Dénombrement

Ensembles finis

Exercice 1 [01526] [Correction]
Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f: E \to F$ une application.
Montrer

$$f \text{ est injective si, et seulement si, } \operatorname{Card}(f(E)) = \operatorname{Card}(E)$$

Exercice 2 [01527] [Correction]
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble finie E. Exprimer $\operatorname{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonctions des cardinaux de $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ et $A \cap B \cap C$.

Exercice 3 [01528] [Correction]
Soient A et B deux parties de E et F.
Étant donnée une application $f: E \to F$, est-il vrai que :

a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
b) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
c) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
d) Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice 4 [03044] [Correction]
Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si, et seulement si, pour toute fonction $f: E \to E$, il existe $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ telle que $f(A) \subset A$.

Calcul de sommes

Exercice 5 [02362] [Correction]
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{Card} X, \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) \text{ et } \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cup Y)$$

Exercice 6 [01539] [Correction]
Soit E un ensemble à n éléments. Calculer

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{Card}(X) \text{ et } \sum_{X,Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y)$$

Listes et combinaisons

Exercice 7 [01529] [Correction]
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 8 [01530] [Correction]
Soient $E = \{1, \ldots, n\}$ et $F = \{1, \ldots, p\}$ avec $n \leq p \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 9 [01531] [Correction]
Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 10 [01532] [Correction]
On trace dans un plan n droites en position générale (*i.e.* deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 11 [01540] [Correction]
Combien y a-t-il de p-cycles dans le groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$?

Exercice 12 [01536] [Correction]
Soit E un ensemble à n éléments.

a) Soit X une partie à p éléments de E.
Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
b) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 13 [01537] [Correction]
Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de parties X et Y de E telles que $X \subset Y$?

Exercice 14 [01538] [Correction]
Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \operatorname{Card} A$.

a) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
b) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \dots, n\}$ éléments contenant A ?
c) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 15 [03933] [Correction]

a) Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?
b) Même question avec $a_1^{k_1}a_2^{k_2} \dots a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$.

Exercice 16 [03956] [Correction]
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

a) Combien y a-t-il de mains possibles ?
b) Combien de ces mains comportent exactement un As ?
c) Combien de ces mains ne comportent aucun As ?
d) Combien comporte au moins un As ?

Exercice 17 [03959] [Correction]
Un mot M long de n lettres et constitués de r lettres différentes. La j-ème lettre apparaît p_j fois dans le mot M et donc

$$p_1 + \dots + p_r = n$$

Combien d'anagrammes du mot M peut-on constituer ?

Démonstrations combinatoires

Exercice 18 [01533] [Correction]
[Formule de Chu-Vandermonde] Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0\,;p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

Dénombrements avancés

Exercice 19 [03961] [Correction]
Un mot est constitué de p fois la lettre A et q fois la lettre B.

a) Combien peut-on constituer d'anagrammes de ce mot ?
b) Application : en considérant les symboles « 1 » et « + » , combien existe-t-il de suites $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant

$$x_1 + \dots + x_p = n$$

Exercice 20 [03960] [Correction]

a) Combien existe-t-il de suites strictement croissante de p entiers choisis dans $\{1, \dots, n\}$?
b) Application : combien existe-t-il de suite $(x_1, \dots, x_p)$ avec

$$x_1 + \dots + x_p \le n \text{ et } x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$$

c) Même question avec

$$x_1 + \dots + x_p = n \text{ et } x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 21 [03930] [Correction]
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $E = \{1, \dots, n\}$.

a) Combien y a-t-il de suites strictement croissantes $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E ?
b) Combien y a-t-il de suites croissantes au sens large $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de E ?
c) En déduire le nombre de suites $(a_1, \dots, a_p)$ de naturels vérifiant

$$a_1 + \dots + a_p \le n$$

d) Même question avec la condition

$$a_1 + \dots + a_p = n$$

Exercice 22 [01535] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note Σ_n^p le nombre de n uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$.

a) Déterminer $\Sigma_n^0, \Sigma_n^1, \Sigma_n^2, \Sigma_1^p$ et Σ_2^p.

b) Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \dots + \Sigma_n^p$$

c) En déduire que
$$\Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Exercice 23 [01534] [Correction]
Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

b) On suppose $p \leq n$ et on considère a un élément de E.
On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir
$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$
$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Exercice 24 [03963] [Correction]
On note d_n le nombre de permutations σ de $[\![1\,;n]\!]$ vérifiant
$$\forall k \in [\![1\,;n]\!], \sigma(k) \neq k$$
On dit σ est un dérangement de $[\![1\,;n]\!]$. On convient $d_0 = 1$.

a) Établir
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

b) En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Exercice 25 [03985] [Correction]
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;n]\!]$ et $\mathcal{S}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0\,;n]\!]$ points fixes. Enfin, on pose
$$s_n(k) = \mathrm{Card}(\mathcal{S}_n(k))$$

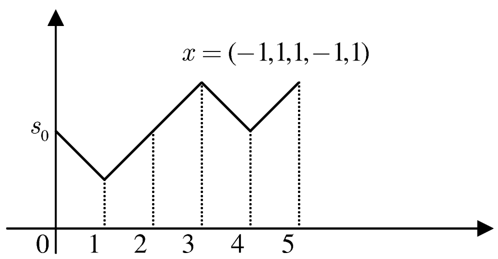
a) Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k)$$

b) Soient $n, k \geq 1$. En calculant de deux façons le nombre de couples (s, x) constitués de $s \in \mathcal{S}_n(k)$ et x point fixe de s, établir
$$k s_n(k) = n s_{n-1}(k-1)$$

c) En déduire
$$s_n(k) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

d) Retrouver directement le résultat précédent.

Exercice 26 [03934] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X l'ensemble de suites $(x_1, \dots, x_n)$ avec
$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, x_k = 1 \text{ ou } -1$$
À chaque suite $x = (x_1, \dots, x_n)$ élément de X on associe la suite $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ avec
$$s_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } s_k = s_{k-1} + x_k \text{ pour } k \in \{1, \dots, n\}$$
Celle-ci détermine une ligne brisée déterminée par les points de coordonnées (k, s_k) comme illustrée ci-dessous Cette ligne brisée définit un chemin joignant

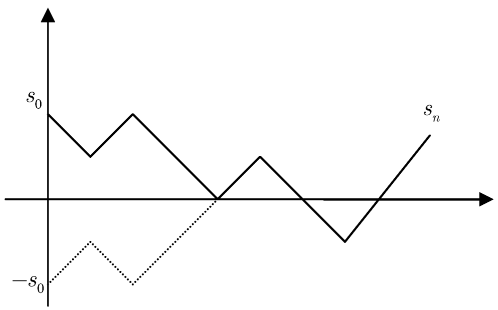


$(0, s_0)$ à (n, s_n).

a) On note p le nombre de 1 dans la suite $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Exprimer en fonction de n, p et s_0 la valeur de s_n.

b) Étant donnée $m \in \mathbb{N}$, combien existe-t-il de chemin $s_n = m$?

c) On suppose $s_0 \in \mathbb{N}$. En exploitant la figure ci-dessous expliquer pourquoi il y



a autant de chemins joignant $(0, -s_0)$ à (n, m) que de chemins joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses.

d) En déduire le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (n, m) dont tous les points sont d'ordonnées strictement positives.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Si $E = \emptyset$ alors $f(E) = \emptyset$ et l'équivalence proposée est vraie.
Sinon, on peut écrire $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec des x_i deux à deux distincts et $n = \operatorname{Card} E$.
Si f est injective alors

$$f(E) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

avec les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts. On en déduit $\operatorname{Card}(f(E)) = n$.
Inversement, si f est non injective alors

$$\operatorname{Card} f(E) < n$$

Exercice 2 : [énoncé]

$$\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B \cup C - \operatorname{Card}(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B + \operatorname{Card} C \\ &\quad - \operatorname{Card} B \cap C - \operatorname{Card} A \cap B - \operatorname{Card} C \cap A \\ &\quad + \operatorname{Card} A \cap B \cap C\end{aligned}$$

Exercice 3 : [énoncé]

a) oui, car si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $f(A) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est fini.
b) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.
c) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.
d) non, il suffit de considérer une partie B formée par une infinité de valeurs non prises par f.

