CLUB UNESCO-ENI-ABT
CONCOURS D'EXCELLENCE INTER-LYCEES 2026

Série : TSE-STI **Epreuve : de Mathématiques** **Durée : 03 h**

Exercice 1 : (5 points)

1) Etant donné un nombre réel θ. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(o;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 3 cm.

a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation à variable X, (E_θ) : $X^2 - 2X\cos\theta + 1 = 0$.

b) Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ l'équation à variable z, (E'_θ) : $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$.

2) On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation $\left(E'_{\frac{\pi}{3}}\right)$ telles que :

$R_e(z_A) < 0$; $Im(z_B) < 0$ avec $z_B = -z_A$; $z_D = \overline{z_A}$ et $z_C = \overline{z_B}$ où z_A, z_B, z_C et z_D sont les affixes respectives des points A, B, C et D.

a) Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Place les points A, B, C et D dans le plan complexe.

3) Soit S la transformation du plan définie par son expression complexe : $z' = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z + \frac{3\sqrt{3}-i}{2}$.

a) Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de S ?

b) Détermine l'affixe du point D' image de D par S.

4) Soit m un nombre réel tel que $m \in [-1; 1]$.

On appelle G_m le barycentre du système des points pondérés : $\{(A; m^2+1);\ (B; m);\ (D; -m)\}$

a) Exprime $\overrightarrow{AG_m}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$. Place les points G_1 et G_{-1}.

b) Détermine et construis l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\|$

Exercice 2 : (5 points)

Deux constructeurs d'automobiles lancent simultanément deux modèles de voitures A et B. Afin de promouvoir leur produit, ils font appel à des sociétés de publicité qui procèdent à des sondages. La campagne publicitaire dure plusieurs mois. Chaque mois on interroge les mêmes individus. On définit les événements suivants :

$\boldsymbol{A_n}$: « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle A au $n^{\text{ième}}$ *mois* ».

$\boldsymbol{B_n}$: « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle B au $n^{\text{ième}}$ *mois* ».

On pose $P_n = P(A_n)$ (probabilité de A_n) ; $Q_n = P(B_n)$ (probabilité de B_n)

1) On suppose qu'un individu est obligé de se déterminer soit pour le modèle A, soit pour le modèle B. Ecris alors une relation entre P_n et Q_n.

2) On constate qu'un individu favorable au modèle A, à un moment donné, garde une fois sur deux le même avis le mois suivant, alors qu'un individu favorable au modèle B garde sept fois sur dix le même avis le mois suivant.

Détermine dans ces conditions les probabilités conditionnelles suivantes : $P(B_{n+1}/A_n)$ et $P(B_{n+1}/B_n)$.

3) En utilisant les formules des probabilités totales et les résultats des questions précédentes :

a) Démontre que $P(B_n \cap B_{n+1}) = 0{,}7 \times Q_n$ et que $P(A_n \cap B_{n+1}) = 0{,}5 \times P_n$.

b) Déduis-en que $P(B_{n+1}) = 0{,}7Q_n + 0{,}5P_n$. c) Montre que $Q_{n+1} = 0{,}2Q_n + 0{,}5$.

4) Démontre que la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = Q_n - 0{,}625$ est une suite géométrique de raison 0,2.

5) Détermine la limite de (U_n) puis celle (Q_n), déduis-en la limite de (P_n).

<u>Problème :</u> (10 points)

A) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = -\frac{1}{x} - \ln x$

1) Résous l'équation différentielle : $y' + y = 0$.

2) Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \varphi(x)e^x$

a) Montre que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Démontre que φ est solution de (E) si, et seulement si g est une primitive de la fonction $x \longmapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$.

c) Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto -e^x \ln x - \frac{e^x}{x}$.

d) Déduis-en que l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions $x \longmapsto Ce^{-x} - \ln x$ où C est une constante réelle.

B) On considère la fonction numérique f définie $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = e^{1-x} - \ln x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 1 cm).

1) a) Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

b) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]1; 2[$.

c) Construis (C).

2) a) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} xf(x)$

b) Soit x un élément de l'intervalle $]0; 1[$. Calcule $F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$ en fonction de x.

c) Montre que lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers e.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montre que, pour tout entier naturel k tel que : $1 \leq k \leq n - 1$ et pour tout réel t tel que : $\frac{k}{n} \leq\ t \leq \frac{k+1}{n}$, on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq\ f(t)\ \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) Montre alors que : $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq\ F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Déduis-en que :

$F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3) a) Déduis des questions précédentes que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite et calcule cette limite.

b) Etablis les égalités : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} = (e-1)\frac{1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

c) Utilise les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$U_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $V_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ont des limites lorsque n vers l'infini et calcule ces limites.