $4-1=3$

(Le 4 est le 4 de X^4)

$$\begin{array}{l|l}
1+X \qquad\qquad +3X^4-8X^5+6X^6 & -1+3X-3X^2+X^3 \\ \cline{2-2}
1-3X+3X^2 \quad -X^3 & -1-4X-9X^2-16X^3 \\ \hline
4X-3X^2 \quad +X^3+3X^4-8X^5+6X^6 & \\
4X-12X^2+12X^3-4X^4 & \\ \hline
9X^2-11X^3+7X^4-8X^5+6X^6 & \\
9X^2-27X^3+27X^4-9X^5 & \\ \hline
16X^3-20X^4+X^5+6X^6 & \\ \hline
16X^3-48X^4+48X^5-16X^6 & \\ \hline
28X^4-47X^5+22X^6 &
\end{array}$$

On en tire

$$1+X+3X^4-8X^5+6X^6$$
$$=(-1+3X-3X^2+X^3)(-1-4X-9X^2-16X^3)+28X^4-47X^5+22X^6$$
$$\Leftrightarrow \frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{(X-1)^3}$$
$$=\frac{(-1+3X-3X^2+X^3)(-1-4X-9X^2-16X^3)+28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{(X-1)^3}=-1-4X-9X^2-16X^3+\frac{28X^4-47X^5+22X^6}{(X-1)^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6X^6-8X^5+3X^4+X+1}{X^4\,(X-1)^3}=\frac{-1-4X-9X^2-16X^3}{X^4}+\frac{X^4(28-47X+22X^2)}{X^4(X-1)^3}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{G}=-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}$$

On pose alors

$$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{(X-1)^3}$$

On multiplie par $(X-1)^3$, puis $X=1$.

$$c=[28-47X+22X^2]_{X=1}=3$$

On multiplie par X, puis $X\to+\infty$

$$22=a$$

$X=0$,

$$28=-a+b-c\Leftrightarrow -28=-22+b-3\Leftrightarrow b=-33$$

Donc

$$H=\frac{28-47X+22X^2}{(X-1)^3}=\frac{22}{X-1}+\frac{53}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$$

Et alors

$$F=X+3-\frac{1}{X^4}-\frac{4}{X^3}-\frac{9}{X^2}-\frac{16}{X}+\frac{22}{X-1}-\frac{3}{(X-1)^2}+\frac{3}{(X-1)^3}$$

Allez à : Exercice 45

Correction exercice 46.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{eX+f}{(X^2+X+1)^2}$$

On multiplie par X^2, puis $X=0$.

$$b=\left[\frac{X^4+1}{(X^2+X+1)^2}\right]_{X=0}=1$$

On multiplie par $(X^2+X+1)^2$, puis $X=j$.

$$ej+f=\left[\frac{X^4+1}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{j^4+1}{j^2}=\frac{j+1}{j^2}=\frac{-j^2}{j^2}=-1$$

Donc $e=0$ et $f=-1$.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par X puis faire tendre X vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et bonjour les fractions pénibles, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

J'appelle

$$G=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus, $\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$, on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de G est $X(X^2+X+1)$. On y va.

$$G=\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}-\frac{1}{X^2}+\frac{1}{(X^2+X+1)^2}=\frac{X^4+1-(X^2+X+1)^2+X^2}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

$$=\frac{X^4+X^2+1-(X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^3-2X^2-2X)}{X^2(X^2+X+1)^2}$$

$$=\frac{-2}{X(X^2+X+1)}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2+X+1)}=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On multiplie par X, puis $X=0$

$$a=\left[\frac{-2}{X^2+X+1}\right]_{X=0}=-2$$

On multiplie par X^2+X+1, puis $X=j$.

$$cj+d=\left[\frac{-2}{X^2}\right]_{X=j}=\frac{-2}{j^2}=-2j$$

Donc $c=-2$ et $d=0$

Finalement

$$\frac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}=\frac{-2}{X}+\frac{1}{X^2}+\frac{-2X}{X^2+X+1}+\frac{-1}{(X^2+X+1)^2}$$

Allez à : Exercice 46

Correction exercice 47.