Exercice 4 : [énoncé]
Si E est l'ensemble vide, il n'existe pas de partie A incluse dans E vérifiant $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.
Si E est un ensemble à un élément, idem.
Si E est un ensemble fini contenant au moins deux éléments, on peut indexer les éléments de E pour écrire $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $n = \operatorname{Card} E \geq 2$. Considérons alors l'application $f\colon E \to E$ définie par $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3, \dots, f(x_{n-1}) = x_n$ et $f(x_n) = x_1$.
Soit une partie A de E vérifiant $f(A) \subset A$. Si A est non vide alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \in A$ mais alors $f(x_i) \in A$ *i.e.* $x_{i+1} \in A$ et reprenant ce processus on obtient $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{i-1} \in A$ et donc $A = E$.
Ainsi, si E est un ensemble fini, il existe une application $f\colon E \to E$ pour laquelle les seules parties A de E vérifiant $f(A) \subset A$ sont $\emptyset$ et E.
Inversement.
Soit E un ensemble infini et $f\colon E \to E$.
Soit $x \in E$ et considérons la suite des éléments $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(x) = x$ alors la partie $A = \left\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right\} \subset E$ est non vide, distincte de E (car A finie) et vérifie $f(A) \subset A$.
Sinon, la partie $A = \left\{f(x), f^2(x), \dots\right\} = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset E$ est non vide, distincte de E (car $x \notin A$) et vérifie $f(A) \subset A$.

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E. Par suite

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E.
Pour une telle partie Z, les parties X contenant Z ont $\ell \in \{k, \dots, n\}$ éléments.
Il y a $\begin{pmatrix} n-k \\ \ell-k \end{pmatrix}$ parties X à ℓ éléments contenant Z.
Pour une telle partie X, une partie Y telle que $X \cap Y = Z$ est une partie Y déterminée par $Z \subset Y \subset Z \cup C_E X$.
Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles.
Ainsi, il y a

$$\sum_{\ell=k}^{n} \begin{pmatrix} n-k \\ \ell-k \end{pmatrix} 2^{n-\ell} = (1+2)^{n-k} = 3^{n-k}$$

couples (X, Y) tels que $X \cap Y = Z$.

$$\sum_{X, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\operatorname{Card} Z = k} \sum_{X \cap Y = Z} \operatorname{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k}$$

Or

$$((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k}x^{k-1}$$

donc

$$\sum_{X,Y\subset E} \operatorname{Card}(X\cap Y) = n4^{n-1}$$

Enfin

$$\operatorname{Card}(X\cup Y) = \operatorname{Card} X + \operatorname{Card} Y - \operatorname{Card}(X\cap Y)$$

donne

$$\sum_{X,Y\subset E} \operatorname{Card}(X\cup Y) = 2^n n2^{n-1} + 2^n n 2^{n-1} - n4^{n-1} = 3n4^{n-1}$$

Exercice 6 : [énoncé]
Pour $k \in \{0,\dots,n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E.
Par suite

$$\sum_{X\subset E} \operatorname{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\operatorname{Card}(X)=k} k = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Pour $k \in \{0,\dots,n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E.
Pour une telle partie Z, les parties X contenant Z ont $\ell \in \{k,\dots,n\}$ éléments.
Il y a $\binom{n-k}{ell-k}$ parties X à ℓ éléments contenant Z.
Pour une telle partie X, une partie Y telle que $X\cap Y = Z$ est une partie Y déterminée par $Z\subset Y\subset Z\cup C_E X$. Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles.
Il y a

$$\sum_{\ell=k}^{n} \binom{n-k}{\ell-k} 2^{n-\ell} = (1+2)^{n-k} = 3^{n-k}$$

couples (X,Y) tels que $X\cap Y = Z$.
Par suite

$$\sum_{X,Y\subset E} \operatorname{Card}(X\cap Y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\operatorname{Card} Z=k} \sum_{X\cap Y=Z} \operatorname{Card}(X\cap Y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k}$$

Or

$$((3+x)^n)' = n(3+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^{n-k}x^{k-1}$$

donc

$$\sum_{X,Y\subset E} \operatorname{Card}(X\cap Y) = n4^{n-1}$$

Exercice 7 : [énoncé]
Si $n > p$, il n'y a pas d'injections possibles.
Si $n = 0$, il y a une injection : l'application vide.
Si $0 < n \leq p$ alors on peut écrire $E = \{x_1,\dots,x_n\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Pour former une injection de E dans F :
On choisit $f(x_1)$ dans F : p choix.
On choisit $f(x_2)$ dans $F\setminus\{f(x_1)\}$: $p-1$ choix.
...
On choisit $f(x_n)$ dans $F\setminus\{f(x_1),\dots,f(x_{n-1})\}$: $p-n+1$ choix.
Au total, il y a $p\times(p-1)\times\dots\times(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$ choix.

Exercice 8 : [énoncé]
Une application $f\colon E\to F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F. Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E vers F.

Exercice 9 : [énoncé]
Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection de $\{1,\dots,n\}$ vers E et inversement.
Par suite, il y a exactement $n!$ relations d'ordre total possibles.

Exercice 10 : [énoncé]
Notons t_n le nombre de triangles formés.

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0$$

Pour $n \geq 3$, former un triangle revient à choisir les trois droites définissant ses côtés :

$$\text{il y a } \binom{n}{3} \text{ possibilités}$$

Chacune de ses possibilités définit un véritables triangle (car il y a ni concourance, ni parallélisme) et les triangles obtenus sont deux à deux distincts. Finalement

$$t_n = \binom{n}{3}$$

Exercice 11 : [énoncé]
Une injection f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ permet de définir le p-cycle $(f(1)\dots f(p))$.
Inversement, un p-cycle de $\mathbb{N}_n$ peut être définis par exactement p injections différentes.
En vertu du principe des bergers, il y a exactement $\frac{n!}{p(n-p)!}$ p-cycles dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 12 : [énoncé]

a) Autant que de parties de $E\setminus X$: 2^{n-p}
b) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}=(1+2)^n=3^n$.

Exercice 13 : [énoncé]
Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Y à un k éléments dans E.
Pour une telle partie Y, il y a 2^k parties X incluses dans Y.
Au total, il y a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=(1+2)^n=3^n$ couples $(X,Y)\in\wp(E)^2$ tels que $X\subset Y$.

Exercice 14 : [énoncé]

a) Autant que de parties de $E\setminus A$: 2^{n-p}
b) Autant que de parties de $E\setminus A$ à $m-p$ éléments : $\binom{n-p}{m-p}$.
c) Une fois X à m éléments contenant A déterminé il y a 2^{n-m} choix de Y possibles et donc
$\sum_{m=p}^{n}\binom{n-p}{m-p}2^{n-m}=\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}2^{n-p-k}=(1+2)^{n-p}=3^{n-p}$.

Exercice 15 : [énoncé]

a) Dans le développement de
$$(a+b+c)^{10}=(a+b+c)(a+b+c)\dots(a+b+c)$$
on obtient un terme $a^2b^5c^3$ en choisissant deux a, cinq b et trois c.
Il y a $\binom{10}{2}$ choix possibles pour les facteurs dont seront issus les a.
Une fois ceux-ci choisis, il y a $\binom{8}{5}$ choix possibles pour les facteurs fournissant les b.
Une fois ces choix faits, les trois facteurs restant fournissent les c.
Au total, il y a
$$\binom{10}{2}\binom{8}{5}=\frac{10!}{2!5!3!}=2520$$
termes $a^2b^5c^3$ apparaissant lors du développement de $(a+b+c)^{10}$.
b) On reprend le même protocole, pour obtenir
$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$$
si $k_1+k_2+\dots+k_p=n$ et 0 sinon.