Ensuite je diviserai par 16

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{16X^5}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}$$
$$=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{c}{X+1}+\frac{d}{(X+1)^2}+\frac{e}{X-i}+\frac{f}{(X-i)^2}+\frac{\bar{e}}{X+i}+\frac{\bar{f}}{(X+i)^2}$$

Avec a, b, c et d réels et e et f complexes.

Il est facile de trouver b, d et f.

Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$b=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=1}=1$$

Je multiplie par $(X+1)^2$, puis $X=-1$

$$d=\left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X-i)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X^2+1)^2}\right]_{X=-1}=-1$$

Je multiplie par $(X-i)^2$, puis $X=i$

$$f=\left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=1}=\left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2}\right]_{X=i}=\frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2}=\frac{16i}{4(-4)}=-i$$

F est impaire donc $F(-X)=-F(X)$, soit encore : $-F(-X)=F(X)$

$-F(-X)=-\left(\frac{a}{-X-1}+\frac{b}{(-X-1)^2}+\frac{c}{-X+1}+\frac{d}{(-X+1)^2}+\frac{e}{-X-i}+\frac{f}{(-X-i)^2}+\frac{\bar{e}}{-X+i}+\frac{\bar{f}}{(-X+i)^2}\right)$

$-F(-X)=\frac{a}{X+1}-\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-1}-\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{X+i}-\frac{f}{(X+i)^2}+\frac{\bar{e}}{X-i}-\frac{\bar{f}}{(X-i)^2}$

En identifiant les coefficients avec ceux de $F(X)$, on a :

$a=c$, $b=-d$, $e=\bar{e}$ et $f=-\bar{f}$

$b=-d$, çà on le savait déjà, $e=\bar{e}$ donc e est réel et $f=-\bar{f}$ entraine que f est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

$X=0$ donne

$$F(0)=0=-a+b+c+d+ie-f-i\bar{e}-\bar{f}=-a+c+i(e-\bar{e})$$

Car $b+d=0$ et $-f-\bar{f}=i-i=0$

Cela donne $0=-a+c+i(e-\bar{e})-a+c+2i(i\mathrm{Im}(e)=-a+c-2\mathrm{Im}(e)$

Or $a=c$ donc $\mathrm{Im}(e)=0$ autrement dit e est réel.

Je multiplie par X, puis je fais tendre X vers ∞.

$$0=a+c+e+\bar{e}=2a+2e$$

Donc $e=-a$

Comme $c=a$, $b=1$, $d=-1$ et $f=-i$

On a :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{a}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{a}{X-i}-\frac{i}{(X-i)^2}-\frac{a}{X+i}+\frac{i}{(X+i)^2}$$

Ceci étant vrai pour tout $X\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1,-i,i\}$, je prends $X=2$.

$$\frac{16\times 32}{(16-1)^2}=\frac{a}{2-1}+\frac{1}{(2-1)^2}+\frac{a}{2+1}-\frac{1}{(2+1)^2}-\frac{a}{2-i}-\frac{i}{(2-i)^2}-\frac{a}{2+i}+\frac{i}{(2+i)^2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=a+1+\frac{a}{3}-\frac{1}{9}-\frac{a(2+i)}{5}-\frac{i(2+i)^2}{5^2}-\frac{a(2-i)}{5}+\frac{i(2-i)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\times 32}{15^2}=\frac{4a}{3}+\frac{8}{9}-\frac{4a}{5}-\frac{i(3+4i)}{25}+\frac{i(3-4i)}{25}$$
$$\Leftrightarrow \frac{16\times 32}{3^2\times 5^2}=\frac{20-12}{15}a+\frac{8}{9}+\frac{8}{25}$$
$$\Leftrightarrow 16\times 32=8\times 15a+8\times 25+8\times 9\Leftrightarrow 2\times 32=15a+25+9\Leftrightarrow 30=15a\Leftrightarrow a=2$$

Donc

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2}{X-i}-\frac{i}{(X-i)^2}-\frac{2}{X+i}+\frac{i}{(X+i)^2}$$

Il reste à diviser par 16 :

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{X-i}-\frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{X+i}+\frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$$

Ensuite pour décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ il faut réunir les conjugués.