Exercice 16 : [énoncé]

a) Une main se comprend comme une partie à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments.
$$\binom{52}{5}$$
b) On choisit l'As et les cartes le complétant
$$\binom{4}{1}\times\binom{48}{4}$$
c) On choisit uniquement des cartes qui ne sont pas des As
$$\binom{48}{5}$$
d) Par complément
$$\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$$

Exercice 17 : [énoncé]
Si l'on distingue les lettres du mot même lorsque ce sont les mêmes (par exemple, en leur affectant un indice comme dans $P_1O_1P_2I_1$), il y a $n!$ permutations possibles des lettres distinguées. Parmi celles-ci, plusieurs correspondent à un même anagramme (comme $P_1I_1P_2O_1$ et $P_2I_1P_1O_1$).
Pour chaque anagramme, il y a exactement $p_1!\dots p_r!$ permutations des lettres du mot conduisant à celui-ci car les permutations conduisant à un même anagramme se déduisent les une des autres par permutations entre elles des lettres identiques.
Au total, il y a
$$\frac{n!}{p_1!\dots p_r!}\text{ anagrammes possibles}$$

Exercice 18 : [énoncé]
Soit E un ensemble à $p+q$ éléments séparé en deux parties disjointes E' et E'' de cardinaux p et q.
Il y a exactement $\binom{p+q}{n}$ parties à n éléments dans E.
Or pour former une partie à n élément de E, on peut pour chaque $k \in [\![0\,;n]\!]$ commencer par choisir k éléments dans E' avant d'en choisir $n-k$ dans E''. Il y a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in [\![0\,;n]\!]$ puis au total $\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités d'où l'identité.

Exercice 19 : [énoncé]

a) Pour former un anagramme, il suffit de choisir les p positions de la lettre A parmi les $p+q$ places possibles.
Il y a donc
$$\binom{p+q}{p} \text{ anagrammes possibles}$$

b) Une somme $x_1+\cdots+x_p$ peut être codée par une succession de « 1 » et de « + » comme ci-dessous
$$\text{« } 2+3+0+1 \text{ » devient} 11+111++1$$
$$\text{« } 0+2+1+0 \text{ » devient} +11+1+$$
Le codage est réalisé avec n symboles « 1 » et $p-1$ symboles « + ». Il y a donc exactement
$$\binom{n+p-1}{n}$$
suites possibles

Exercice 20 : [énoncé]

a) Une suite strictement croissante de p entiers dans $\{1,\dots,n\}$ est entièrement déterminée par le choix de ses éléments qu'il suffit alors d'ordonner. Il y en a donc
$$\binom{n}{p}$$

b) À chaque suite $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant $x_1+\cdots+x_p \le n$ et $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{N}^*$ on peut associer une suite strictement croissante $(y_1,\dots,y_p)$ d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ en posant
$$y_k = x_1+\cdots+x_k$$
Inversement, à une suite $(y_1,\dots,y_p)$ comme au dessus correspond une unique suite $(x_1,\dots,x_p)$ comme voulue avec
$$x_1 = y_1, x_k = y_k - y_{k-1} \text{ pour } k \ge 2$$
Il y a donc autant de suites $(x_1,\dots,x_p)$ vérifiant $x_1+\cdots+x_p \le n$ et $x_1,\dots,x_p \in \mathbb{N}^*$ que de suite strictement croissantes de p éléments dans $\{1,\dots,n\}$, soit
$$\binom{n}{p}$$

c) La condition $x_1+\cdots+x_p = n$ est remplie quand $x_1+\cdots+x_p \le n$ mais pas $x_1+\cdots+x_p \le n-1$. Le nombre de suite cherché est donc
$$\binom{n}{p} - \binom{n-1}{p} = \binom{n-1}{p-1}$$

Exercice 21 : [énoncé]

a) Une suite $(x_1,\dots,x_p)$ strictement croissante est entièrement déterminée par le choix de p éléments distincts dans E (qu'il suffit alors d'ordonner). Il y a donc autant de suites strictement croissantes que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments, soit
$$\binom{n}{p}$$

b) Associons à une suite $(x_1,\dots,x_p)$ d'éléments de E la suite $(y_1,\dots,y_p)$ définie par
$$y_k = x_k + (k-1)$$
Par cette correspondance bijective, on peut associer à une suite croissante d'éléments de E une suite strictement croissante d'éléments de $E' = \{1,\dots,n+p-1\}$ et inversement.
Le nombre de suites $(x_1,\dots,x_p)$ croissantes d'éléments de E est donc
$$\binom{n+p-1}{p}$$

c) À chaque suite $(a_1, \ldots, a_p)$ on fait correspondre la suite $(x_1, \ldots, x_p)$ avec

$$x_k = a_1 + \cdots + a_k$$

Par cette correspondance bijective, on associe les suites $(a_1, \ldots, a_p)$ vérifiant $a_1 + \cdots + a_p \leq n$ aux suites croissantes d'éléments de $E = \{0, 1, \ldots, n\}$.
Le nombre de suites cherché est donc

$$\binom{n+p}{p}$$

d) La condition $a_1 + \cdots + a_p = n$ est remplie si $a_1 + \cdots + a_p \leq n$, mais pas $a_1 + \cdots + a_p \leq n - 1$.
Le nombre de suites cherché est donc

$$\binom{n+p}{p} - \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) $\Sigma_n^0 = 1$: seul le n-uplet nul est de somme égale à 0.
$\Sigma_n^1 = n$: les n-uplets de somme égale à 1 sont formés d'un 1 et de $n-1$ zéros.
$\Sigma_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$: les n-uplets de somme égale à 2 sont ou bien formé de 1 deux et de $n-1$ zéros, ou bien de 2 uns et de $n-2$ zéros.
$\Sigma_1^p = 1$: seul le 1-uplet (p) est de somme égale à p.
$\Sigma_2^p = p + 1$: les couples de somme égale à p sont $(0, p), (1, p-1), \ldots, (p, 0)$.

b) Le nombre de $n+1$ uplets $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = p$ avec $x_{n+1} = k \in [\![0\,;p]\!]$ est Σ_n^{p-k}.
Donc

$$\Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \cdots + \Sigma_n^p$$

c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, montrons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \cdots + \Sigma_n^n = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$$

Récurrence établie.

Exercice 23 : [énoncé]

a) Si F est un singleton, il n'y a qu'une application à valeurs dans F et celle-ci est surjective. $S_n^1 = 1$.
Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F < +\infty$ alors les surjections de E sur F sont aussi les bijections. Par suite $S_n^n = n!$.
Si $\operatorname{Card} E < \operatorname{Card} F$, il n'existe pas de surjections de E sur F. Ainsi $S_n^p = 0$.

b) Une surjection de E sur F telle que sa restriction à $E \setminus \{a\}$ soit surjective peut prendre n'importe quelle valeurs en a. Il y en a pS_{n-1}^p.
Une surjection de E sur F telle que sa restriction à $E \setminus \{a\}$ ne soit pas surjective doit prendre en a la valeur manquante. Il y a p possibilité pour choisir la valeur en a et S_{n-1}^{p-1} surjections de $E \setminus \{a\}$ sur $F \setminus \{f(a)\}$. Au total, il y en a pS_{n-1}^{p-1}.
Au final

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$

c) Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$
Si $p = 1$

$$S_1^1 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 1$$

Si $p > 1$

$$S_1^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} = -p(1-1)^{p-1} = 0$$

car

$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k} \binom{p-1}{k-1}$$

Supposons la propriété établie au rang $n - 1 \geq 1$.
Pour $p = 1$

$$S_n^1 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 1$$

Pour $p > 1$

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p) = p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^{n-1} + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n-1}$$

En combinant les deux sommes en exploitant la formule de Pascal

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} k^{n-1}$$

puis en exploitant

$$p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}$$

on parvient à

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Récurrence établie.