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right)$$
$$-\frac{i}{16}\left(\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{1}{(X+i)^2}\right)$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}-\frac{i}{16}\frac{(X+i)^2-(X-i)^2}{(X^2+1)^2}$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}-\frac{i}{16}\frac{4iX}{(X^2+1)^2}$$

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\frac{1}{8}}{X-1}+\frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{X+1}-\frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2}-\frac{\frac{X}{4}}{X^2+1}+\frac{\frac{X}{4}}{(X^2+1)^2}$$

Je vais maintenant décomposer directement cette fraction dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme dans $\mathbb{C}[X]$ je vais décomposer $F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\beta}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\delta}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}$$

De la même façon, on trouve que $\beta=1$ et $\delta=-1$

Je multiplie par $(X^2+1)^2$, puis je prends $X=i$

$$\eta i+\theta=\left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2}\right]_{X=i}=\frac{16i^5}{(-1-1)^2}=4i$$

Donc $\eta=4$ et $\theta=0$.

F est impaire donc $-F(-X)=F(X)$

$$-F(-X)=-\left(\frac{\alpha}{-X-1}+\frac{\beta}{(-X-1)^2}+\frac{\gamma}{-X+1}+\frac{\delta}{(-X+1)^2}+\frac{-\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{-\eta X+\theta}{(X^2+1)^2}\right)$$
$$=\frac{\alpha}{X+1}-\frac{\beta}{(X+1)^2}+\frac{\gamma}{X-1}-\frac{\delta}{(X-1)^2}+\frac{\varepsilon X-\zeta}{X^2+1}+\frac{\eta X-\theta}{(X^2+1)^2}$$

$$-F(-X)=F(X)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=-\delta\\ \zeta=0\\ \theta=0\end{cases}$$

On savait déjà que $\beta=-\delta$ et que $\theta=0$.

Pour l'instant on en est à :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Je multiplie par X, puis on fait tendre X vers ∞.

$$0=\alpha+\gamma+\varepsilon$$

Comme $\alpha=\gamma$, on a $\varepsilon=-2\gamma$.
On peut essayer $X=0$ mais cela redonne $\alpha=\gamma$.
Pour l'instant on en est à :

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\gamma}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{2\gamma X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Comme dans $\mathbb{C}[X]$, je vais prendre $X=2$.

$$\frac{16\times 32}{(16-1)^2}=\gamma+1+\frac{\gamma}{3}-\frac{1}{9}-\frac{4\gamma}{5}+\frac{8}{5^2}\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=\frac{4\gamma}{3}-\frac{4\gamma}{5}+\frac{8}{9}+\frac{8}{25}\Leftrightarrow\frac{16\times 32}{15^2}=\frac{8\gamma}{15}+\frac{8\times 34}{9\times 25}$$

$$\Leftrightarrow 16\times 32=8\times 15\gamma+8\times 34\Leftrightarrow 2\times 32=15\gamma+34\Leftrightarrow\gamma=2$$

$$F(X)=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{4X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.
A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2+1}=\frac{a}{X-i}+\frac{\bar{a}}{X+i}$$

Et

$$\frac{4X}{(X^2+1)^2}=\frac{b}{X-i}+\frac{\bar{b}}{X+i}+\frac{c}{(X-i)^2}+\frac{\bar{c}}{(X+i)^2}$$

A faire.
Troisième méthode
On repart de

$$F(X)=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

On va calculer

$$\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{(X+1)^2(X^2+1)^2-(X-1)^2(X^2+1)^2+4X(X-1)^2(X+1)^2}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{((X+1)^2-(X-1)^2)(X^2+1)^2+4X(X^2-1)^2}{(X^2-1)^2(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{(X^2+2X+1-X^2+2X-1)(X^4+2X^2+1)+4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2}$$
$$=\frac{4X(X^4+2X^2+1)+4X(X^4-2X^2+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}$$