Exercice 24 : [énoncé]

a) Pour $A \subset [\![1\,;n]\!]$, notons

$$\mathcal{S}_A = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \forall x \in A, \sigma(x) = x \text{ et } \forall x \notin A, \sigma(x) \neq x\}$$

$\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointes des $\mathcal{S}_A$ pour A parcourant $\mathcal{P}([\![1\,;n]\!])$.
Après indexation des éléments de A, une application de $\mathcal{S}_A$ peut être identifiée à un dérangement de $[\![1\,;n-k]\!]$ avec $k = \operatorname{Card} A$.
On en déduit $\operatorname{Card}\mathcal{S}_A = d_{n-k}$ puis

$$\operatorname{Card}\mathcal{S}_n = \sum_{A\subset\mathcal{P}(E)} d_{n-\operatorname{Card} A} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_{n-k}$$

b) Raisonnons par récurrence forte sur n.
La propriété énoncé est vrai aux rangs 0 et 1.
Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$.
Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, posons

$$d'_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par hypothèse de récurrence $d_k = d'_k$ pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ et on veut établir l'identité pour $k = n$.
Or

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par échange des deux sommes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

puis glissement d'indice dans la deuxième somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^{k}\binom{n}{k+\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\ell!$$

et expression factorielle des coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\frac{n!}{(n-\ell)!}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^{k}\binom{n-\ell}{k}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^{k}\binom{n-\ell}{k} = (1+(-1))^{n-\ell} = \begin{cases}0 & \text{si } n-\ell>0\\ 1 & \text{si } n=\ell\end{cases}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d'_{n-k} = n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_{n-k}$$

On en déduit $d'_n = d_n$ puisque l'hypothèse de récurrence a fourni les identifications $d_k = d'_k$ pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.
Récurrence établie.

Exercice 25 : [énoncé]

a) La somme étudiée dénombre les permutations de $[\![1\,;n]\!]$ selon leur nombre de points fixes

$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k) = \operatorname{Card}\mathcal{S}_n = n!$$

b) Pour chaque permutation de s de $\mathcal{S}_n(k)$ il y a k points fixes x possibles. Le nombre de couples cherché est donc $ks_n(k)$.
Pour chaque $x \in [\![1\,;n]\!]$, une permutation possédant k points fixes (dont x) est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1\,;n]\!]\setminus\{x\}$ qui est une permutation à $k-1$ points fixes. Ainsi, le nombre de couples cherché est aussi $ns_{n-1}(k-1)$.

c) En itérant la formule ci-dessus obtenue

$$s_n(k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} s_{n-k}(0) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

d) Pour déterminer une permutation élément de $\mathcal{S}_n(k)$, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités) et on construit ses valeurs sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes à partir d'une permutation de $n-k$ éléments sans points fixes (il y a $s_{n-k}(0)$ possibilités). Au total, il y a

$$\binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

applications de la forme voulue.

Exercice 26 : [énoncé]

a) Le nombre de -1 est de $n-p$ et donc $s_n = s_0 + p - (n-p) = s_0 + 2p - n$.

b) Si $m - (s_0 + n)$ n'est pas un nombre pair, il n'y a pas de chemin solutions.
Sinon, on introduit $p \in \mathbb{Z}$ pour lequel $m - s_0 + n = 2p$.
Si $p < 0$ ou $p > n$, on ne pourra trouver de chemin solutions.
Si $0 \le p \le n$, chemins solutions correspondent aux suites x pour lesquels on positionne p termes 1 et les autres égaux à -1. Il y a $\binom{n}{p}$ positions possibles pour les termes 1 et autant de chemins solutions.

c) Tout chemin joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses peut être associé de façon bijective à un chemin joignant $(0, -s_0)$ à (n, m), il suffit pour cela de passer à l'opposer les termes $x_1, x_2, \dots$ jusqu'au premier pour lequel $s_0 + x_1 + \dots + x_k = 0$ et ne pas modifier les autres comme dans la figure proposé (ce résultat est connu sous le nom de principe de réflexion).

d) Si $m - 1 + n$ est impair, il n'y a aucun chemins possible d'aucune sorte.
Sinon, on peut écrire $m - 1 + n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et il y a alors $\binom{n}{p}$ chemins possibles (ce nombre étant nul lorsque $p < 0$ ou $p > n$).
Parmi ceux-ci, on retire ceux coupant l'axe abscisse qui par l'étude au dessus sont au nombre de $\binom{n}{p+1}$.
Finalement, il y a

$$\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1}$$

chemins solutions