Donc

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{\gamma}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}+\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}\Leftrightarrow F-\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}$$
$$=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}\Leftrightarrow\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}-\frac{8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$
$$\Leftrightarrow\frac{16X^5-8X(X^4+1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16X^5-8X^5-8X}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X^5-8X}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X(X^4-1)}{(X^4-1)^2}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X}{X^4-1}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8X}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}$$

On multiplie par $X-1$, puis $X=1$

$$\alpha=\left[\frac{8X}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1}=2$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$\beta=\left[\frac{8X}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1}=2$$

On multiplie par X^2+1, puis $X=i$

$$\epsilon+i\zeta=\left[\frac{8X}{X^2-1}\right]_{X=i}=-4i\Rightarrow \epsilon=0 \text{ et } \zeta=-4$$

Donc

$$\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\gamma}{X+1}+\frac{\varepsilon X+\zeta}{X^2+1}=\frac{2}{X-1}+\frac{2}{X+1}-\frac{4X}{X^2+1}$$

Et enfin

$$F=\frac{16X^5}{(X^4-1)^2}=\frac{2}{X-1}+\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{2}{X+1}-\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{4X}{X^2+1}+\frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 16

Allez à : Exercice 47

Correction exercice 48.

1. α est une racine simple de Q donc il existe Q_1 tel que $Q=(X-\alpha)Q_1$ avec $Q_1(\alpha)\neq 0$

$$F=\frac{P}{Q}=\frac{P}{(X-\alpha)Q_1}=\frac{a}{X-\alpha}+\cdots$$

En multipliant par $X-\alpha$, puis en faisant $X=\alpha$, on trouve (classiquement)

$$a=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

D'autre part

$$Q=(X-\alpha)Q_1\Rightarrow Q'=Q_1+(X-\alpha)Q_1'$$

En faisant $X=\alpha$ dans cette dernière expression on trouve que $Q'(\alpha)=Q_1(\alpha)$

Par conséquent

$$a=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

2.

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Donc il existe $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ tels que :

$$F=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

En appliquant le résultat du 1°), avec $P = X$ et $Q' = nX^{n-1}$

$$a_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(1-(n-1))\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2ik(2-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{4ik\pi}{n}}$$

Donc

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Allez à : Exercice 48

Correction exercice 49.

1. $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1 = X^3(X^2 - 1) + (X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^3 + 1)$
   -1 est racine de $X^3 + 1$ donc on peut factoriser par $X + 1$, et on trouve, à l'aide d'une division élémentaire $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle
   On déduit de tout cela que la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :
   $$P = (X - 1)(X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + 1)^2(X^2 - X + 1)$$
   $X^2 - X + 1$ admet deux racines complexes conjuguées
   $$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j \quad \text{et} \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$
   La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :
   $$P = (X - 1)(X + 1)^2(X + j)(X + j^2)$$
2. Il existe a, b, c et d réels tels que :
   $$\frac{X + 1}{P} = \frac{X + 1}{(X - 1)(X + 1)^2(X^2 - X + 1)} = \frac{1}{(X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)}$$
   $$= \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1}$$
   On multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$
   $$a = \left[\frac{1}{(X + 1)(X^2 - X + 1)}\right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$
   On multiplie par $X + 1$, puis $X = -1$
   $$b = \left[\frac{1}{(X - 1)(X^2 - X + 1)}\right]_{X=-1} = -\frac{1}{6}$$
   On pose $X = 0$
   $$-1 = -a + b + d \Rightarrow d = -1 + a - b = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$
   On multiplie par X, puis X tend vers l'infini
   $$0 = a + b + c \Rightarrow c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$
   $$\frac{X + 1}{P} = \frac{\frac{1}{2}}{X - 1} - \frac{\frac{1}{6}}{X + 1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}}{X^2 - X + 1}$$

Allez à : Exercice 49